

Геометрия



Решения треугольников

Содержание

Нажатием мышки выберите нужную тему.

Теорема косинусов

Теорема синусов

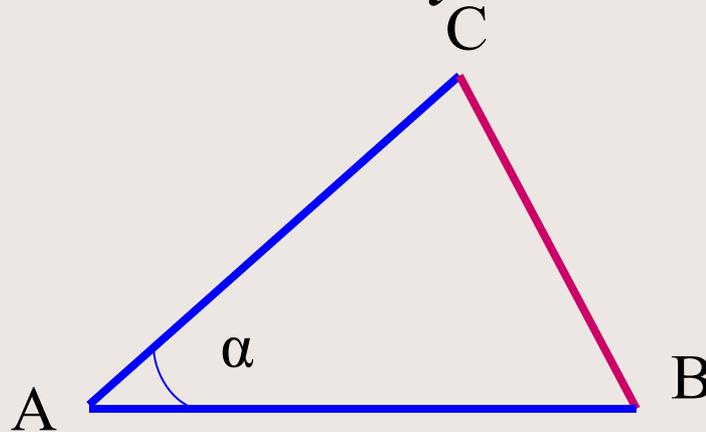
Соотношение между углами треугольника и
противолежащими сторонами

Решения треугольников

Тест

Теорема косинусов

Теорема 1. *Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*

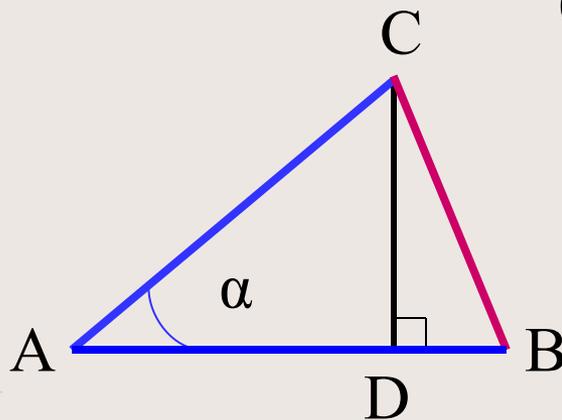


$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$



Теорема косинусов

Следствие



Угол α - острый

CD – высота

AD – проекция стороны AC на сторону AB.

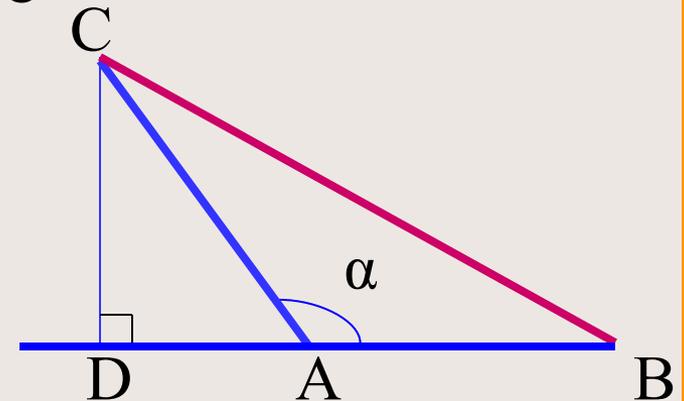
$$\cos \alpha = AD/AC$$

$$AD = AC \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD$$

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «+» удвоенное произведение одной из них на проекцию другой.

Знак «+» надо брать, когда противолежащий угол тупой, а знак «-», когда угол острый.



Угол α - тупой

CD – высота

AD – проекция стороны AC на продолжение стороны AB.

$$\cos (180 - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos (180 - \alpha) = AD / AC = -\cos \alpha$$

$$AD = -AC \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AD$$



Теорема косинусов

Решение задач - пример № 1.

Дано:

$$AC = 5 \text{ м}$$

$$AB = 6 \text{ м}$$

$$\cos \alpha = 0,6$$

Найти:

$$BC - ?$$

Решение:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

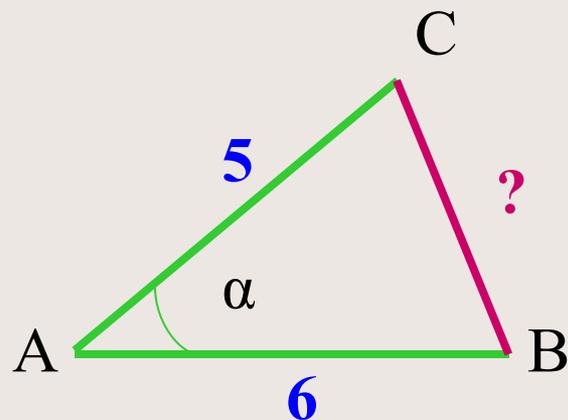
$$BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 0,6$$

$$BC^2 = 36 + 25 - 36$$

$$BC^2 = 25$$

$$BC = \sqrt{25}$$

$$BC = 5$$



Ответ: 5 м.



Теорема косинусов

Решение задач - пример № 2.

Дано:

$$AC = 5 \text{ м}$$

$$AB = 6 \text{ м}$$

$$BC = 7 \text{ м}$$

Найти:

$$\cos \alpha - ?$$

Решение:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

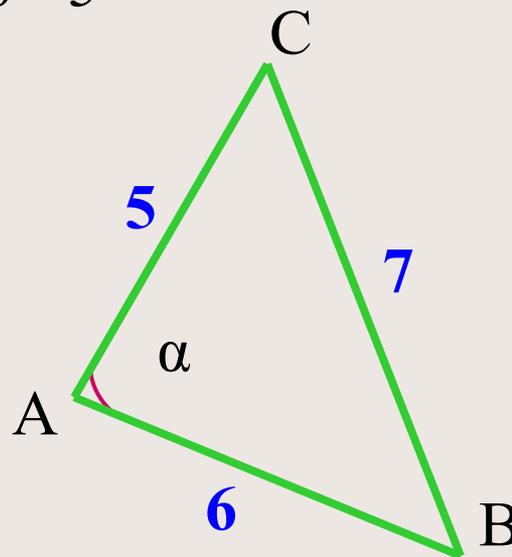
$$\cos \alpha = (AB^2 + AC^2 - BC^2) / 2AB \cdot AC$$

$$\cos \alpha = (6^2 + 5^2 - 7^2) / 2 \cdot 6 \cdot 5$$

$$\cos \alpha = (36 + 25 - 49) / 60$$

$$\cos \alpha = 0,2$$

Ответ: 0,2 .



Теорема косинусов

Решение задач - пример № 3.

Дано:

$$BC = 4 \text{ м}$$

$$AC = 5 \text{ м}$$

$$AB = 6 \text{ м}$$

Найти:

$$AD - ?$$

$$BD - ?$$

Решение:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AD$$

$$AD = (AB^2 + AC^2 - BC^2) / 2AB$$

$$AD = (6^2 + 5^2 - 4^2) / 2 \cdot 6$$

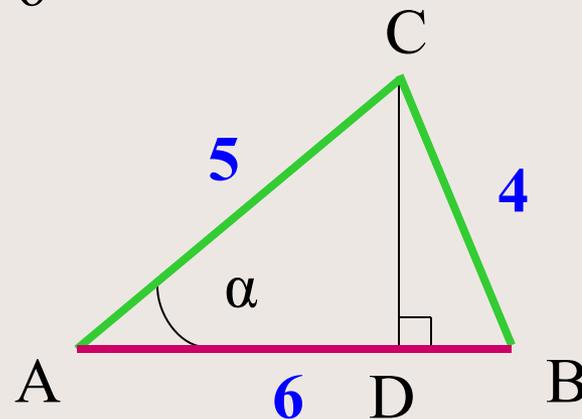
$$AD = (36 + 25 - 16) / 12$$

$$AD = 3,75$$

$$BD = AB - AD$$

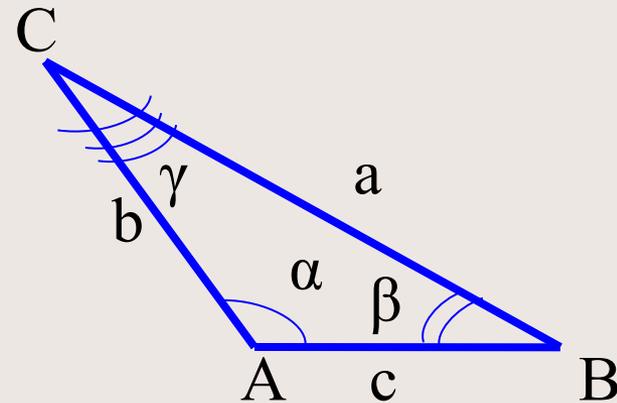
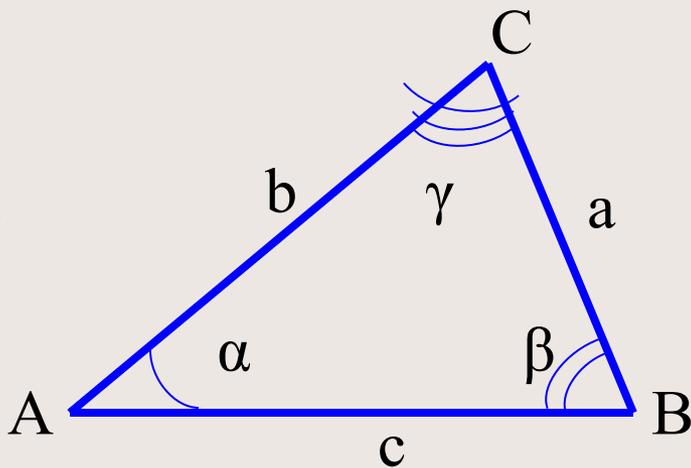
$$BD = 6 - 3,75 = 2,25$$

Ответ: $AD = 3,75 \text{ м}$; $BD = 2,25 \text{ м}$.



Теорема синусов

Теорема 2. *Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.*



! $a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\gamma$ **!**



Теорема синусов

Решение задач - пример № 1.

Дано:

□ ABC

AC = b

∠ α, ∠ γ

точка B

недоступна

Решение:

$$b / \sin \beta = AB / \sin \gamma$$

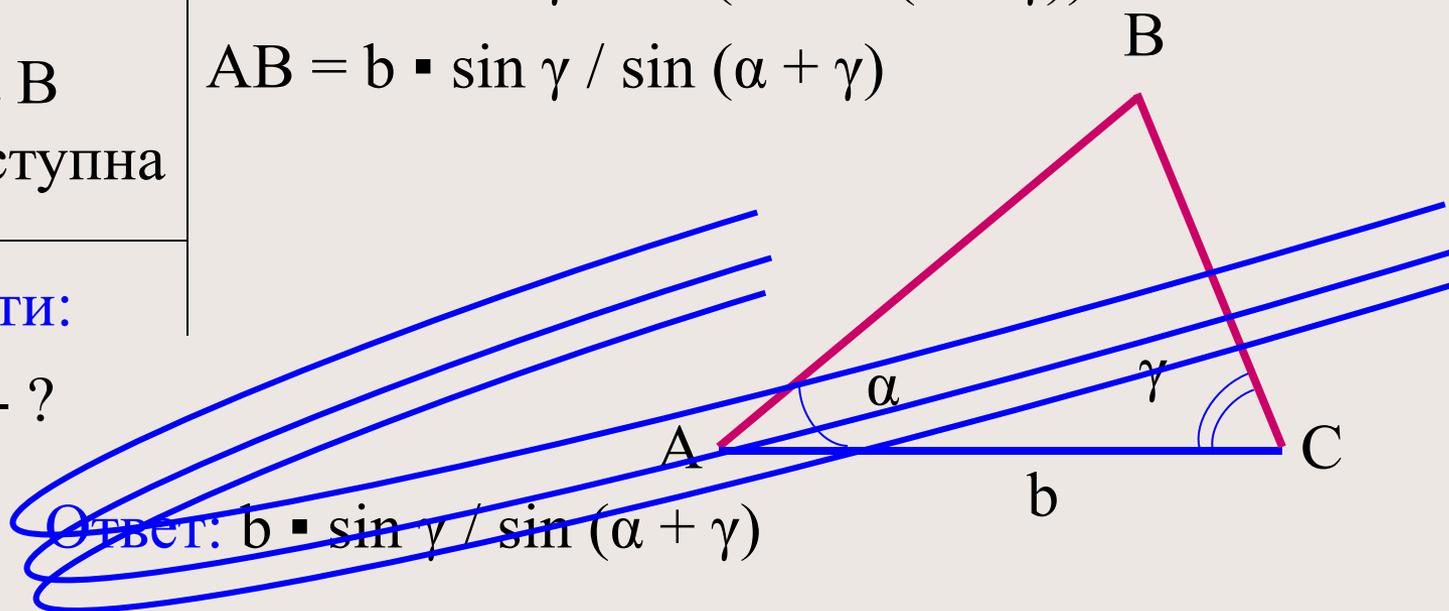
$$AB = b \cdot \sin \gamma / \sin \beta$$

$$AB = b \cdot \sin \gamma / \sin (180 - (\alpha + \gamma))$$

$$AB = b \cdot \sin \gamma / \sin (\alpha + \gamma)$$

Найти:

AB - ?



Ответ: $b \cdot \sin \gamma / \sin (\alpha + \gamma)$



Теорема синусов

Решение задач - пример № 2.

Дано:

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$a = 3 \text{ м}$$

Найти:

$b - ?$

Решение:

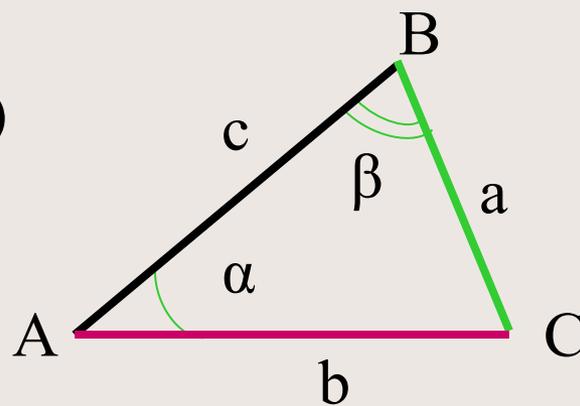
$$a / \sin \alpha = b / \sin \beta$$

$$b = a \cdot \sin \beta / \sin \alpha$$

$$b = 3 \cdot \sin 60^\circ / \sin 45^\circ$$

$$b = 3 \cdot (\sqrt{3} / 2) / (1 / \sqrt{2})$$

$$b = 3 \cdot \sqrt{6} / 2$$

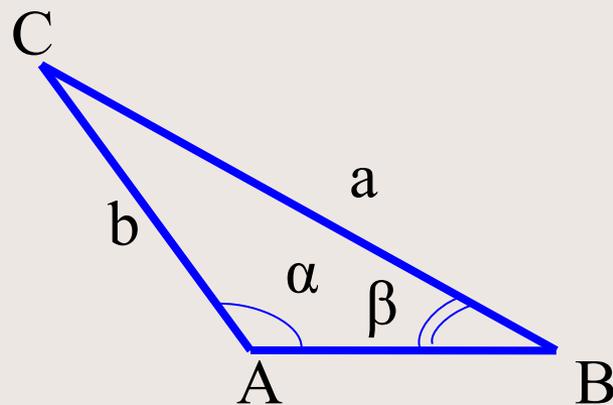
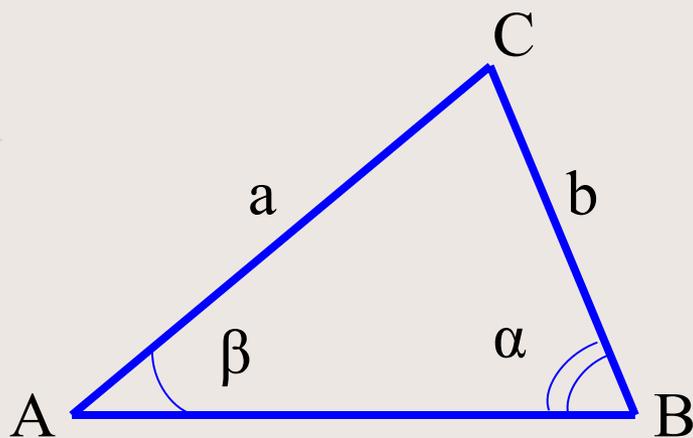


Ответ: $3 \cdot \sqrt{6} / 2$



Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами

Теорема 3. *В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, а против большей стороны лежит больший угол.*



Если $\alpha > \beta$, то $a > b$



Соотношение между углами треугольника и противоположащими сторонами

Решение задач - пример № 1.

Дано:

$\square ABC$ -
равнобедренный
 $\angle A = \angle C > 60^\circ$

Найти:

Что больше AC
или AB ?

Решение:

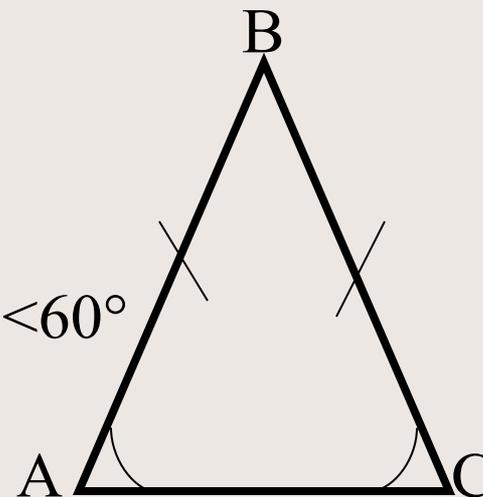
$$\angle A = \angle C > 60^\circ$$

$$\text{Значит, } \angle A + \angle C > 120^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) < 60^\circ$$

Следовательно в $\square ABC$
 $\angle B$ – наименьший.

Тогда, согласно соотношению между углами треугольника и его сторонами, AC – наименьшая сторона.



Ответ: $AC < AB$



Соотношение между углами треугольника и противоположащими сторонами

Решение задач - пример № 2.

Дано:

$$AC = 18 \text{ см}$$

$$AB = 20 \text{ см}$$

$$\angle B = 50^\circ$$

Найти:

Каким является $\angle A$ – острым, прямым или тупым?

Решение:

Так как $AB > AC$, то $\angle C > \angle B$

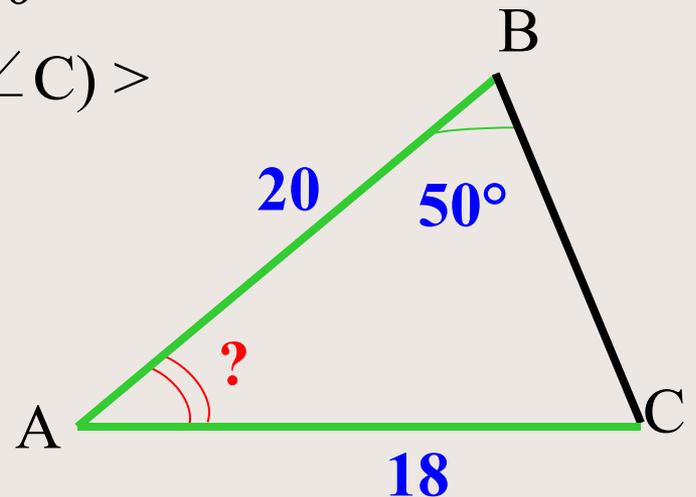
То есть $\angle C > 50^\circ$

Тогда $\angle B + \angle C > 100^\circ$

$$\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) >$$

80°
 $\angle A$ - острый

Ответ: $\angle A$ - острый.



Решения треугольников

Решение задач - пример № 1.

Дано:

$$a = 20 \text{ см}$$

$$\angle \alpha = 75^\circ$$

$$\angle \beta = 60^\circ$$

Найти:

$$\angle \gamma - ?$$

$$b - ?$$

$$c - ?$$

Решение:

$$\gamma = 180^\circ - (\beta + \alpha)$$

$$\gamma = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

$$a / \sin \alpha = b / \sin \beta = c / \sin \gamma$$

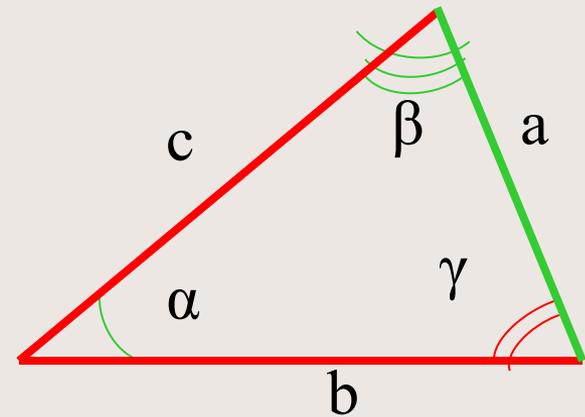
$$b = a \cdot (\sin \beta / \sin \gamma)$$

$$b = 20 \cdot (\sin 60^\circ / \sin 75^\circ) \approx 20 \cdot (0,866 / 0,966) \approx 17,9$$

$$c = a \cdot (\sin \gamma / \sin \alpha)$$

$$c = 20 \cdot (\sin 45^\circ / \sin 75^\circ) \approx 20 \cdot (0,7 / 0,966) \approx 14,6$$

Ответ: 45° ; 17,9 см; 14,6 см.



Решения треугольников

Решение задач - пример № 2.

Дано:

$$a = 7 \text{ м}$$

$$b = 23 \text{ м}$$

$$\angle \gamma =$$

$$130^\circ$$

Найти:

$$\angle \alpha - ?$$

$$\angle \beta - ?$$

$$c - ?$$

Решение:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}$$

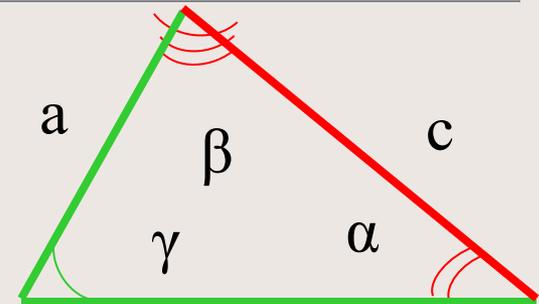
$$c = \sqrt{49 + 529 - 2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot (-0,643)} \approx 28 \text{ м}$$

$$\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / 2 \cdot b \cdot c$$

$$\cos \alpha = (529 + 784 - 49) / 2 \cdot 23 \cdot 28 \approx 0,981$$

$$\angle \alpha \approx 11^\circ$$

$$\angle \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (11^\circ + 130^\circ) \approx 39^\circ$$



Ответ: 28 см; 39°; 11°.



Решения треугольников

Решение задач - пример № 3.

Дано:

$$a = 7 \text{ см}$$

$$b = 2 \text{ см}$$

$$c = 8 \text{ см}$$

Найти:

$$\angle \alpha - ?$$

$$\angle \beta - ?$$

$$\angle \gamma - ?$$

Решение:

$$\cos \alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / 2 \cdot b \cdot c$$

$$\cos \alpha = (4 + 64 - 49) / 2 \cdot 2 \cdot 8 \approx 0,981$$

$$\angle \alpha \approx 54^\circ$$

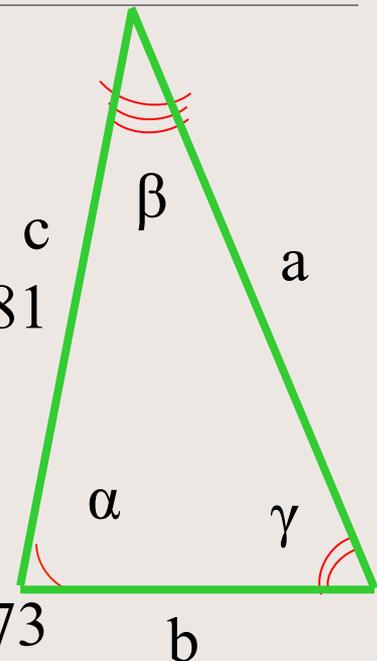
$$\cos \beta = (a^2 + c^2 - b^2) / 2 \cdot a \cdot c$$

$$\cos \beta = (49 + 64 - 4) / 2 \cdot 7 \cdot 8 \approx 0,973$$

$$\angle \beta \approx 13^\circ$$

$$\angle \gamma \approx 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (54^\circ + 13^\circ) = 113^\circ$$

Ответ: 54° ; 13° ; 113° .



Решения треугольников

Решение задач - пример № 4.

Дано:

$$a = 12 \text{ см}$$

$$b = 5 \text{ см}$$

$$\angle \alpha =$$

$$120^\circ$$

Найти:

$$c - ?$$

$$\angle \beta - ?$$

$$\angle \gamma - ?$$

Решение:

$$a / \sin \alpha = b / \sin \beta = c / \sin \gamma$$

$$\sin \beta = (b / a) \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \beta = (5 / 12) \cdot 0,866 \approx 0,361$$

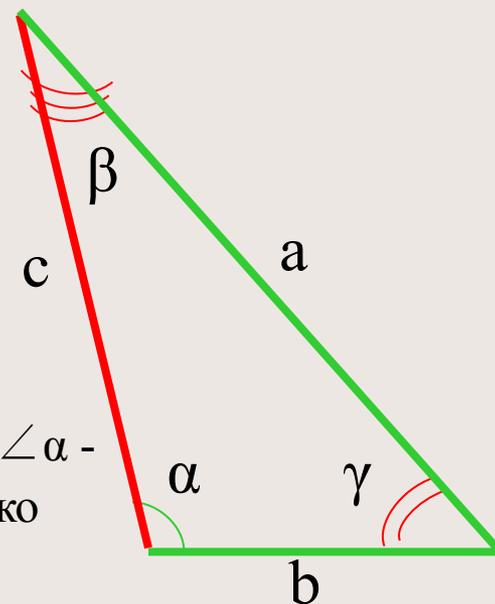
$\angle \beta_1 \approx 21^\circ$ и $\angle \beta_2 \approx 159^\circ$, так как $\angle \alpha$ - тупой, а в треугольнике может быть только один тупой угол, то $\angle \beta \approx 21^\circ$.

$$\angle \gamma \approx 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (120^\circ + 21^\circ) = 39^\circ$$

$$c = a \cdot (\sin \gamma / \sin \alpha)$$

$$c = 12 \cdot (\sin 39^\circ / \sin 120^\circ) \approx 12 \cdot (0,629 / 0,866) \approx 8,69$$

Ответ: 8,69 см; 21° ; 39° .



Удачи!



Возврат
в меню



Выход