Некоторые именные теоремы о треугольниках

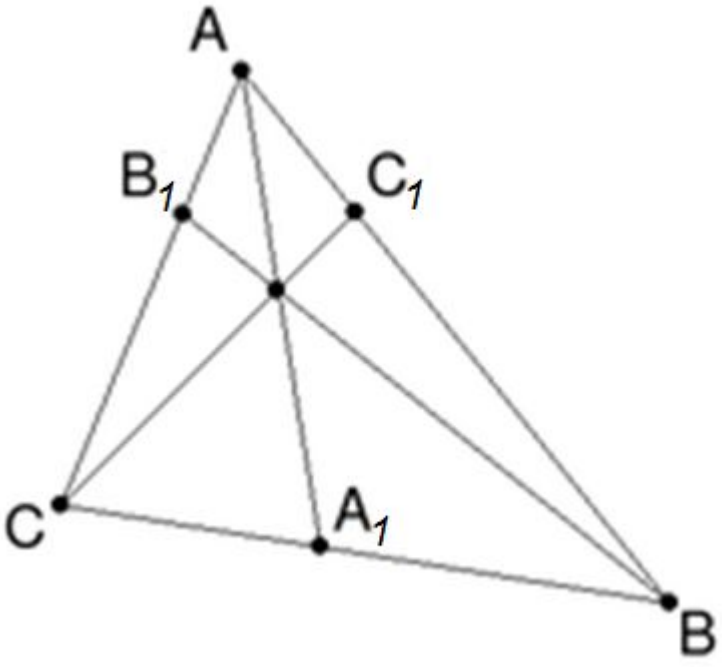
Борд Лиза 10М

Учитель: Муравьёва Анна Петровна

Теорема Чевы

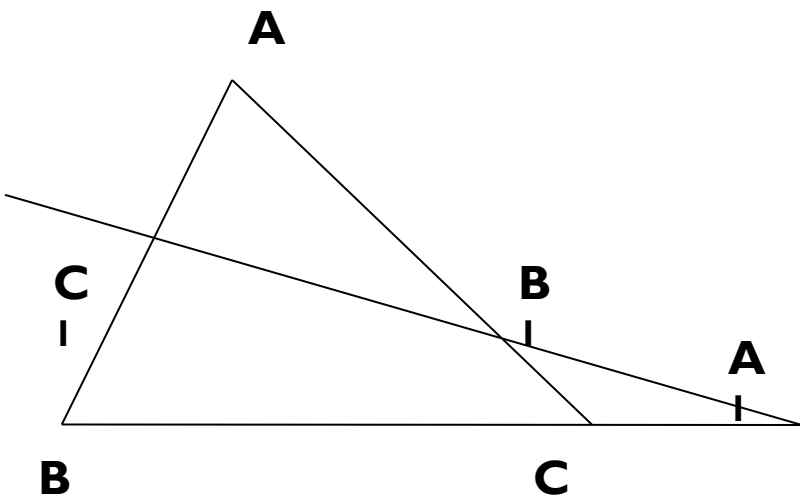
- Три чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника проходят через одну точку тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$



Теорема Менелая

- Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на прямых BC, CA и AB треугольника или на их продолжениях, то они лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда



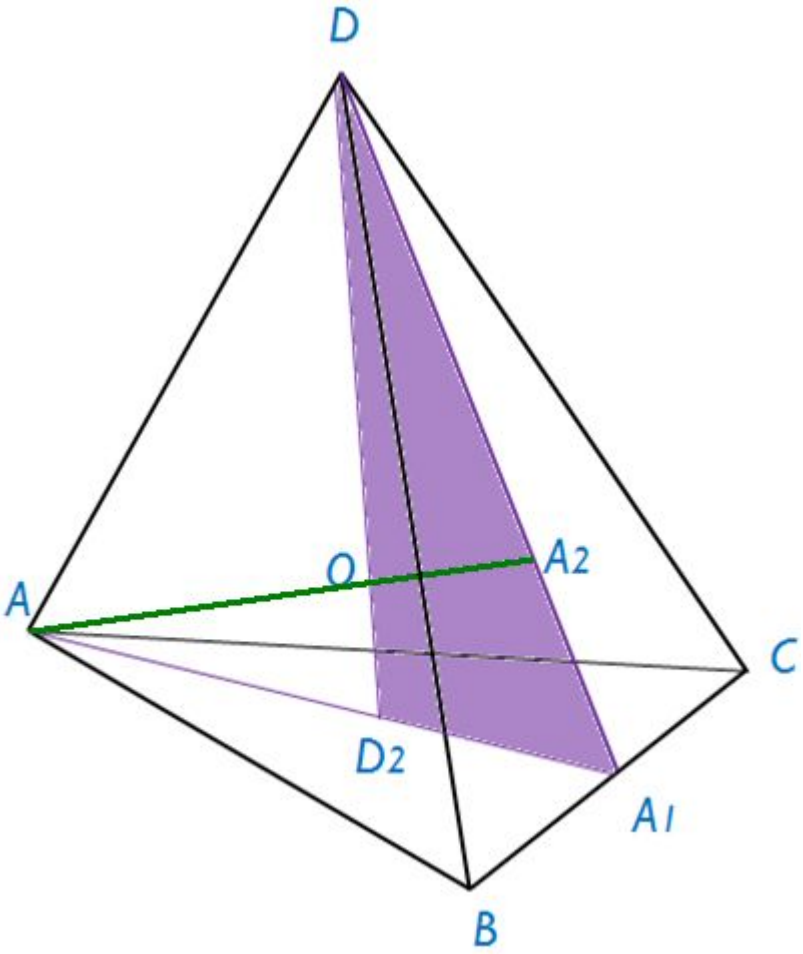
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Задача №1

- Доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 3:1, считая от вершин.

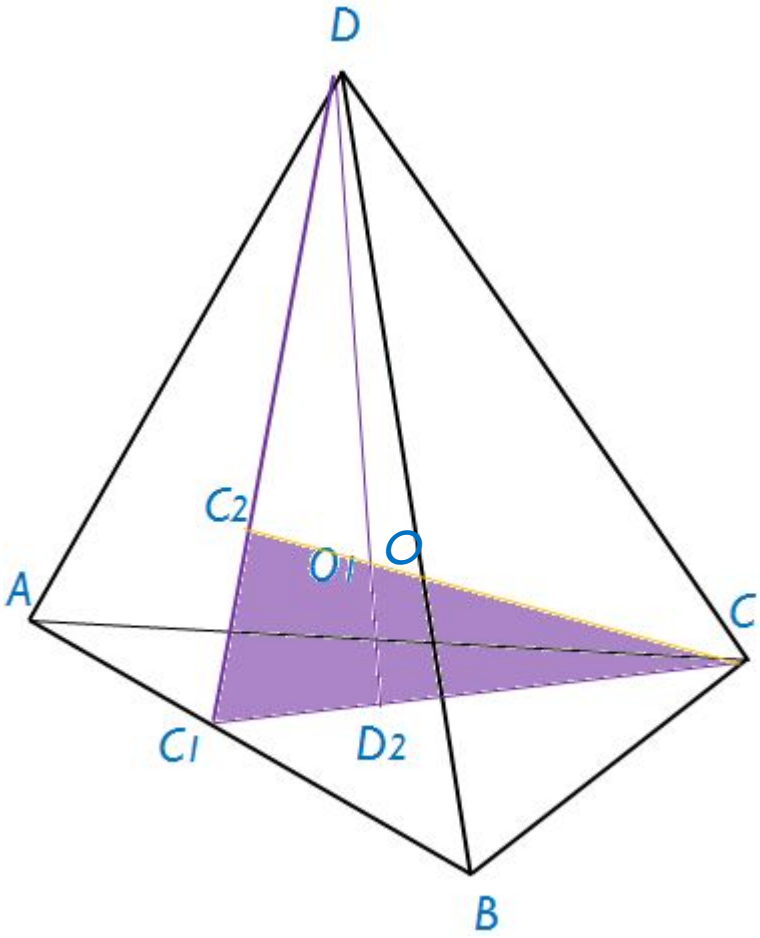
Задача №1

- Для ΔA_1DD_2 и прямой AA_2 по теореме Менелая: $\frac{A_1A_2}{A_2D}\cdot\frac{DO}{OD_2}\cdot\frac{D_2A}{AA_1}=1$
- Так как A_2 – центроид BCD, то $\frac{A_1A_2}{A_2D}=\frac{1}{2}$
- Так как D_2 – центроид ABC, то $\frac{D_2A}{AA_1}=\frac{2}{3}$
- Поэтому $\frac{DO}{OD_2}=\frac{3}{1}$



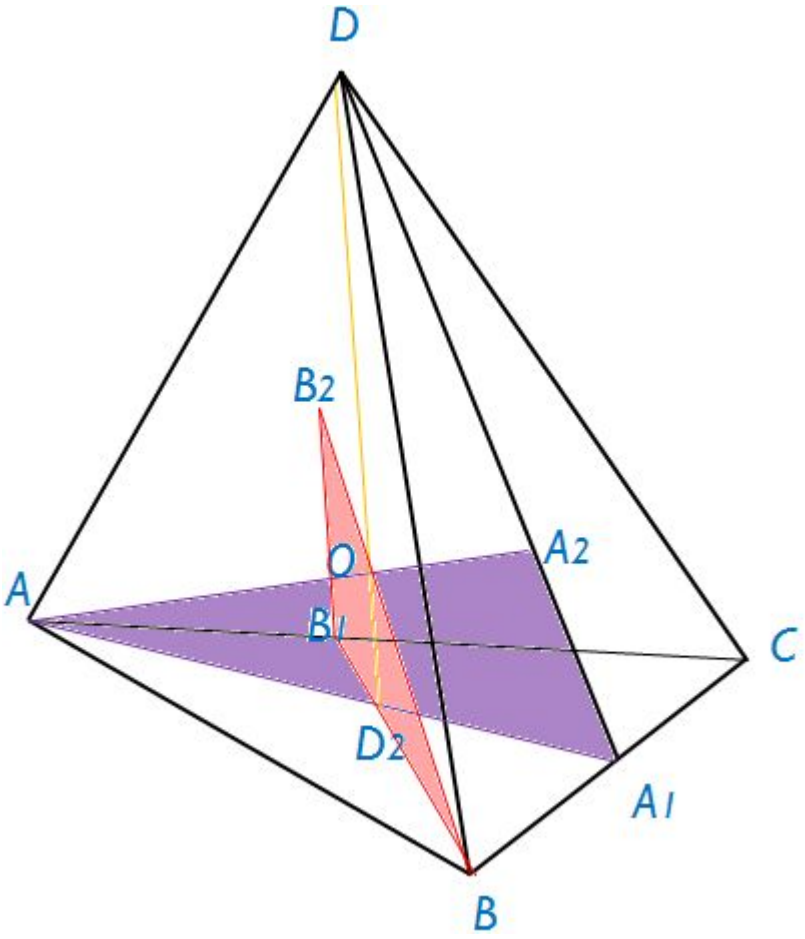
Задача №1

- Проведём теперь медиану CC_1 и отрезок CC_2. Допустим что CC_2 пересекает DD_2 в точке O_1. Докажем что O и O_1 совпадают.
- ΔCC_1C_2 и прямая $DD_2 \Rightarrow CO:OC2=3:1$



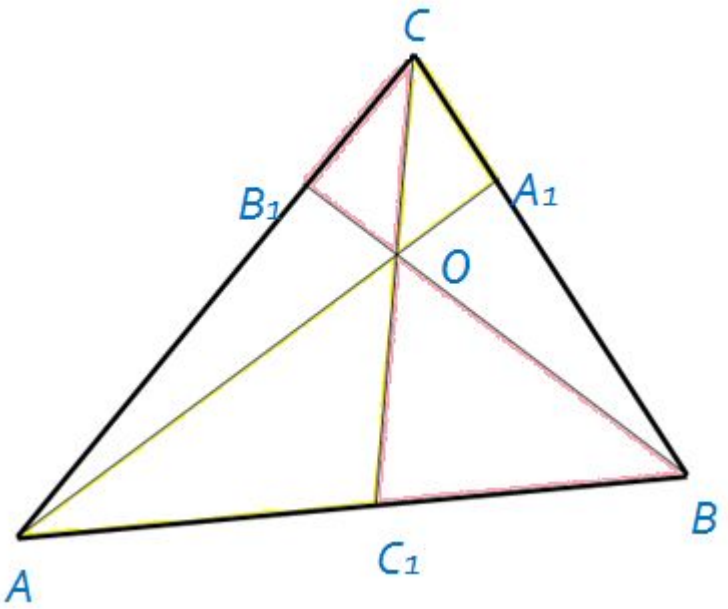
Задача №1

- Аналогично для ΔAA_1A_2 и прямой $DD_2 \Rightarrow AO:OA2=3:1$
- Для ΔBB_1B_2 и прямой $DD_2 \Rightarrow BO:OB_2=3:1$
- ***Замечание:*** *Для правильного тетраэдра его центроид является центром вписанных и описанных шара и сферы.*



Теорема Ван-Обеля

- Пусть на сторонах AB, BC и AC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O, то имеет место равенство



$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$$

Доказательство

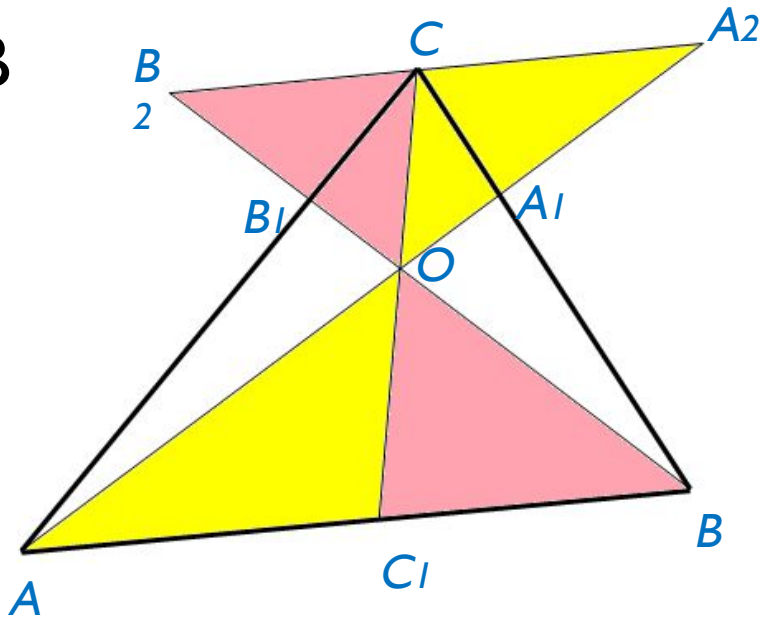
- Построим $A_2B_2 \parallel AB$
- $\Delta OCB_2 \sim \Delta OC_1B$; $\Delta OCA_2 \sim \Delta OC_1A$;
- $\Delta OA_2B_2 \sim \Delta OAB \Rightarrow$

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{OB_2}{OB} = \frac{OA_2}{OA} = \frac{A_2B_2}{AB}$$

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{A_2B_2}{AB} = \frac{A_2C + CB_2}{AB} = \frac{A_2C}{AB} + \frac{CB_2}{AB}$$

- $\Delta A_2CA_1 \sim \Delta ABA_1$; $\Delta CB_2B_1 \sim \Delta ABB_1 \Rightarrow$

$$\frac{A_2C}{AB} = \frac{CA_1}{A_1B}, \frac{CB_2}{AB} = \frac{CB_1}{B_1A}$$



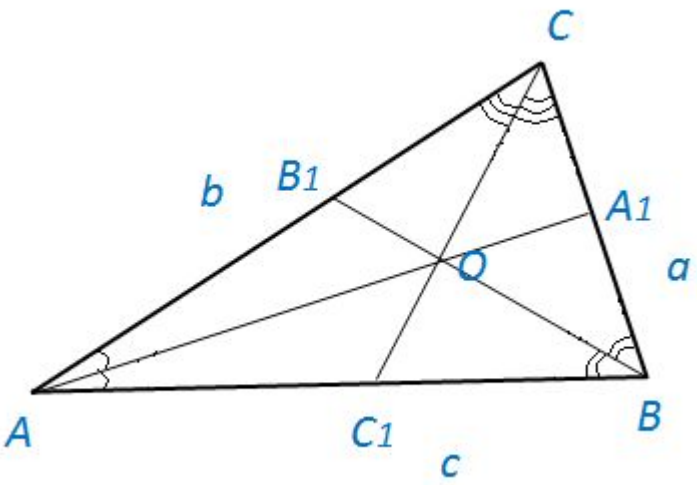
- Следовательно,

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$$

Задача №2

- В каком отношении делятся биссектрисы треугольника точкой их пересечения?

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b}{c}, \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}$$

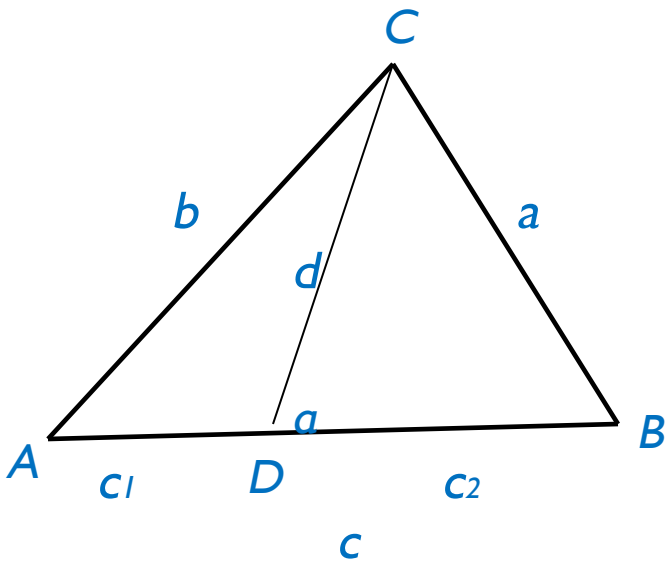


- Поэтому, используя теорему Ван-Обеля находим

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$$

Теорема Стюарта

- Пусть в ΔABC $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, точка D делит сторону AB на отрезки $AD=c_1$, $BD=c_2$; $CD=d$. Тогда имеет место равенство



$$d^2c = a^2c_1 + b^2c_2 - cc_1c_2$$

Доказательство

- Пусть CE – высота в ΔABC. Тогда cosα=DE/d.

$$b^2 = c_1^2 + d^2 + 2c_1DE$$

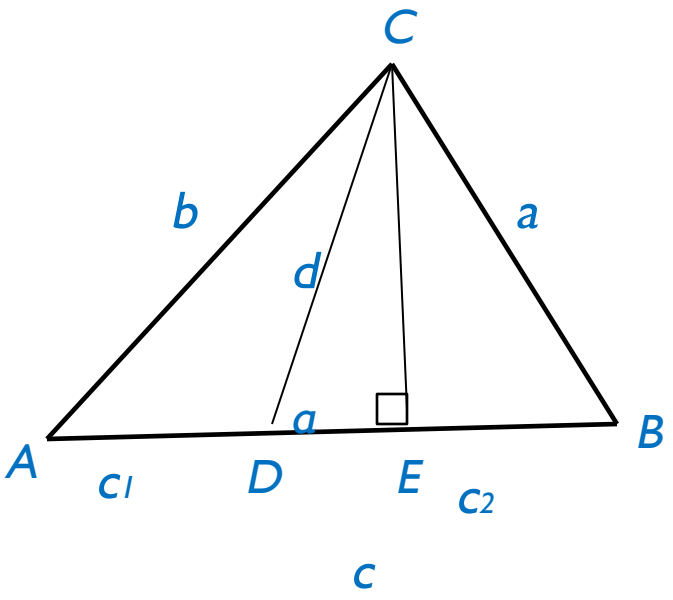
$$a^2 = c_2^2 + d_2 - 2c_2DE$$

- Умножим первое равенство на c_2, второе на c_1 и сложим

$$b^2c_2 + a^2c_1 = (c_1 + c_2)c_1c_2 + d^2(c_1 + c_2)$$

- Из этого получаем

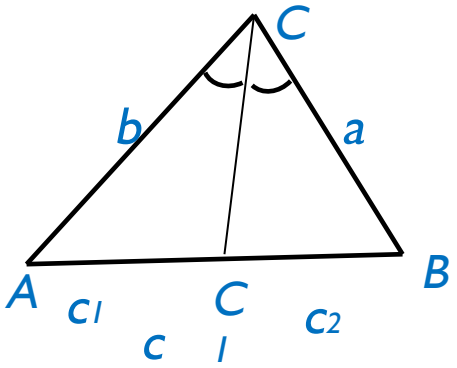
$$d^2c = a^2c_1 + b^2c_2 - cc_1c_2$$



Задача №3

- Вычислить биссектрису CC_1 ΔABC по его сторонам $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.
- Биссектриса CC_1 делит сторону AB на отрезки $AC_1=c_1$ и $BC_1=c_2$. Тогда $c_1+c_2=c$ и $ac_1=bc_2$.

$$c_1 = \frac{bc}{a+b}, c_2 = \frac{ac}{a+b}$$



- Подставим эти равенства в равенство теоремы Стюарта

$$CC_1^2 c = a^2 \cdot \frac{bc}{a+b} + b^2 \frac{ac}{a+b} - c \cdot \frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

- Отсюда

$$CC_1 = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

Спасибо за внимание!

Годы жизни

- Чева Джованни (1648-1734) – итальянский инженер, гидравлик и геометр. Доказал теорему в 1678 году.
- Менелай Александрийский(1 в.) – древнегреческий астроном и математик. Автор работ по сферической тригонометрии. Арабские авторы упоминают также о книге Менелая по гидростатике.
- М. Стюарт (Stewart Matthew 1717-1785) – английский математик, опубликовавший теорему в 1746 в труде «Некоторые общие теоремы».