

Динамические модели управления запасами

Задача управления запасами возникает, когда необходимо создать запас материальных ресурсов или предметов потребления с целью удовлетворения спроса на заданном интервале времени (конечном или бесконечном). Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования практически любой организации необходимо создание запасов. В любой задаче управления запасами требуется определять количество заказываемой продукции и сроки размещения заказа. Спрос можно удовлетворить путём однократного создания запаса на весь рассматриваемый период времени или посредством создания запаса для каждой единицы времени этого периода. Эти два случая соответствуют избыточному запасу (по отношению к единице времени) и недостаточному запасу (по отношению к полному периоду времени).

При избыточном запасе требуется более высокие удельные (отнесённые к единице времени) капитальные вложения, но дефицит возникает реже и частота размещения заказов меньше. С другой стороны, при недостаточном запасе удельные капитальные вложения снижаются, но частота размещения заказов и риск дефицита возрастает. Для любого из указанных крайних случаев характерны значительные экономические потери. Таким образом, решения относительно размера заказа и момента его размещения могут основываться на минимизации соответствующей функции общих затрат, включающих затраты, обусловленные потерями от избыточного запаса и дефицита.

Динамическое программирование – это математический метод поиска оптимального управления, специально приспособленный к многошаговым процессам.

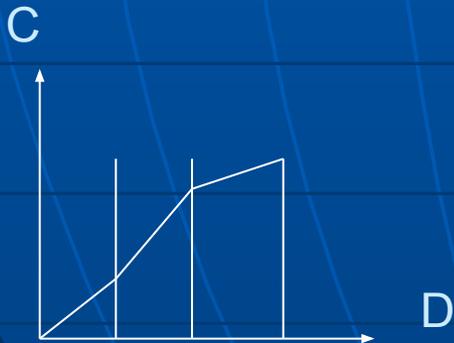
Перед началом решения задачи динамического управления запасами необходимо сформировать данные по этапам: просчитать затраты по каждому этапу, определить сроки возобновления заказа, режимы работы предприятия (нормальный, сверхурочный, аккордный и т.д.)

Задача при отсутствии затрат на оформление заказа

Основные предпосылки модели:

1. $k=0$
2. Отсутствие дефицита. Спрос на продукцию не может быть удовлетворен за счет его производства в последующие периоды. Это означает, что суммарное предложение за предыдущие периоды не меньше спроса на данный момент.
3. Стоимость производства единицы продукции может изменяться в зависимости от интенсивности работы.

Модель может быть решена как транспортная задача с $k \cdot n$ пунктами производства и n пунктами потребления, где n – количество этапов; k – возможное число режимов работы;



Алгоритм решения:

1. Построение первого опорного решения даёт оптимальное решение.
Рассмотрим пример:

Компания производит вытяжки для каминов, которые необходимы с декабря по март. В начале сезона спрос низкий, в середине он достигает пика и уменьшается к концу сезона. Учитывая популярность продукции компания может использовать сверхурочные работы. Данные о производственных мощностях за 4 месяца представлены таблицей:

	Возможности		Спрос
	Обычный режим	Сверхурочный режим	
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

Стоимость производства единицы продукции 6 у.е. в обычном режиме и 9 у.е при сверхурочном работах. Стоимость хранения 0,1 у.е.

Решение:

$$90+50 \geq 100$$

$$90+50+100+60 \geq 100+190$$

$$90+50+100+60+120+80 \geq 100+190+210$$

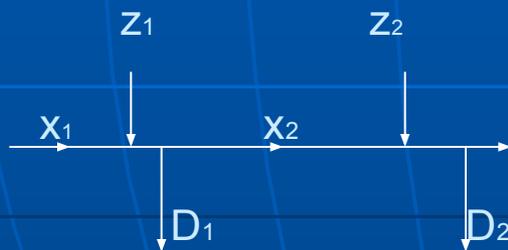
$$500 \geq 500$$

$$500+10+170 \geq 500+160$$

$$680 \geq 660$$

Условие отсутствия дефицита выполняется.

Модель с затратами на оформление заказа.



z_i – количество заказной продукции, $i = 1, 2, \dots, n$

D_i – потребность в продукции, спрос

x_i – объём запаса на начале i – го этапа

$C_i = C_{1i} + C_{2i}$, где C_{1i} – затраты связанные с производством;

C_{2i} – затраты связанные с хранением;

$$C_{1i} = \begin{cases} 0, & z_i = 0 \\ k_i + C_i * z_i & \end{cases}$$

$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i *$$

$C_{2i} = (x_i + z_i - D_i) * h_i$ – стоимость хранения единицы продукции

Т.к. в модели предполагается отсутствие дефицита, количество продукции на i -ом этапе может быть не меньше суммарной продукции реализованной на оставшихся этапах $0 \leq x_{i+1} \leq D_{i+1} + D_{i+2} + \dots + D_{i+n}$

Рекуррентные соотношения для функции затрат $f_i^*(x_{i+1})$ минимизирующие суммарные расходы на этапах $i = 1, 2, \dots, n$ будут иметь вид:

$$f_1(x_2) = \min$$

$$0 \leq z_1 \leq D_1 + x_2$$

$$\{ k_1 + C_1 * z_1 + h_1 * x_2 \}$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min$$

$$0 \leq z_i \leq D_i + x_{i+1}$$

$$\{ k_i + C_i * z_i + h_i * x_{i+1} + f_{i-1}^*(x_{i+1} + D_i - z_i) \}$$

Пример:

Найти оптимальную стратегию в 3-ех этапной системе уравнения запасами, начальный запас $x_1 = 1$, затраты на приобретение: 10 у.е. для первых 3-ех единиц

И 20 у.е. за каждые дополнительные

Период	Спрос D_i	Затраты K_i	Затрат на хран. h_i
I	3	3	1
II	2	7	3
III	4	6	2

$$x_1 = 1$$

$$C_i = \begin{cases} 10z_i, 0 \leq z_i \leq 3 \\ 30 + 20 \cdot (z_i - 3), z_i \geq 4 \end{cases}$$

Этап I:

$$0 \leq x_2 \leq 6, 2 \leq z_1 \leq 8$$

		$Z_1 = 2$	3	4	5	6	7	8		
x_2	h_1x_2	$C=23$	33	53	73	93	113	133	$F_1(x_2)$	$Z_{опт}$
0	0	23	-	-	-	-	-	-	23	2
1	1	-	34	-	-	-	-	-	34	3
2	2	-	-	55	-	-	-	-	55	4
3	3	-	-	-	76	-	-	-	76	5
4	4	-	-	-	-	97	-	-	97	6
5	5	-	-	-	-	-	118	-	118	7
6	6	-	-	-	-	-	-	139	139	8

Этап II : $0 \leq x_3 \leq 4$; $0 \leq z_2 \leq 6$

		$Z_2=0$	1	2	3	4	5	6		
x_3	h_2*x_3	0	17	27	37	57	77	97	$F_2(x_3)$	$Z_{2опт}$
0	0	$0+0+55$	$17+0+34$	$27+0+23$	-	-	-	-	50	2
1	3	$0+3+76$	$3+17+55$	$3+27+34$	$3+27+23$	-	-	-	63	3
2	6	103	99	88	77	86	-	-	77	3
3	9	127	123	112	101	100	109	-	100	4
4	12	151	147	136	125	124	123	132	123	5

Этап III : $x_4 = 0$; $0 \leq z_3 \leq 4$

	0	1	2	3	4	
	0	16	26	36	56	
$x_4=0$	$0+0+123$	$0+16+100$	$0+26+77$	$36+63$	$56+50$	$F_3(x_4)$
						99

Ответ: $f_3(x_4)_{\min}=99$ у.е., $z_{3\text{опт}}=3$, $z_{2\text{опт}}=3$, $z_{1\text{опт}}=2$

Для большинства реальных ситуаций существует (положительный) срок выполнения заказа (временное запаздывание) L от момента размещения заказа до его действительной поставки. Стратегия размещения заказов в приведенной модели должна определять точку возобновления заказа.

Следующий рисунок показывает случай, когда точка возобновления заказа должна опережать на L единиц времени ожидаемую поставку. В практических целях эту информацию можно просто преобразовать, определив точку возобновления заказа через уровень запаса, соответствующий моменту возобновлению.

На практике это реализуется путем непрерывного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа. По этой причине эту модель еще называют моделью непрерывного контроля состояния заказа. Следует заметить, что срок выполнения заказа L можно всегда принять меньше продолжительности цикла t_0^* .

Пример. Ежедневный спрос на некоторый товар (b) составляет 100ед. Затраты на размещение каждого запаса (K) постоянны и равны 100долл. Ежедневные затраты на хранение единицы запаса (h) составляют 0,02долл. Определить экономичный размер партии и точку заказа при сроке выполнения заказа, равном 12 дням.

Оптимальная продолжительность цикла составляет:

$$t_0^* = y^*/b = 1000/100 = 10 \text{ дней.}$$

Т.к. срок выполнения заказа равен 12 дням и продолжительность цикла составляет 10 дней, возобновление заказа происходит, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения спроса на $12-10=2$ дня. Таким образом, заказ размером $y^*=1000$ размещается, когда уровень запаса достигает $2 \cdot 100=200$ ед.

Можно считать, что эффективный срок выполнения заказа равен $L - t_0^*$ при $L > t_0^*$, при этом величина $(L - t_0^*)$ меньше t_0^* и равен L в противном, здесь L - заданный срок выполнения заказа.

Заключение:

В любой задаче управления запасами решаются вопросы выбора размеров и сроков размещения заказов на запасаемую продукцию. К сожалению, общее решение этой задачи нельзя получить на основе одной модели. Поэтому разработаны самые разнообразные модели, описывающие различные частные случаи. Одним из решающих факторов при разработке модели управления запасами является характер спроса. В наиболее простых моделях предполагается, что спрос является статическим детерминированным. В большинстве моделей управление запасами осуществляется оптимизацией функции затрат, включающей затраты на оформление заказов, закупку и хранение продукции, а также потери от дефицита. Потери от дефицита обычно наиболее сложно оценить т.к. они могут быть обусловлены такими нематериальными факторами, как, например, ухудшение репутации. С другой стороны, хотя оценку затрат на оформление заказа получить нетрудно, включение в модель этой статьи расходов существенно усложняет математическое описание задачи.

Известные модели управления запасами редко точно описывают реальную систему. Поэтому решение, получаемое на основе моделей этого класса, следует рассматривать скорее как принципиальные выводы, а не конкретные рекомендации. В ряде сложных случаев приходится прибегать к методам имитационного моделирования системы, чтобы получить достаточно надежное решение.