Классическая вероятность

Использование комбинаторных формул для вычисления вероятности

История

- Возникла в 17 веке.
- Первые работы по теории вероятностей, принадлежащие французским учёным Б. Паскалю и П. Ферма, и голландскому учёному Х. Гюйгенсу, появились в связи с подсчётом различных вероятностей в азартных играх. Крупный успех теории вероятностей связан с именем швейцарского математика Я. Бернулли, установившего закон больших чисел для схемы независимых испытаний с двумя исходами (опубликовано в 1713).

Б. Паскаль

П. Ферма

Х. Гюйгенс

Я. Бернулли

- В 18 веке французский естествоиспытатель Жорж Луи де Бюффон(2048 из 4040) и в начале 20 века английский математик Карл Пирсон(12012 из 24000) проводили эксперименты с монетой.

Карл Пирсон

Жорж де Бюффон

- В 18 и начале 19 веках теория вероятностей находит ряд весьма актуальных применений в естествознании и технике (главным образом в теории ошибок наблюдений, развившейся в связи с потребностями геодезии и астрономии, и в теории стрельбы).
- Со 2-й половины 19 в. исследования по теории вероятностей в России занимают ведущее место в мире.

Основные понятия

- **Случайное событие** — это событие, которое может произойти, а может и не произойти в процессе наблюдения или эксперимента в одних и тех же условиях.
- **Равновозможные события** – это события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ в появлении чаще других при многократных экспериментах, проводимых в одинаковых условиях.
- **Достоверные события** – это события, которые при нормальных условиях всегда выполняются обязательно.
- **Невозможные события** – это события, которые в данных условиях никогда не происходят.
- **Случайные эксперименты** – это различные эксперименты, опыты, испытания, наблюдения, измерения, результаты которых зависят от случая и которое можно повторить много раз в одинаковых условиях. (Все события прописываются буквами латинского алфавита A,B,C,D…)

- Если при неизменных условиях случайный эксперимент проведен n раз и в n(A) случаях произошло событие A, то число n(A) называется **частотой события** A.
- **Относительная частота случайного события** – это отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов.

$$\frac{n(A)}{n}$$

- Если при проведении большого количества случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A, значение относительной частоты события A близко к некоторому определенному числу, то это число называется **вероятностью случайного события** A. Вероятность события обозначается P. (статистическое определение вероятности)
- Событие B называется **противоположным** событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

- Учитывая, что в каждом эксперименте происходит одно и только одно из событий: ИЛИ A, или B, то n(A)+ n(B)= n.

Тогда

$$\frac{n(A)}{n}+\frac{n(B)}{n}=\frac{n}{n}=1$$

Рассмотренные эксперименты являются статистически стойкими, поэтому при больших значения n относительные частоты события A и события B практически совпадают с вероятностями этих событий P(A)+P(B)=1

- *Зная вероятность события, мы можем прогнозировать частоту его появления в будущем при большом количестве соответствующих экспериментов.*

Замечание!

Если при проведении большого числа случайных экспериментов значения относительной частоты случайного события близки к некоторому определенному числу, то говорят, что относительная частота имеет **статистическую устойчивость**, а такие случайные эксперименты называют **статистически устойчивым**.

Чем больше число проведенных случайных экспериментов, тем ближе значение относительной частоты случайного события к вероятности этого события.

Число экспериментов	10	20	30	50	100	200	500	1000	2000
Число падений кнопки острием вниз(частота)	**5**	**9**	**14**	**22**	**45**	**92**	**226**	**450**	**909**
Относительная частота падения кнопки острием вниз	**0,5**	**0,45**	**0,47**	**0,44**	**0,45**	**0,46**	**0,45**	**0,45**	**0,45**

- По данным таблицы можно сделать вывод, что вероятность падения кнопки острием вниз приблизительно равна 0,45 или 45%
- Вероятность достоверного события равна 1: $P(U)=1$
- Вероятность невозможного события равна 0: $P(\varnothing)=0$

Т.о. вероятность любого события А может принимать любые значения от 0 до 1.

Примеры решения задач

- **В пакете лежат 20 зеленых и 10 желтых груш. Какова вероятность вынуть из пакета грушу?(1) Какова вероятность вынуть из пакета яблоко? (0)**
- **В классе из 30 учеников, где 17 мальчиков и 13 девочек, наугад выбирается один. Какова вероятность того, что это мальчик?**

Решение:

Обозначим через А событие: наугад выбранный ученик – мальчик. Число благоприятных событию А исходов равно 17, т.е. m=17 , а число всех исходов равно 30, т.е. n=30, поэтому P(A)=17/30.

- **Какова вероятность события А – наугад названное число из натуральных чисел от 5 до 28 кратно 5?**

Решение:

Множество исходов, благоприятных событию А: {5;10;15;20;25}, т.е. m=5, а всего чисел от 5 до 28 имеется 24, т.е. n=24, поэтому P(A)=5/24.

- **Из ящика, в котором a белых, b красных и c черных шаров, наугад вытащили шар. Какова вероятность того, что выбранный шар оказался черным?**

Решение:

Пусть событие А – наугад вытащеный шар оказался черным. Число благоприятных событию А исходов равно c, т.е. m=c, всего шаров n=a+b+c, а значит, P(A)=c/(a+b+c).

- **Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру. Найти вероятность того что, номер набран верно(событие А), если известно, что цифра нечетная.**

Решение:

Нечетные цифры – 1,3,5,7,9, значит, n=5, m=1, P(A)= $\frac{1}{5}$.

- **Игральный кубик подбрасывают один раз. Найти вероятность следующих событий:**

  а)Выпадает 1(событие А);б)выпадает больше 3 очков (В);

  в)выпадет не больше 4 очков (С); г)число выпавших очков будет квадратом натурального числа(D).

  Решение:

  Всего при этом испытании возможно выпадение шести цифр, определяющих число выпавших очков, - 1,2,3,4,5,6, т.е. n=6.

  а)Множество исходов, благоприятных событию А : Р(А)=1/6;

  б) Множество исходов, благоприятных событию В : Р(В)=3/6=1/2;

  в) Множество исходов, благоприятных событию С : Р(С)=4/6=2/3;

  г) Множество исходов, благоприятных событию D : Р(D)=2/6=1/3.

- **Бросают три монеты. Какова вероятность следующих событий: А – гербов больше, чем цифр, В – выпало две цифры, С – выпало 3 герба, Д – три монета выпали одинаковыми сторонами, Е - цифр не больше одной?**

Решение:

Рассмотрим все возможные варианты выпадения монет: (ГГГ), (ГГЦ), (ЦГГ), (ГЦГ), (ЦЦГ), (ЦГЦ), (ГЦЦ), (ЦЦЦ).

Событие А : n=8; m=4; P(A)=4/8=1/2;

Событие В : n=8; m=3; P(B)=3/8;

Событие С : n=8; m=1; P(C)=1/8;

Событие Д : n=8; m=2; P(D)=2/8=1/4;

Событие Е : n=8; m=4; P(E)=4/8=1/2.

- **Набор для игры в домино имеет 28 костей. Наугад берут 2 кости. Они оказываются не дублями. Найти вероятность следующих событий:**

  а) третья, наугад взятая кость оказалась дублем (событие А);

  б) третья, наугад взятая кость оказалась не дублем (событие В).

  Решение:

  Было 28 костей, две забрали, значит n=26

  а)Дублей всего 7 костей, а именно (0;0) (1;1) (2;2) (3;3) (4;4) (5;5) и (6;6). Значит m=7, поэтому P(A)=7/26;

  б)Так как дублей 7, то недублей 26-7=19 m=19. P(B)=19/26.

Примеры решения задач с использованием комбинаторных формул

- **На карточках написаны буквы у, ч, р, а, к. Какова вероятность того, что, переставляя наугад все буквы, мы получим слово «ручка»(событие А) ?**

Решение:

Множество букв состоит из пяти элементов, используются все элементы, значит, $n=P_5$; $m=5!$

Из всех получаемых «слов» нас утраивает только одно, значит, $m=1$, т.е. $P(A)=1/5!=1/120$.

$$\frac{n(A)}{n}+\frac{n(B)}{n}=\frac{n}{n}=1$$

- Замок с «секретом» содержит четыре шестигранные призмы, которые поворачиваются независимо друг от друга вокруг общей оси. На каждой боковой грани призмы выбита одна цифра от 1 до 6. Поворачивая призмы, получают в прорези замка четырехзначное число. Замок открывается лишь тогда, когда набрано четырехзначное число, составляющее «секрет» замка. Какова вероятность того, что один человек, не знающий «секрета» замка, откроет его за один произвольный набор четырехзначного числа(событие А)?

Решение:

$m=1$; $n=6^4$, т.к. в каждом из четырех окошек может оказаться любая из шести цифр.

$$P(A)=\frac{1}{6^4}=\frac{1}{1296}\approx 0,0008$$

- *Номер телефона составлен из семи цифр. Какова вероятность того, что все цифры в номере разные?*

Решение:

На каждом из семи мест номера может стоять любая из 10 цифр, т.е. число всех возможных номеров $n = \overline{A}_{10}^{7}$ *(считаем, что номер может начинаться с 0).*

Теперь вычислить число благоприятных событию В (все цифры в номере разные) исходов: из 10 возможных цифр выбираются 7 разных, значит, это размещение без повторений(используется не все множество цифр, и порядок элементов в номере важен). Значит, $m = A_{10}^{7}$

$$P(A) = \frac{C_4^1 * C_4^1 * C_4^1}{C_{52}^3} = \frac{4*4*4*3!}{52*51*50} = \frac{16}{5525}$$

- **В колоде 52 карты. Игрок наугад получает 3 карты. Какова вероятность того, что это будет тройка, семерка и туз (событие А)?**

Решение:

Всего возможных вариантов $n = C_{52}^{3}$ *. Получить одну тройку из четырех карт (троек) колоды существует* C_4^1 *способов, одну семерку -* C_4^1 *способов и туз -* C_4^1 *способов, итого благоприятных исходов* $C_4^1 * C_4^1 * C_4^1$ *.*

$$P(A) = \frac{C_{365}^{30}}{365^{30}}$$

- **Все 30 учеников класса родились в 1992 году. Какова вероятность того, что все ученики этого класса родились в разные дни этого года?**

Решение:

В 1992 году 365 дней, т.к. год невисокосный, т.е. любой из 30 учеников может иметь день рождения в любой из 365 дней года, т.е. n=365^{30}

Пусть событие А – все ученики этого класса родились в разные дни. Число благоприятных событию А исходов $m = C_{365}^{30}$, т.к. с точки зрения стороннего наблюдателя все равно, кто родился и в какой день.

$$P(A) = \frac{C_{365}^{30}}{365^{30}}$$

- **Из колоды в 36 карт наугад выбирают 6 карт. Какова вероятность того, что среди этих 6 карт окажутся 2 туза, 2 короля и 2 дамы любой масти (событие А)?**

Решение:

В выборе 6 карт из 36 порядок выбора значения не имеет и используется не все множество карт, значит,

$n = C_{36}^{6}$ Выбрать 2 туза из 4 находящихся в колоде можно C_4^2 способами, королей - C_4^2 способами, а дам - C_4^2 способами. По правилу произведения $m = C_4^2 * C_4^2 * C_4^2$

$$P(A) = \frac{C_4^2 * C_4^2 * C_4^2}{C_{36}^{6}} = \frac{4*3*4*3*4*3*6*5*4*3*2}{2!*2!*2!*36*35*34*33*32*31} =$$

$$= \frac{9}{17*7*11} \approx 0{,}007$$

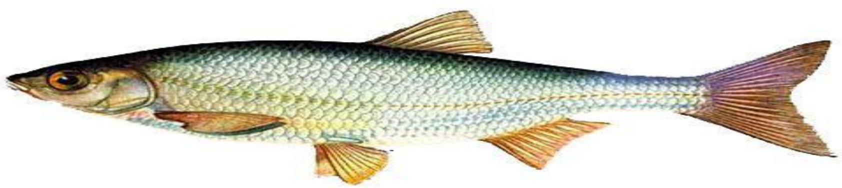
Тесты

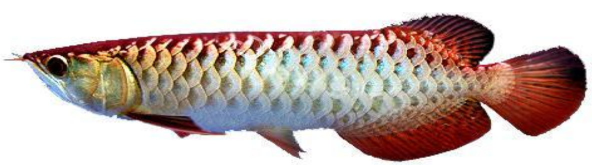
Какая вероятность того, что наугад названное натуральное число будет отрицательным?

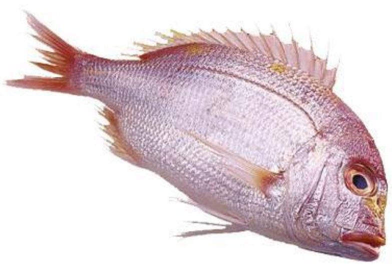
- А) -1
- Б) -0,5
- В) 0
- Г) 0,5
- Д) 1

Господин Коцкий одним утром поймал 10 маленьких, 15 средних и 15 больших рыбин. Какая вероятность того, что при случайном выборе одной рыбины он НЕ возьмет большой рыбины?

- А) 0,25
- Б) 0,5
- В) 0,75
- Г) 0,625
- Д) 0,875







Подбрасывают три одинаковые симметричные монеты. Рассматриваются события:

A **- гербов выпало больше, чем цифр;**

B **- выпали одни цифры;**

C -Три монеты выпали одинаковыми сторонами;

D -гербов выпало не больше чем один.

Выберите правильное равенство.

- А) P(A)=P(B)
- Б) P(A)=P(C)
- В) P(A)=P(D)
- Г) P(B)=P(C)
- Д) P(B)=P(D)

Подбрасывают два игральных кубика. Пусть *a,Ь, c*- вероятности того, что сумма очков, которые выпадут на этих кубиках после эксперимента, равняется соответственно 3, 6, 12. Упорядочите эти величины за ростом.

- А) c<b<a
- Б) c<a<b
- В) a<b<c
- Г) a<c<b
- Д) b<a<c

Сергей обещал позвонить по телефону Степану с 16.00 до 18.00 какой-будет наугад выбранный момент времени. Найдите вероятность того, что Степан услышит звонок друга, если известно, что в I7.30 он должны выключить телефон.

- А) 0,25
- Б) 0,3
- В) 0,5
- Г) 0,6
- Д) 0,75

На праздничном столе стоит две вазы с конфетками «Белочка» и «Красный мак», причем в первом вазе 60 «Белочек» и 40 «Красных маков», а на второй - 30 «Белочек» и 70 «Красных маков». Две подружки наугад берут по одной конфете с разных ваз. Какая вероятность того, что они возьмут конфетки РАЗНЫХ

видов?

- А) 0,4
- Б) 0,48
- В) 0,5
- Г) 0,54
- Д) 0,7

Задача Блеза Паскаля. Два одинаково ловкие игроки (вероятности выигрыша каждого равняют 0,5) играют в игру, которая не предусматривает ничейного результата. Они сделали одинаковые ставки по 50 о.у.е. (очень условных единиц) и договорились, что тот, кто первый выиграет 10 партий, получит все деньги. Однако вследствие форс-мажорных обстоятельств игру пришлось прекратить со счетом 9:8 в пользу первого игрока. Каким образом игроки должны разделить поставленные средства, если это распределение происходит пропорционально вероятности ДАЛЬНЕЙШЕГО выигрыша 10 партий?

- А) 100о.у.е.-первому игроку и 0о.у.е.-другому
- Б) 75о.у.е.-первому игроку и 25о.у.е.-другому
- В) 66,5о.у.е.-первому игроку и 33,5о.у.е.-другому
- Г) 90о.у.е.-первому игроку и 10о.у.е.-другому
- Д) 50о.у.е.-первому игроку и 50о.у.е.-другому

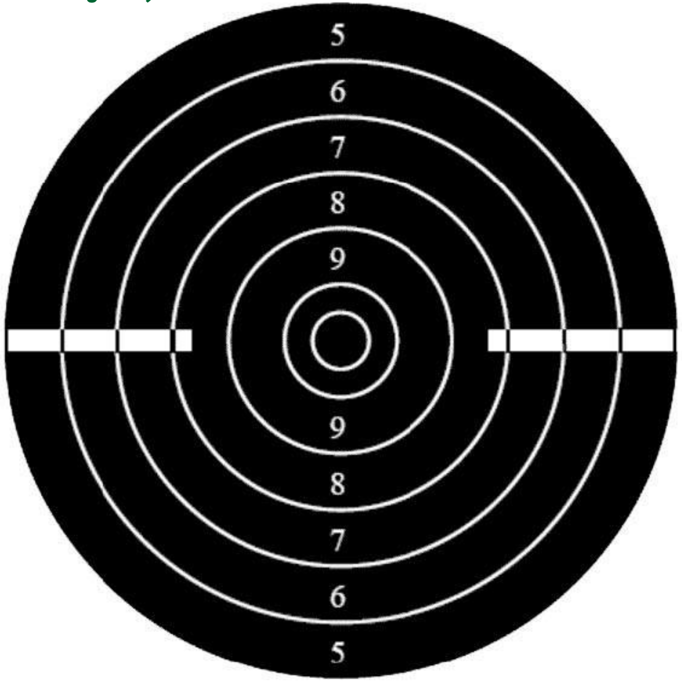
Лисичка-сестричка, Волчок-Братец,Зайчик-Попрыгайчик и Ежик-Колючка одним утром нашли на лесной лужайке забытые кем-то весы. После коллективного взвешивания всех четырех зверьков выяснилось, что их средняя масса равняется 12 кг. Умник Зайчик также заметил, что если бы он не брал участия во взвешивании, то средняя масса Лисички, Волчка и Ежика равнялась бы 14 кг. Какая масса Зайчика?

- А) 4 кг
- Б) 4,5 кг
- В) 5 кг
- Г) 6 кг
- Д) 7,5 кг

Группа из 10 школьников во время летних каникул находилась в спортивном лагере. После окончания смены было зафиксировано следующее увеличение роста этих школьников (в сантиметрах): 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, С, С, 4. На сколько сантиметров в среднем увеличился рост школьников этой группы?

- А) 2 см
- Б) 2,1 см
- В) 2,2 см
- Г) 2,3 см
- Д) 2,4 см

По мишени, которая состоит из 5 концентрических кругов (радиусы кругов равняются 1, 3, 4, 5 и 7 соответственно), осуществляют выстрел наугад. Найдите вероятность того, что дротик, который попал в мишень, попал в центральный круг («десятку»).



- А) 0,2
- Б) 0,15
- В) 0,02
- Г) 0,1
- Д) 0,01

По условию предыдущей задачи найдите вероятность того, что дротик попал в верхнюю ПОЛОВИНУ кольца между кругами с радиусами 3 и 4.

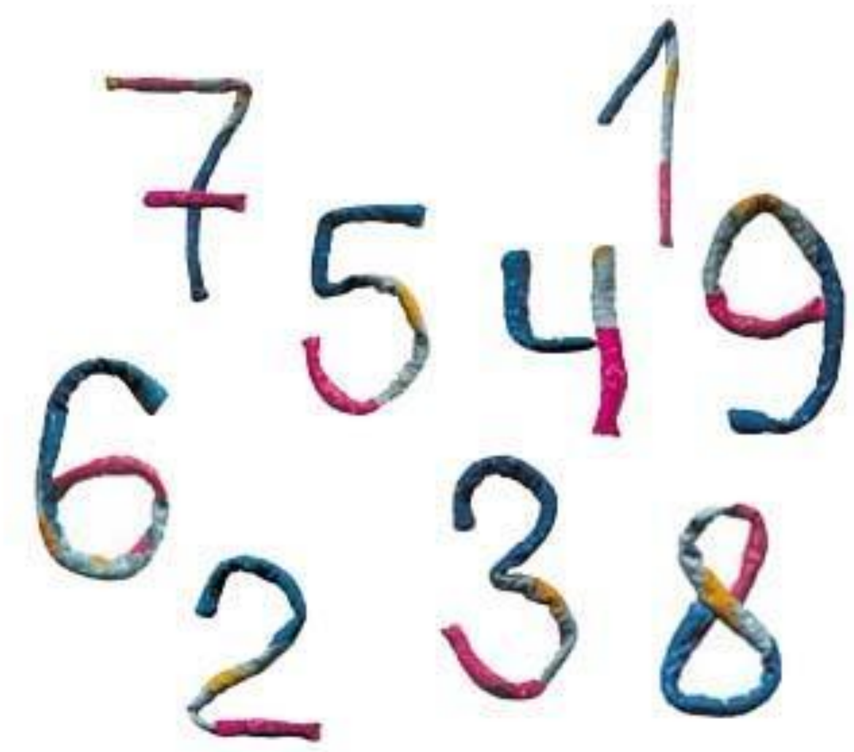
- А) 0,125
- Б) 0,1
- В) 0,08(3)
- Г) 0,0(71428)
- Д) 0,0625

На каждой из четырех одинаковых карточек написана одна из букв Т, Т, С, Е. Какова вероятность того, что карточки, наугад разложенные в строке, образуют слово ТЕСТ?

- А) 0,25
- Б) 0,1(6)
- В) 0,041(6)
- Г) 0,5
- Д) 0,08(3)

Какая вероятность того, что наугад названное двузначное натуральное число будет состоять из одинаковых чисел?

- А) 0,1
- Б) 0,(10)
- В) 0,09
- Г) 0,(1)
- Д) 0,(09)



Если ответ в предыдущей задаче дать наугад, то какой будет вероятность НЕ угадать правильный ответ?

- А) 10%
- Б) 20%
- В) 50%
- Г) 75%
- Д) 80%

Владелец банкоматной карточки забыл последние две цифры своего PIN-Кода, но помнит, что они разные. Найдите вероятность того, что набрав эти цифры наугад, он получит доступ к системе с первого раза.

- А) 0,0(1)
- Б) 0,02
- В) 0,5
- Г) 0,04
- Д) 0,01

ОТВЕТЫ

1-В
2-Г
3-В
4-Б
5-Д
6-Г
7-Б
8-Г
9-В
10-В
11-Г
12-Д
13-А
14-Д
15-А

НЕПРАВИЛЬНО

- Назад