

Логические основы построения компьютера.

Основные понятия алгебры логики

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**. Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно. Так, например, предложение "*6 — четное число*" следует считать высказыванием, так как оно истинное. Предложение "*Рим — столица Франции*" тоже высказывание, так как оно ложное.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "**не**", "**и**", "**или**", "**если... , то**", "**тогда и только тогда**" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются логическими связками или операциями.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются составными или сложными. Высказывания, не являющиеся составными, называются элементарными или простыми

Логические операции

НЕ Операция, выражаемая словом "не" или словосочетанием «неверно, что» называется **отрицанием** или **инверсией** и обозначается чертой над высказыванием (или знаком $\neg$).

Высказывание $\neg A$ истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно.

A = «Луна — спутник Земли» $\neg A$ = «Луна — не спутник Земли»

И Операция, выражаемая связкой "и", называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой "•" (может также обозначаться знаками $\wedge$ &).

Высказывание $A \& B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Например:

высказывание "10 делится на 2 **и** 5 больше 3" истинно,

а высказывания: "10 делится на 2 **и** 5 не больше 3",
"10 не делится на 2 **и** 5 больше 3",
"10 не делится на 2 **и** 5 не больше 3" — ложны.

ИЛИ Операция, выражаемая связкой *"или"* (в неисключающем смысле этого слова), называется **дизъюнкцией** (лат. *disjunctio* — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком **V** (или плюсом).

Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Например:
высказывание *"10 не делится на 2 или 5 не больше 3"* ложно,

а высказывания: *"10 делится на 2 или 5 больше 3"*,
"10 делится на 2 или 5 не больше 3",
"10 не делится на 2 или 5 больше 3" — истинны.

ЕСЛИ-ТО Операция, выражаемая связками *"если ..., то"*, *"из ... следует"*, *"... влечет ..."*, называется **импликацией** (лат. *implicatio* — тесно связаны) и обозначается знаком $\rightarrow$

Высказывание $A \rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

Например:

A = «У ребёнка температура» B = «ребёнок болен» A → B

истина

истина

истина

ложь

ложь

истина

ложь

истина

истина

истина

ложь

ложь

Эквиваленция Операция, выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*необходимо и достаточно*", "*... равносильно ...*", называется

эквиваленцией или двойной импликацией и обозначается знаком $\leftrightarrow$ или $\sim$

Высказывание $A \leftrightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда значения **A** и **B** совпадают.

Например, высказывания:

"24 делится на 6 тогда и только тогда, когда 24 делится на 3",

"23 делится на 6 тогда и только тогда, когда 23 делится на 3" истинны,
а высказывания:

"24 делится на 6 тогда и только тогда, когда 24 делится на 5",

"21 делится на 6 тогда и только тогда, когда 21 делится на 3" ложны.

Высказывания **A** и **B**, образующие составное высказывание , $A \leftrightarrow B$ могут быть совершенно не связаны по содержанию, например:

"три больше двух" (A),

"пингвины живут в Антарктиде" (B).

Таблицы истинности

Таблицы истинности показывают, каким будет результат проверки нескольких условий объединенных логическими операциями. Здесь 1 – ИСТИНА, 0 – ЛОЖЬ

A	B	$A \cdot B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание:

$$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B.$$

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$$A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \cdot (\overline{B} \vee A).$$

Это проверяется по таблице истинности

Таким образом, **операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции достаточно, чтобы описывать и обрабатывать логические высказывания.**

$$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \cdot (\overline{B} \vee A)$$

A	B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A} \vee B$	$\overline{B} \vee A$	$(\overline{A} \vee B) \cdot (\overline{B} \vee A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Порядок выполнения логических операций:

1. Операция в скобках
2. Отрицание
3. Логическое умножение
4. Логическое сложение
5. Импликация
6. Эквиваленция

Упражнения

1. Даны два высказывания: A = «Число 5 – простое» B = «Число 4 – нечётное»
Очевидно, что $A=1$, $B=0$. В чём заключаются высказывания:

а) $\overline{A}$

б) $\overline{B}$

в) A и B

г) $A + B$

д) $\overline{A} \wedge \overline{B}$

ж) $A \rightarrow B$

з) $\overline{B} \leftrightarrow \overline{A}$

Какие из этих высказываний истинны?

2. По мишеням произведено три выстрела. Рассмотрим высказывание:

P_k = «Мишень поражена k -м выстрелом», где $k=1, 2, 3$

Что означают следующие высказывания:

а) $P_1 + P_2 + P_3$

б) $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$

в) $\overline{P_1 + P_2 + P_3}$

3. Формализуйте (запишите на языке алгебры логики следующие высказывания):

а) Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3

Обозначим A = «Число 6 делится на 2» B = «число 6 делится на 3»

Сложное высказывание $F = A \wedge B$

б) Я поеду в Киев, и если встречу там друзей, то мы интересно проведем время

в) Если я поеду в Киев и встречу там друзей, то мы интересно проведем время

г) Неверно, что если погода пасмурная, то идет дождь тогда и только тогда, когда нет ветра

4. Сформулируйте на обычном языке:

$$A=10 \wedge B=10 \wedge C=10$$

5. Из двух высказываний А и В постройте высказывание, которое было бы:

а) истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны

б) ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны

в) истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из двух
высказываний

6. Формализуйте (запишите на языке алгебры логики) следующие
высказывания:

а) только одно из чисел А, В, С положительно

б) хотя бы одно из чисел А, В, С положительно

Построение таблиц истинности по формулам

1. $F = (A + B) \cdot \overline{C}$

2. $F = \overline{A + B \cdot C}$

3. $F = (((C + B) \rightarrow B) \cdot AB) \rightarrow B$

4. $F = \overline{A}BC + (BC + \overline{A})$

1.

A	B	C	$\overline{C}$	A+B	F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Получение булева выражения по таблице ИСТИННОСТИ:

1. Выбрать значения переменных, для которых значение функции равно 1;
2. Записать логическое умножение всех переменных для каждой строки, где $F = 1$ (если значение переменной равно 0, то берется ее отрицание);
3. Логически сложить полученные выражения;
4. Упростить полученное выражение

Пример 1

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$$

Выполнить самостоятельно:

2

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

3

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

4

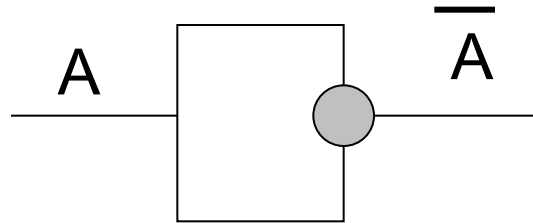
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Логические схемы

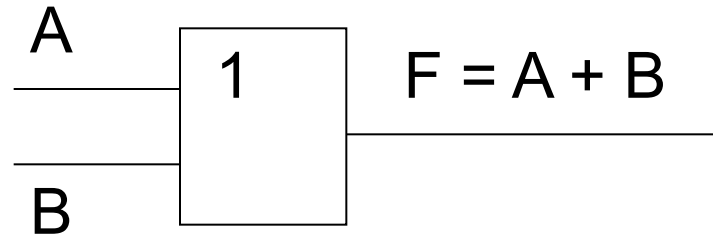
Логический элемент (вентиль) – часть электронной логической схемы, который выполняет элементарную логическую операцию (**и**, **или**, **не**)

Каждый логический элемент имеет свое условное обозначение, имеет один или несколько входов, на которые подаются сигналы высокого напряжения (1) и низкого напряжения (0), и только один выход.

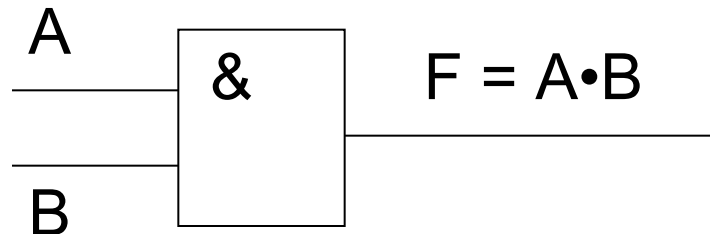
Вентиль, выполняющий логическую операцию **НЕ** (инверсия) называется инвертором



Вентиль, выполняющий логическую операцию **ИЛИ** (сложение) называется дизъюнктором

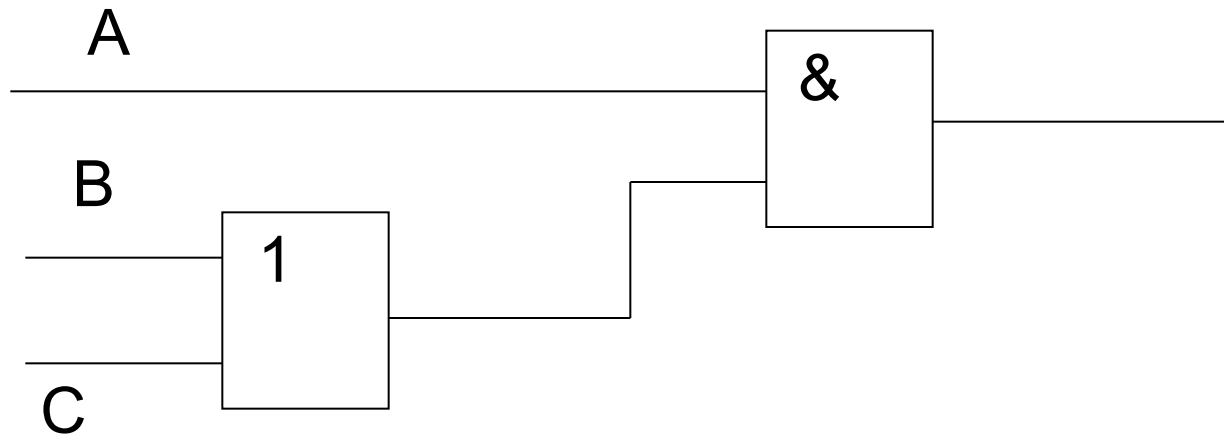


Вентиль, выполняющий логическую операцию **И** (умножение) называется конъюнктором

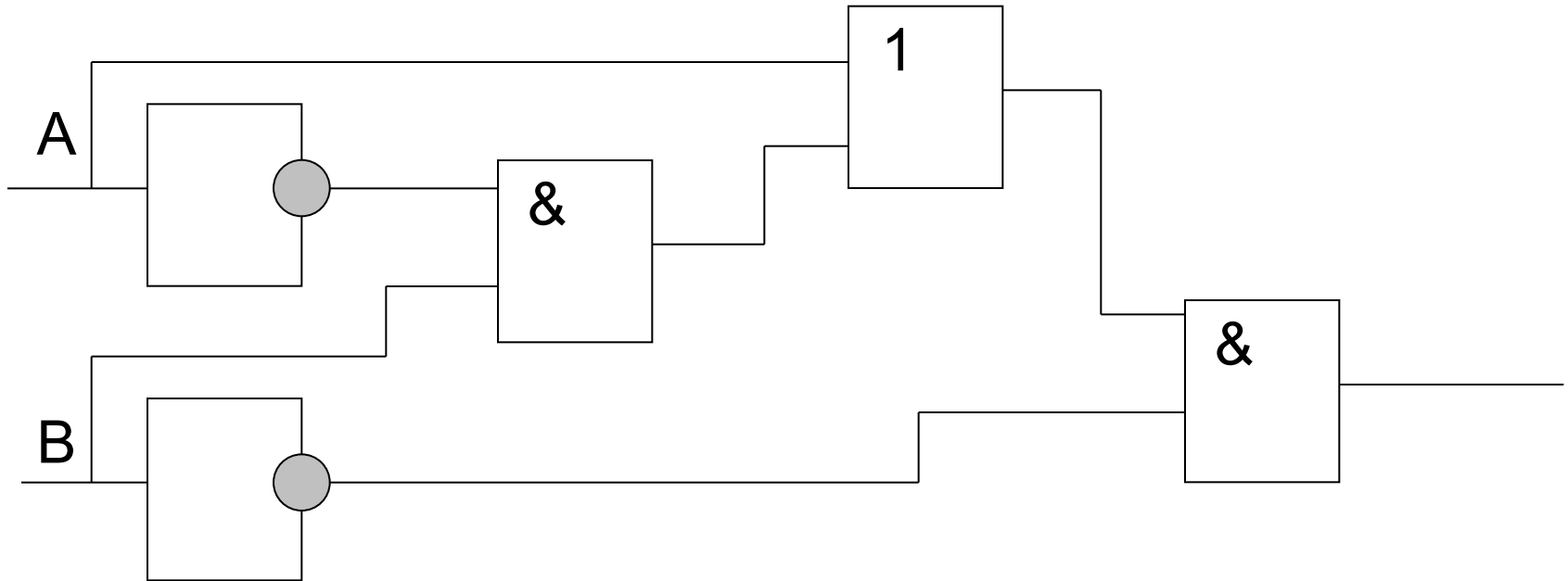


Построение булева выражения по логической схеме

1.



2.



Законы и тождества алгебры логики

Тождества

логическое сложение

$$A + 0 = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A + A = A$$

$$A + \bar{\bar{A}} = 1$$

логическое умножение

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A \cdot A = A$$

$$A \cdot \bar{\bar{A}} = A$$

$\bar{\bar{A}} = A$ (двойное отрицание)

Законы алгебры логики

Переместительный закон

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Сочетательный закон

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Распределительный закон

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

$$A(B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

Закон де Моргана (закон отрицания)

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Упрощение импликации и эквиваленции

$$A \rightarrow B = \bar{B} \rightarrow \bar{A} = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = AB + \bar{A} \cdot \bar{B} = (\bar{A} + B)(A + \bar{B})$$

Упрощение логических выражений

это уменьшение числа переменных, представление сложных высказываний через **И, ИЛИ, НЕ**

Упражнения

$$1 + A \cdot 0 = 1$$

$$X \cdot X \cdot 1 = X$$

$$0 \cdot X + 0 = 0$$

$$0 + X \cdot 1 = X$$

Задания на упрощение выражений и таблицы истинности

1. $F = \neg(X \wedge (\neg(\neg Y \vee X)))$

2. $F = \neg(X \wedge (\neg X \wedge \neg Y))$

3. $F = \neg X \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Y)$

4. $F = \overline{B}(A + \overline{AB})$

5. $F = (A + C)(A + \overline{C})(\overline{B} + C)$

6. $F = \overline{AB} + A\overline{B} + AB + BC$

7. $F = D + ABC(\overline{B} + \overline{C})$

8. $F = \overline{A}BC + A\overline{B} + ABC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$

9. $F = \overline{AB + BC} + C\overline{A}$

10. $F = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} + \overline{A}$

11. $F = \overline{A} + \overline{A + B} + \overline{B \cdot \overline{AB}}$

12. $F = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{AB} + AB$

13. $F = \overline{(A + B) \rightarrow (\overline{B} + C)}$

14. $F = \overline{A + B \cdot \overline{C}}$

15. $F = ((C + B) \rightarrow B)AB \rightarrow B$

16. $F = \overline{ABC} + (BC + \overline{A})$

17. $F = (\overline{AB} + A)\overline{B}$

18. $F = \overline{A} \cdot \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$

19. $F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A}BC + ABC$

20. $F = \overline{A} \cdot \overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C}$
