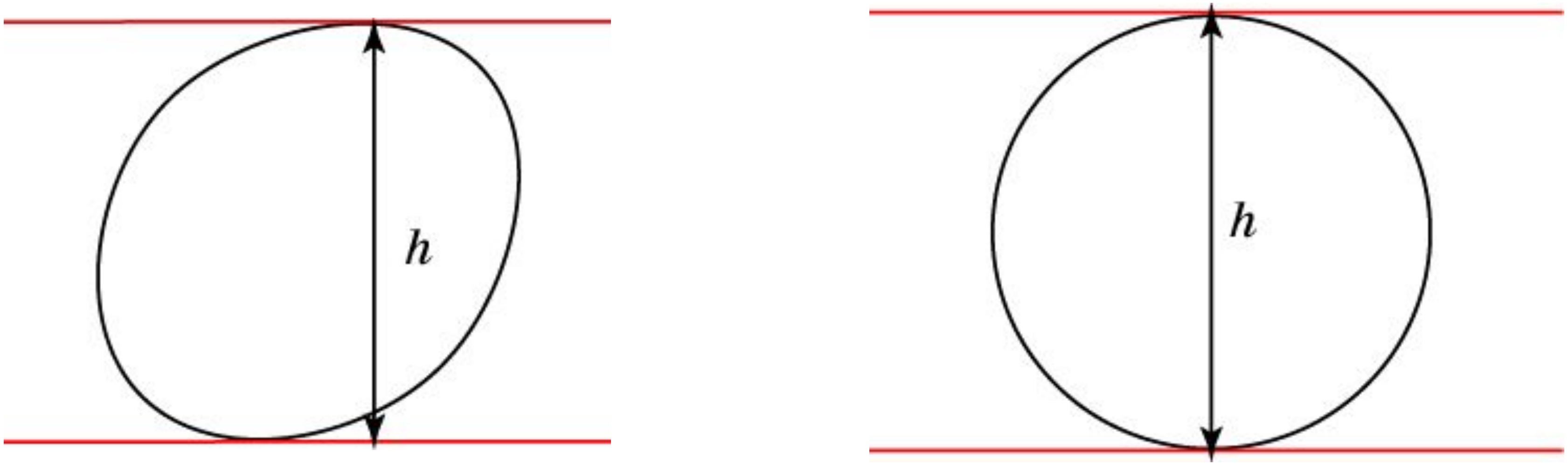
Кривые постоянной ширины

Для определения ширины *h* замкнутой кривой рассмотрим две параллельные прямые, между которыми расположена данная кривая. Будем сдвигать друг к другу эти прямые до тех пор, пока они не коснутся кривой. Расстояние между полученными параллельными прямыми и будет шириной кривой в направлении перпендикулярном этим прямым.



Для разных направлений ширина кривой может быть разной. Примером кривой одинаковой (постоянной) ширины по всем направлениям является окружность. Ее ширина равна диаметру.

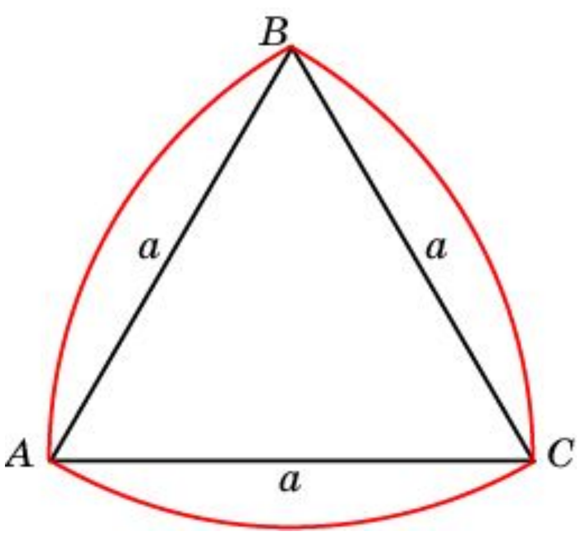
О кривых постоянной ширины рекомендуем посмотреть фильм на сайте www.etudes.ru

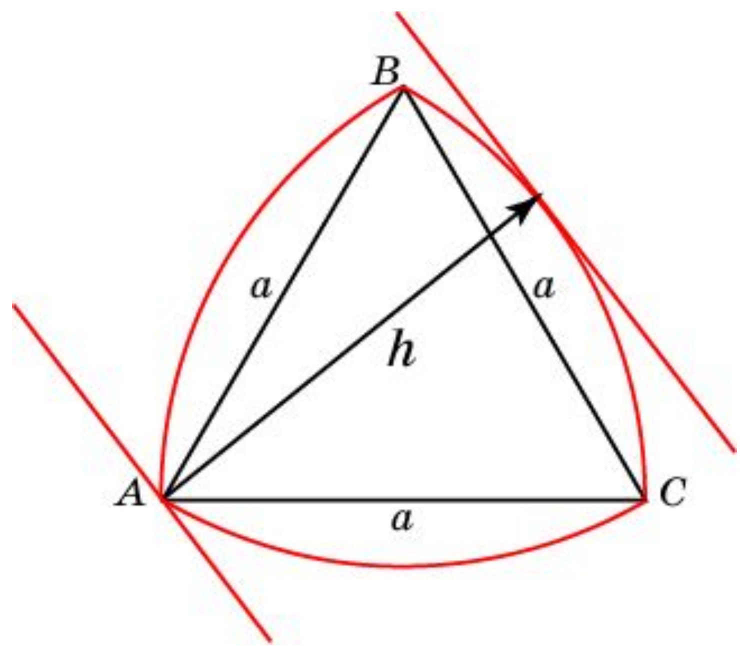
Треугольник Рело

Бывают ли кривые, отличные от окружности и имеющие постоянную ширину?

Оказывается, бывают. Примером такой кривой является кривая, придуманная французским ученым Ф. Рело (1829 – 1905), называемая «треугольник Рело».

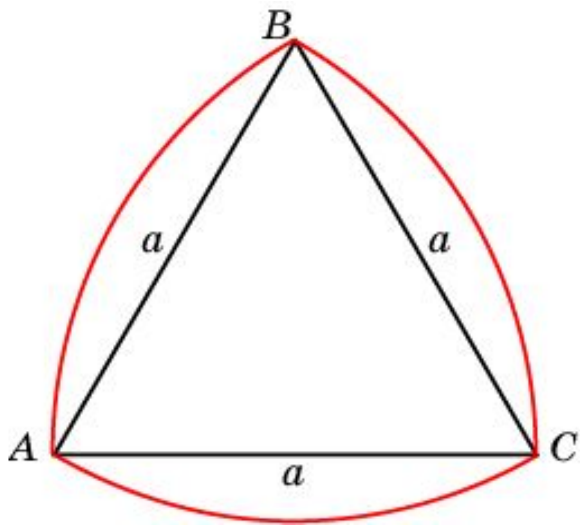
Для его построения рассмотрим правильный треугольник *ABC* со стороной *a*. С центром в вершине *A* и радиусом *a* проведем дугу *BC* окружности. Аналогично, с центрами в вершинах *B* и *C* и радиусом *A* проведем дуги окружности *AC* и *AB*. В результате получим искомую кривую, состоящую из трех дуг окружности. Ее ширина равна стороне *a* правильного треугольника.





Упражнение 1

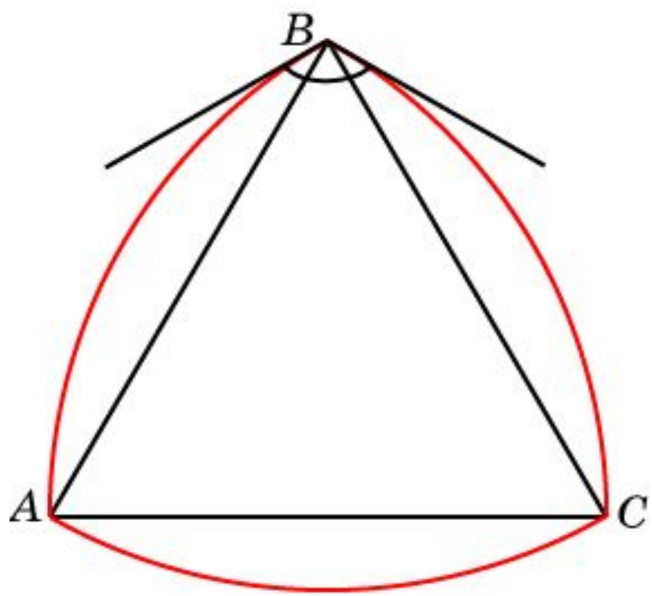
Докажите, что периметр треугольника Рело равен длине окружности, диаметр которой равен ширине треугольника Рело.



Решение. Напомним, что длина дуги окружности с центральным углом φ и радиусом r равна φr. Так как треугольник Рело состоит из трех дуг окружностей, для которых $r = a$, $\varphi = \pi/3$, то их общая длина равна πr, т.е. равна длине окружности, диаметр которой равен ширине треугольника Рело.

Упражнение 2

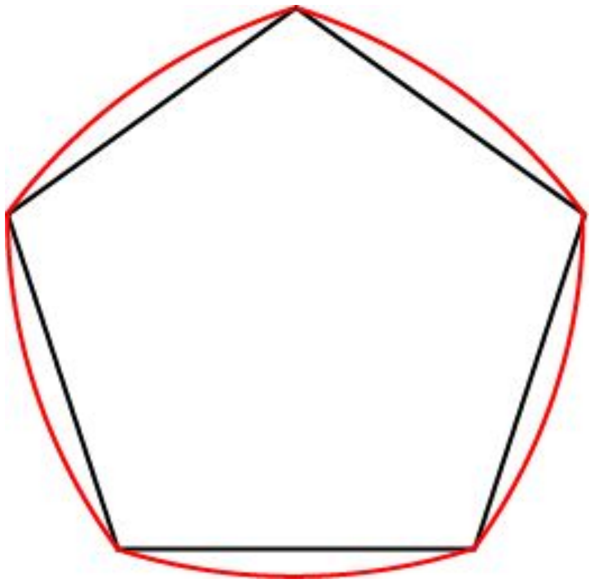
Найдите углы треугольника Рело, образованные касательными к дугам окружностей в его вершинах.

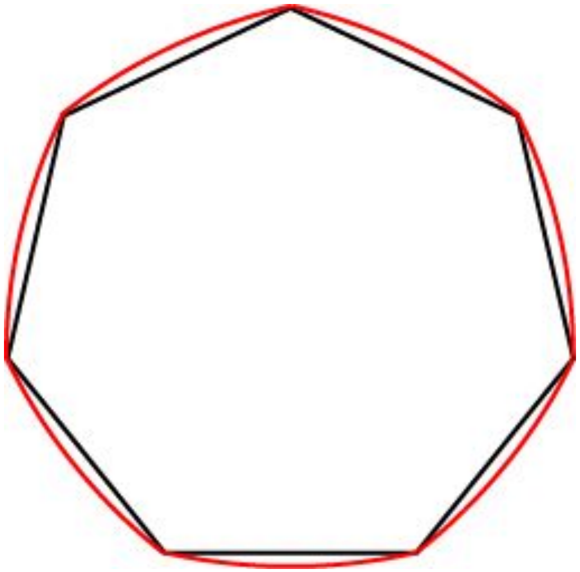


Ответ. 120°.

Правильные многоугольники Рело

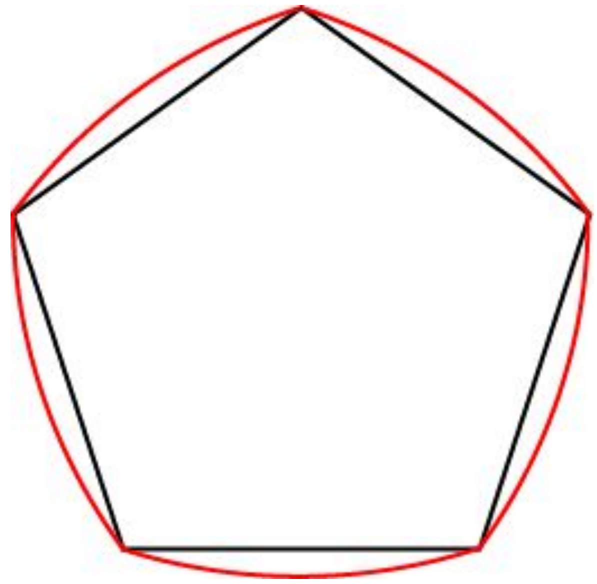
Кривые постоянной ширины можно получать не только из правильного треугольника, но и из правильных многоугольников с нечетным числом сторон. На рисунке показаны такие кривые для правильных пятиугольника и семиугольника.





Упражнение 3

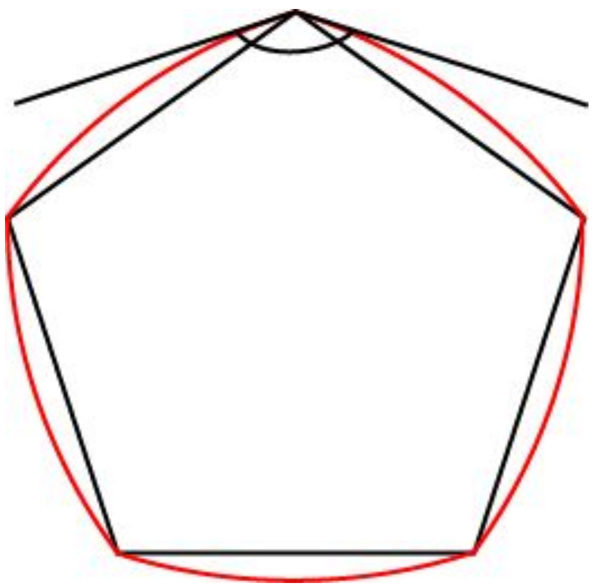
Сторона правильного пятиугольника равна 1. Найдите ширину соответствующего треугольника Рело.



Ответ. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 4

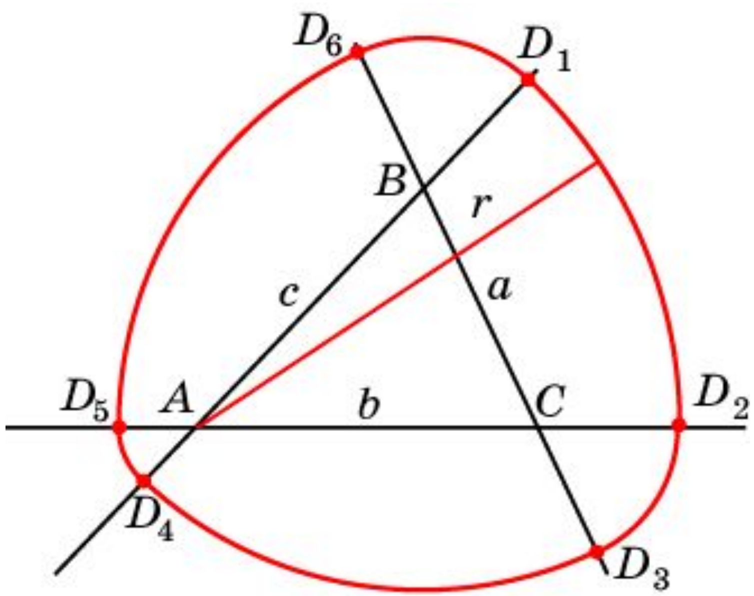
Найдите углы пятиугольника Рело, образованные касательными к дугам окружностей в его вершинах.



Ответ. 144°.

Неравносторонний треугольник

Рассмотрим три прямые, попарно пересекающиеся в точках A, B, C. Обозначим стороны треугольника ABC соответственно a, b, c.



На продолжении отрезка AB возьмем точку D_1. С центром в точке A и радиусом $r = AD_1$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_1 и точку D_2 на луче AC.

Далее, с центром в точке C и радиусом $CD_2 = r\text{-}b$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_2 и точку D_3 на луче BC.

Затем, с центром в точке B и радиусом $BD_3 = a+r\text{-}b$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_3 и точку D_4 на луче BA.

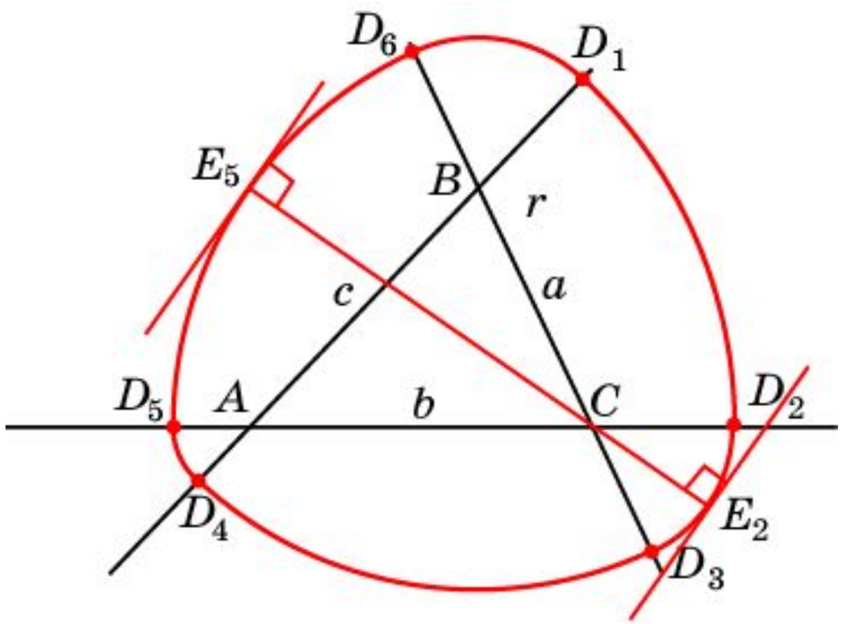
С центром в точке A и радиусом $AD_4 = a + r – b - c$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_4 и точку D_5 на луче CA.

С центром в точке C и радиусом $CD_5 = a + r - c$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_5 и точку D_6 на луче CB.

С центром в точке B и радиусом $BD_6 = r - c$ проведем дугу окружности, соединяющую точку D_6 и точку D_1 на луче AB. Получим замкнутую кривую.

Упражнение 5

Докажите, что полученная кривая имеет постоянную ширину. Найдите ее выражение через a, b, c и r.



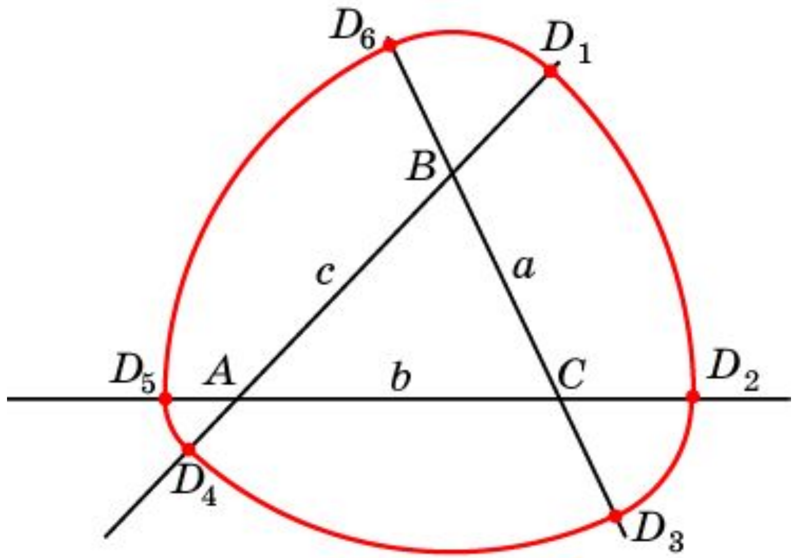
Решение. Через точку E_1 на дуге D_1D_2 и точку A проведем прямую. Ее точку пересечения с дугой D_4D_5 обозначим E_4. Касательные к кривой в точках E_1, E_4 будут перпендикулярны отрезку E_1E_4. Следовательно, длина этого отрезка будет шириной кривой h в направлении прямой E_1E_4, $h = r + a + r – b - c = 2r + a – b – c$. Ясно, что это значение не зависит от выбора точки E_1 на дуге D_1D_2.

Рассмотрим теперь точку E_2 на дуге D_2D_3. Через нее и точку C проведем прямую. Ее точку пересечения с дугой D_5D_6 обозначим E_5. Касательные к кривой в точках E_2, E_5 будут перпендикулярны отрезку E_2E_5. Следовательно, длина этого отрезка будет шириной кривой в направлении прямой E_2E_5. Она равна $r – b + a + r - c = 2r + a – b – c = h$. Ясно, что это значение не зависит от выбора точки E_2 на дуге D_2D_3.

Аналогичным образом показывается, что для точек E_3 дуги D_3D_4 ширина кривой также будет равна $2r + a – b – c = h$.

Упражнение 6

Докажите, что длина полученной кривой равна длине окружности с диаметром, равным ширине h кривой.



Решение. Напомним, что длина l дуги окружности радиуса R и центральным углом φ выражается формулой $l = \varphi R$.

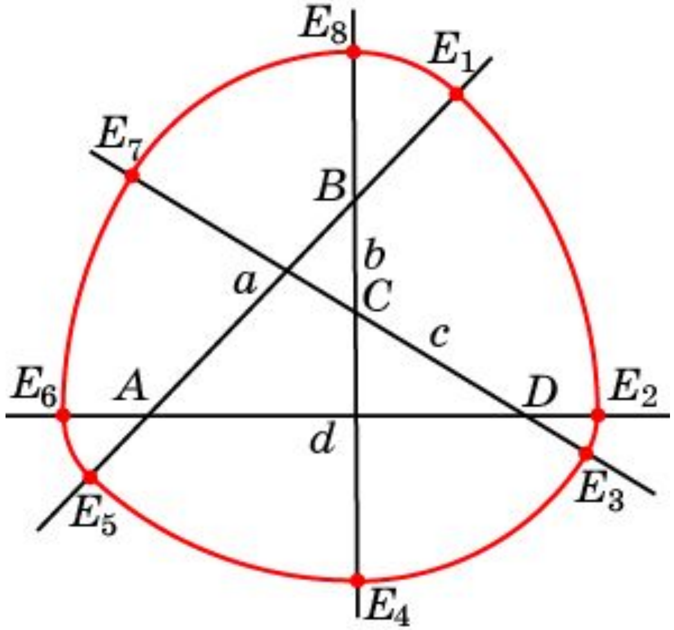
Пусть углы треугольника ABC равны соответственно α, β, γ. Тогда длина дуги D_1D_2 αr, длина дуги D_4D_5 равна $\alpha(a + r - b - c)$. Их сумма равна αh.

Аналогично, сумма длин дуг D_2D_3 и D_5D_6 равна γh, сумма длин дуг D_3D_4 и D_6D_1 равна βh.

Таким образом, длина всей кривой равна $\alpha h + \beta h + \gamma h = (\alpha + \beta + \gamma)h = \pi h$, т.е. равна длине окружности с диаметром h.

Невыпуклый четырехугольник

Рассмотрим четыре прямые, попарно пересекающиеся в точках A, B, C, D. Обозначим стороны четырехугольника $ABCD$ соответственно a, b, c, d.



На продолжении отрезка AB возьмем точку E_1. С центром в точке A и радиусом $r = AE_1$ проведем дугу окружности, соединяющую точку E_1 и точку E_2 на луче AD.

Проведите дальнейшее построение кривой постоянной ширины самостоятельно, найдите ее ширину. Докажите, что ее длина равна длине окружности с диаметром, равным ширине h кривой.

Ответ. Искомая кривая изображена на рисунке, где E_2E_3 – дуга окружности с центром D и радиусом $r – d$, E_3E_4 – дуга окружности с центром C и радиусом $c + r – d$, E_4E_5 – дуга окружности с центром B и радиусом $b + c + r – d$, E_5E_6 – дуга окружности с центром A и радиусом $b + c + r – d – a$, E_6E_7 – дуга окружности с центром D и радиусом $b + c + r – a$, E_7E_8 – дуга окружности с центром C и радиусом $b + r – a$, E_8E_1 – дуга окружности с центром B и радиусом $r – a$. Ширина h кривой равна $2r + b + c – a – d$.