



# Некоторые именные теоремы о треугольниках

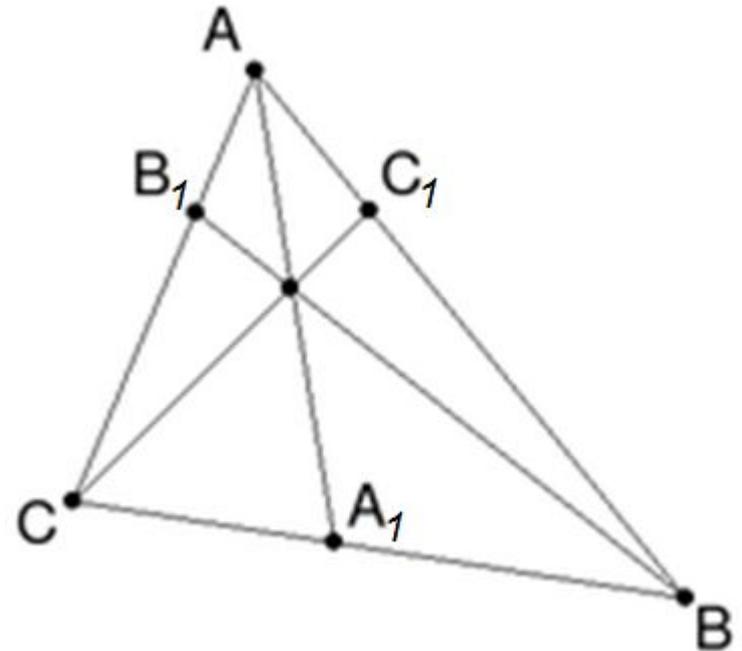
Борд Лиза 10М

Учитель: Муравьёва Анна Петровна

# Теорема Чебы

- Три чевианы  $AA_1, BB_1, CC_1$  треугольника проходят через одну точку тогда и только тогда, когда

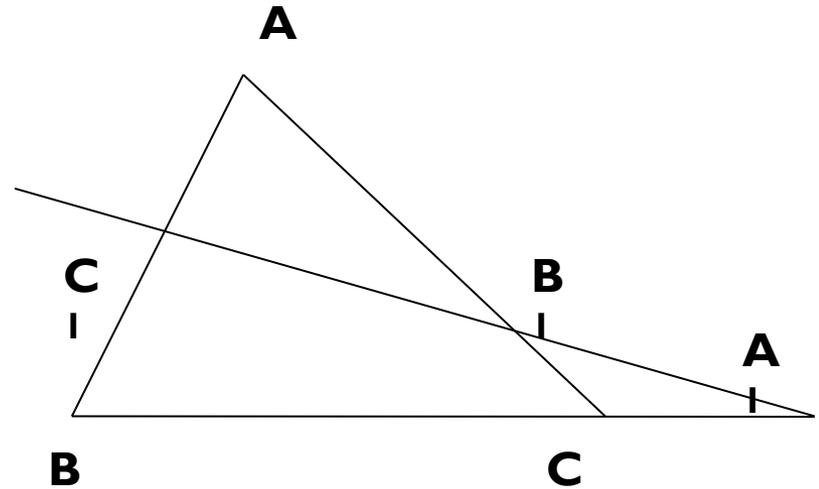
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$



# Теорема Менелая

- Если точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат соответственно на прямых  $BC, CA$  и  $AB$  треугольника или на их продолжениях, то они лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



# Задача №1

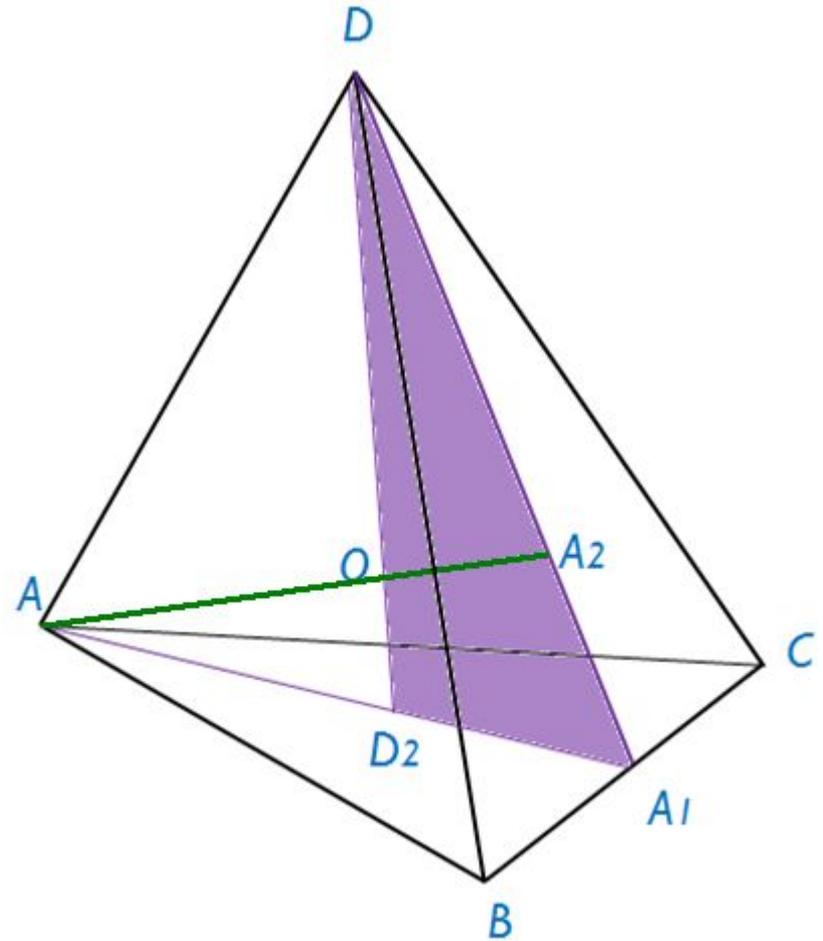
- Доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 3:1, считая от вершин.

# Задача №1

- Для  $\triangle A_1DD_2$  и прямой  $AA_2$  по теореме

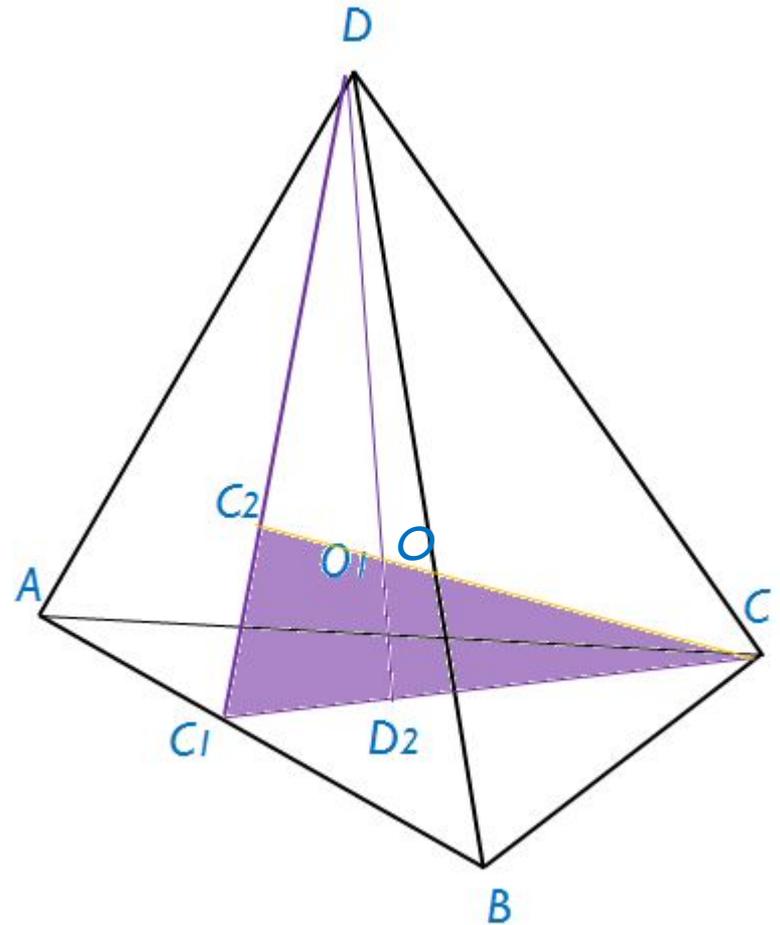
Менелая: 
$$\frac{A_1A_2}{A_2D} \cdot \frac{DO}{OD_2} \cdot \frac{D_2A}{AA_1} = 1$$

- Так как  $A_2$  – центроид  $B_1CD_1$ , то  $\frac{A_1A_2}{A_2D} = \frac{1}{2}$
- Так как  $D_2$  – центроид  $ABC$ , то  $\frac{D_2A}{AA_1} = \frac{2}{3}$
- Поэтому  $\frac{DO}{OD_2} = \frac{3}{1}$



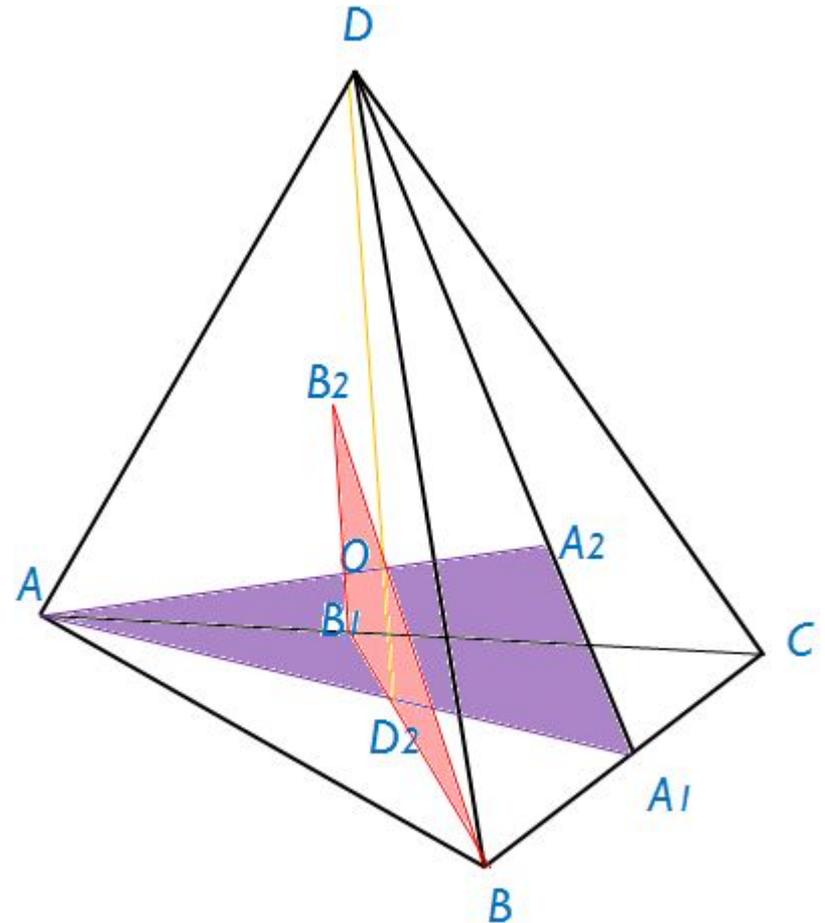
# Задача №1

- Проведём теперь медиану  $CC_1$  и отрезок  $CC_2$ . Допустим что  $CC_2$  пересекает  $DD_2$  в точке  $O_1$ . Докажем что  $O$  и  $O_1$  совпадают.
- $\triangle CC_1C_2$  и прямая  $DD_2 \Rightarrow CO:OC_2=3:1$



# Задача №1

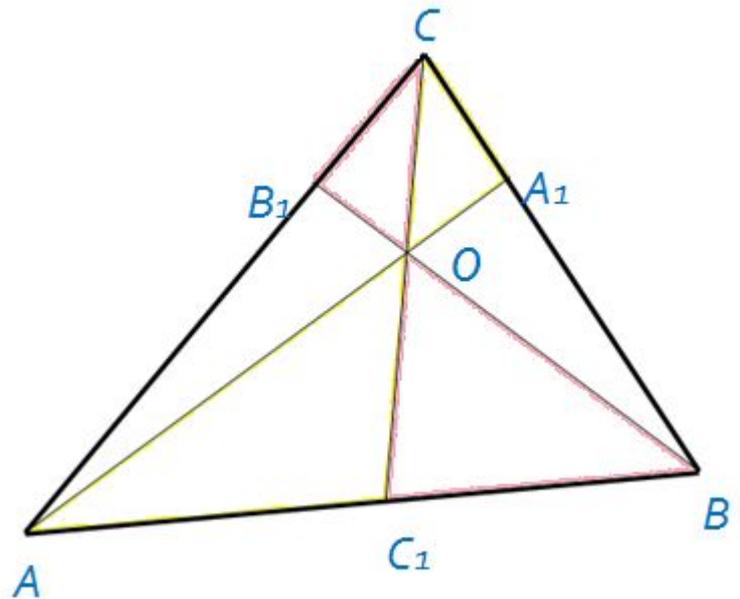
- Аналогично для  $\triangle AA_1A_2$  и прямой  $DD_2 \Rightarrow AO:OA_2=3:1$
- Для  $\triangle BB_1B_2$  и прямой  $DD_2 \Rightarrow BO:OB_2=3:1$
- **Замечание:** Для правильного тетраэдра его центроид является центром вписанных и описанных шара и сферы.



# Теорема Ван-Обеля

- Пусть на сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  взяты соответственно точки  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$ . Если прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ , то имеет место равенство

$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$$





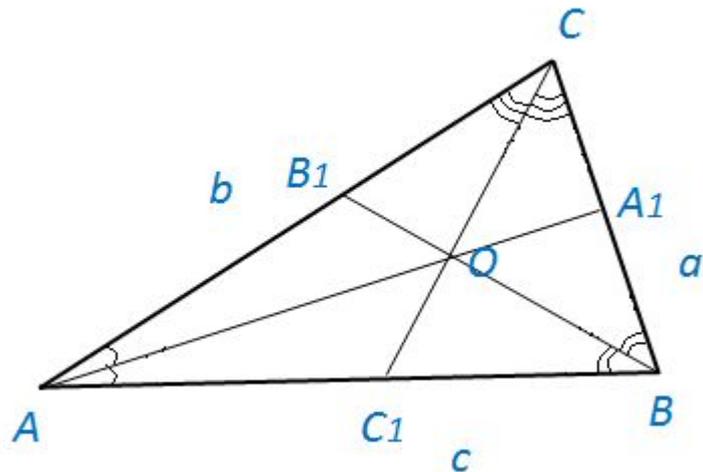
## Задача №2

- В каком отношении делятся биссектрисы треугольника точкой их пересечения?

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b}{c}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a}{c}$$

- Поэтому, используя теорему Ван-Обеля находим

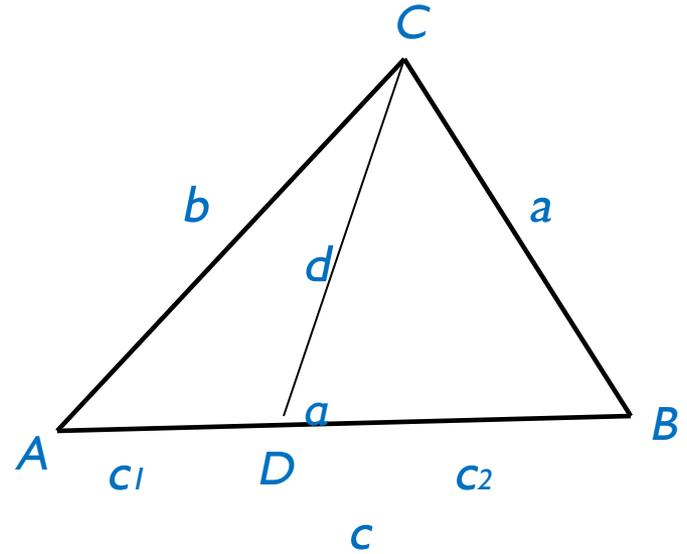
$$\frac{CO}{OC_1} = \frac{a+b}{c}$$



# Теорема Стюарта

- Пусть в  $\triangle ABC$   $AB=c$ ,  $BC=a$ ,  $AC=b$ , точка  $D$  делит сторону  $AB$  на отрезки  $AD=c_1$ ,  $BD=c_2$ ;  $CD=d$ . Тогда имеет место равенство

$$d^2 c = a^2 c_1 + b^2 c_2 - c c_1 c_2$$



# Доказательство

- Пусть  $CE$  – высота в  $\triangle ABC$ .  
Тогда  $\cos \alpha = DE/d$ .

$$b^2 = c_1^2 + d^2 + 2c_1DE$$

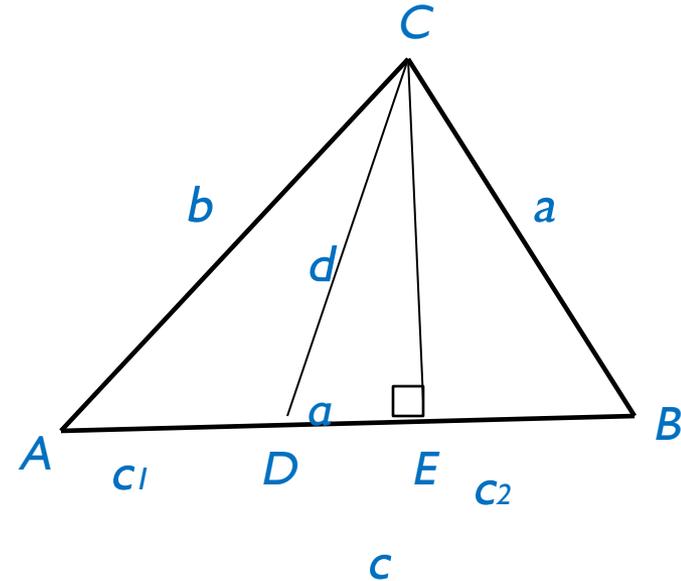
$$a^2 = c_2^2 + d^2 - 2c_2DE$$

- Умножим первое равенство на  $c_2$ , второе на  $c_1$  и сложим

$$b^2c_2 + a^2c_1 = (c_1 + c_2)c_1c_2 + d^2(c_1 + c_2)$$

- Из этого получаем

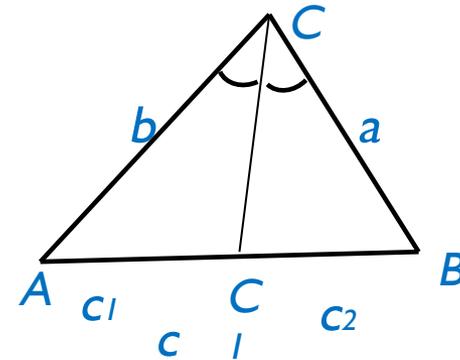
$$d^2c = a^2c_1 + b^2c_2 - cc_1c_2$$



# Задача №3

- Вычислить биссектрису  $CC_1$   $\triangle ABC$  по его сторонам  $AB=c$ ,  $AC=b$ ,  $BC=a$ .
- Биссектриса  $CC_1$  делит сторону  $AB$  на отрезки  $AC_1=c_1$  и  $BC_1=c_2$ . Тогда  $c_1+c_2=c$  и  $ac_1=bc_2$ .

$$c_1 = \frac{bc}{a+b}, c_2 = \frac{ac}{a+b}$$



- Подставим эти равенства в равенство теоремы Стюарта

$$CC_1^2 c = a^2 \cdot \frac{bc}{a+b} + b^2 \frac{ac}{a+b} - c \cdot \frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

- Отсюда

$$CC_1 = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}$$

**Спасибо  
за  
внимание!**

# Годы жизни

- Чева Джованни (1648-1734) – итальянский инженер, гидравлик и геометр. Доказал теорему в 1678 году.
- Менелай Александрийский (I в.) – древнегреческий астроном и математик. Автор работ по сферической тригонометрии. Арабские авторы упоминают также о книге Менелая по гидростатике.
- М. Стюарт (Stewart Matthew 1717-1785) – английский математик, опубликовавший теорему в 1746 в труде «Некоторые общие теоремы».