Логические основы построения компьютера.

Основные понятия алгебры логики

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**. Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.
Так, например, предложение "*6 — четное число*" следует считать высказыванием, так как оно истинное. Предложение "*Рим — столица Франции*" тоже высказывание, так как оно ложное.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются логическими связками или операциями.
Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются составными или сложными. Высказывания, не являющиеся составными, называются элементарными или простыми

Логические операции

НЕ Операция, выражаемая словом *"не"* или словосочетанием «*неверно, что*» называется **отрицанием** или **инверсией** и обозначается чертой над высказыванием (или знаком ¬).

Высказывание $\overline{A}$ истинно, когда А ложно, и ложно, когда А истинно.

А=«*Луна — спутник Земли*» $\overline{A}$ = «*Луна — не спутник Земли*»

И Операция, выражаемая связкой *"и",* называется **конъюнкцией** (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой **" • "** (может также обозначаться знаками и $\wedge$ **&**).

Высказывание А & В истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В истинны.

Например:

высказывание *"10 делится на 2* ***и*** *5 больше 3"* истинно,

а высказывания: *"10 делится на 2* ***и*** *5 не больше 3",*
"10 не делится на 2 ***и*** *5 больше 3",*
"10 не делится на 2 ***и*** *5 не больше 3"* — ложны.

ИЛИ Операция, выражаемая связкой *"или"* (в неисключающем смысле этого слова), называется **дизъюнкцией** (лат. disjunctio — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком **V** (или плюсом).

Высказывание A V B ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Например:
высказывание *"10 не делится на 2 или 5 не больше 3"* ложно,

а высказывания: *"10 делится на 2 или 5 больше 3",*
"10 делится на 2 или 5 не больше 3",
"10 не делится на 2 или 5 больше 3" — истинны.

ЕСЛИ-ТО Операция, выражаемая связками *"если ..., то", "из ... следует", "... влечет ..."*, называется **импликацией** (лат. *implico* — тесно связаны) и обозначается знаком $\rightarrow$

Высказывание ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

Например:

А =«У ребёнка температура» В=«ребёнок болен» **А** $\rightarrow$ **В**

истина	истина	истина
ложь	ложь	истина
ложь	истина	истина
истина	ложь	ложь

Эквиваленция Операция, выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*необходимо и достаточно*", "... *равносильно* ...", называется **эквиваленцией** или двойной импликацией и обозначается знаком $\Leftrightarrow$ или $\sim$

Высказывание $A \leftrightarrow B$ **истинно тогда и только тогда, когда значения А и В совпадают.**

Например, высказывания:

"24 делится на 6 тогда и только тогда, когда 24 делится на 3",
"23 делится на 6 тогда и только тогда, когда 23 делится на 3" истинны,
а высказывания:

"24 делится на 6 тогда и только тогда, когда 24 делится на 5",
"21 делится на 6 тогда и только тогда, когда 21 делится на 3" ложны.

Высказывания **А** и **В,** образующие составное высказывание , $A \leftrightarrow B$ могут быть совершенно не связаны по содержанию,
например:

"три больше двух" (**А**),
"пингвины живут в Антарктиде" (**В**).

Таблицы истинности

Таблицы истинности показывают, каким будет результат проверки нескольких условий объединенных логическими операциями. Здесь 1 – ИСТИНА, 0 – ЛОЖЬ

A	B	A•B	A v B	A→ B	A↔B
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Импликацию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание:

$A \longrightarrow B = \overline{A} \vee B.$

Эквиваленцию можно выразить через отрицание, дизъюнкцию и конъюнкцию:

$A \longleftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \cdot (\overline{B} \vee A).$

Это проверяется по таблице истинности

Таким образом, **операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции достаточно, чтобы описывать и обрабатывать логические высказывания.**

$A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$ $\qquad$ $A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \bullet (\overline{B} \vee A)$

A	B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A} \vee B$	$\overline{B} \vee A$	$(\overline{A} \vee B) \bullet (\overline{B} \vee A)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Порядок выполнения логических операций:

1. Операция в скобках
2. Отрицание
3. Логическое умножение
4. Логическое сложение
5. Импликация
6. Эквиваленция

Упражнения

1. Даны два высказывания: А=«Число 5 – простое» В=«Число 4 – нечётное» Очевидно, что А=1, В=0. В чём заключаются высказывания:

а) $\overline{A}$

б) $\overline{B}$

в) А и В

г) А + В

д) $\overline{A} \wedge \overline{B}$

ж) $A \rightarrow B$

з) $\overline{B} \leftrightarrow \overline{A}$

Какие из этих высказываний истинны?

2. По мишеням произведено три выстрела. Рассмотрим высказывание:

Рк =«Мишень поражена к-м выстрелом», где к=1, 2, 3

Что означают следующие высказывания:

а) $P_1 + P_2 + P_3$

б) $P_1 \bullet P_2 \bullet P_3$

в) $\overline{P_1 + P_2 + P_3}$

3. Формализуйте (запишите на языке алгебры логики следующие высказывания):

а) Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3

Обозначим А=«Число 6 делится на 2» В=«число 6 делится на 3»

Сложное высказывание $F = A \wedge B$

б) Я поеду в Киев, и если встречу там друзей, то мы интересно проведем время

в) Если я поеду в Киев и встречу там друзей, то мы интересно проведем время

г) Неверно, что если погода пасмурная, то идет дождь тогда и только тогда, когда нет ветра

4. Сформулируйте на обычном языке:

$A=10 \wedge B=10 \wedge C=10$

5. Из двух высказываний А и В постройте высказывание, которое было бы:

а) истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны

б) ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны

в) истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из двух высказываний

6. Формализуйте (запишите на языке алгебры логики) следующие высказывания:

а) только одно из чисел А, В, С положительно

б) хотя бы одно из чисел А, В, С положительно

Построение таблиц истинности по формулам

1. $F = (A + B) \cdot \overline{C}$
2. $F = \overline{A + B \cdot \overline{C}}$
3. $F = (((C + B) \rightarrow B) \cdot AB) \rightarrow B$
4. $F = \overline{ABC} + (BC + \overline{A})$

1.

A	B	C	$\overline{C}$	A+B	F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Получение булева выражения по таблице истинности:

1. Выбрать значения переменных, для которых значение функции равно 1;
2. Записать логическое умножение всех переменных для каждой строки, где F = 1 (если значение переменной равно 0, то берется ее отрицание);
3. Логически сложить полученные выражения;
4. Упростить полученное выражение

Пример 1

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

$$\overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C$$

Выполнить самостоятельно:

2

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

3

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

4

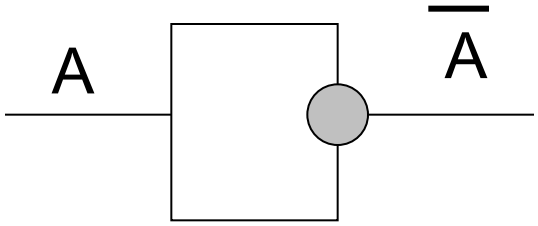
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Логические схемы

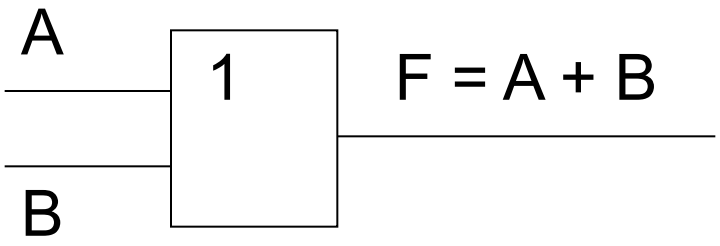
Логический элемент (вентиль) – часть электронной логической схемы, который выполняет элементарную логическую операцию (и, или, не)

Каждый логический элемент имеет свое условное обозначение, имеет один или несколько входов, на которые подаются сигналы высокого напряжения (1) и низкого напряжения (0), и только один выход.

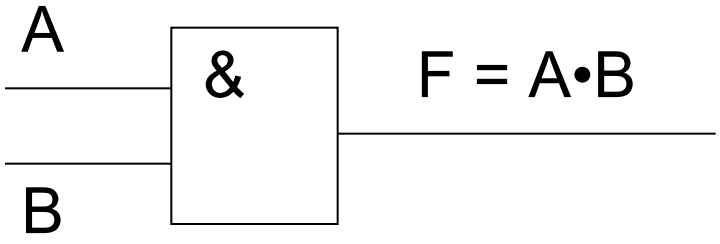
Вентиль, выполняющий логическую операцию НЕ (инверсия) называется инвертором



Вентиль, выполняющий логическую операцию ИЛИ (сложение) называется дизъюнктором

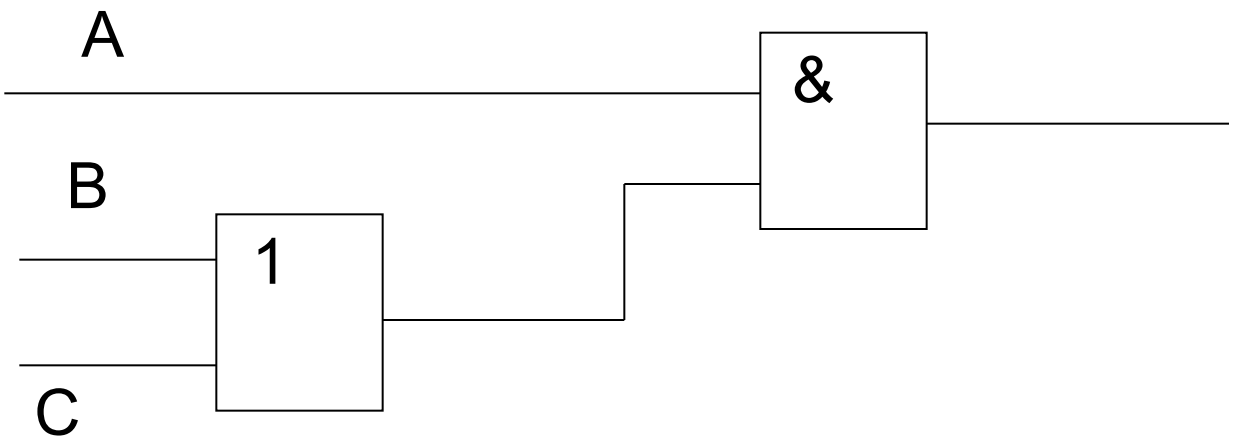


Вентиль, выполняющий логическую операцию И (умножение) называется конъюнктором

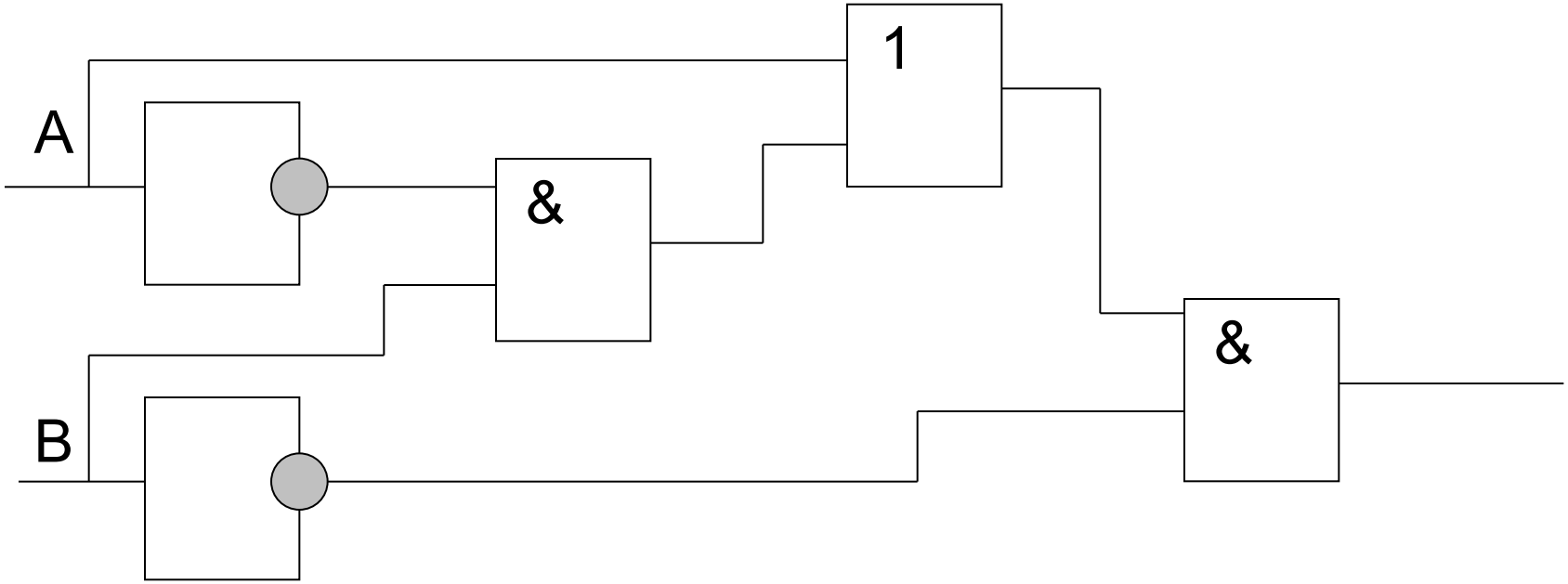


Построение булева выражения по логической схеме

1.



2.



Законы и тождества алгебры логики

Тождества

логическое сложение

$A + 0 = A$

$A + 1 = 1$

$A + A = A$

$A + \overline{A} = 1$

логическое умножение

$A \cdot 0 = 0$

$A \cdot 1 = A$

$A \cdot A = A$

$A \cdot \overline{A} = 0$

$\overline{\overline{A}} = A$ *(двойное отрицание)*

Законы алгебры логики

Переместительный закон

$A + B = B + A$ $\qquad$ $A \bullet B = B \bullet A$

Сочетательный закон

$(A + B) + C = A + (B+C)$ $\qquad$ $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$

Распределительный закон

$(A + B) \bullet C = AC + BC$ $\qquad$ $AB + C = (A + C) \bullet (B + C)$

Закон де Моргана (закон отрицания)

$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

Упрощение импликации и эквиваленции

$$A \rightarrow B = \overline{B} \rightarrow \overline{A} = \overline{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = AB + \overline{A} \cdot \overline{B} = (\overline{A} + B)(A + \overline{B})$$

Упрощение логических выражений

это уменьшение числа переменных, представление сложных высказываний через ***И, ИЛИ, НЕ***

Упражнения

$1 + A \cdot 0 =$ 1

$X \cdot X \cdot 1 =$ X

$0 \cdot X + 0 =$ 0

$0 + X \cdot 1 =$ X

Задания на упрощение выражений и таблицы истинности

1. *F=не(X и (не(неY или X)))*

2. *F=не(X и (неX и неY))*

3. *F=неX или (неX и Y и неY)*

4. $F = \overline{B}(A + \overline{AB})$

5. $F = (A + C)(A + \overline{C})(\overline{B} + C)$

6. $F = \overline{AB} + A\overline{B} + AB + BC$

7. $F = D + ABC(\overline{B} + \overline{C})$

8. $F = \overline{A}BC + A\overline{B} + ABC + A\overline{BC}$

9. $F = \overline{AB + BC} + C\overline{A}$

10. $F = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} + \overline{A}$

11. $F = \overline{A} + \overline{A + B} + \overline{B \cdot \overline{AB}}$

12. $F = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A}B + AB$

13. $F = \overline{(A+B) \to (\overline{B}+C)}$

14. $F = \overline{A + B \cdot \overline{C}}$

15. $F = ((C+B) \to B)AB) \to B$

16. $F = \overline{ABC} + (BC + \overline{A})$

17. $F = (\overline{A}B + A)\overline{B}$

18. $F = \overline{A} \cdot \overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$

19. $F = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A}BC + ABC$

20. $F = \overline{A} \cdot \overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C}$