ОСНОВЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Раздел 2. Математические основы программирования

Представление чисел в ЭВМ

Старший преподаватель
Кафедры ВС, к.т.н.
Поляков Артем Юрьевич

Рассматриваемые вопросы

- Представление целых чисел
  - представление целых без знака
  - представление знаковых целых
- Представление вещественных чисел
  - математическая основа представления вещественных чисел
  - современный стандарт представления вещественных чисел

Представление чисел в ЭВМ

Особенности представления чисел в ЭВМ:

- используется двоичная система счисления
- ограниченное количество разрядов
- в ЭВМ используется память, элементарная ячейка которой (бит) может иметь только 2 состояния (0 и 1). Поэтому отсутствует возможность хранить знаки: ("+", "–" и ".").

Представление целых чисел без знака

- Пусть дана ячейка памяти, размер которой k бит.
- Существует 2^k всевозможных битовых наборов длины k.
- Следовательно, всего возможно представить 2^k различных чисел.
- Существует всего $(2^k)!$ (количество перестановок из 2^k элементов) способов закодировать беззнаковые числа битовыми наборами.
- Среди всех теоретически возможных способов **наиболее удобно использовать *k*-разрядную запись этого числа в двоичной системе счисления**. Это позволяет естественным образом реализовать арифметические операции над числами.

Представление целых чисел без знака (примеры)

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0

$$175_{10} = 1010\ 1111_2$$

$$36_{10} = 10\ 0100_2$$

Представление знаковых целых

Отрицательные числа могут быть представлены в ЭВМ несколькими способами, выбор одного из которых оказывает влияние на реализацию арифметических операций.

Для представления знаковых целых чисел используются три способа:

1) прямой код;

2) обратный код;

3) дополнительный код.

Далее будут рассмотрены каждый из способов для **десятичной** и **двоичной** систем счисления (СС).

Прямой код (десятичная СС, 6 разрядов)

Это наиболее очевидный и близкий к естественному способ записи чисел.

Число формируется из одного знака и фиксированного количества разрядов (цифр), представляющих собой модуль числа. Например:

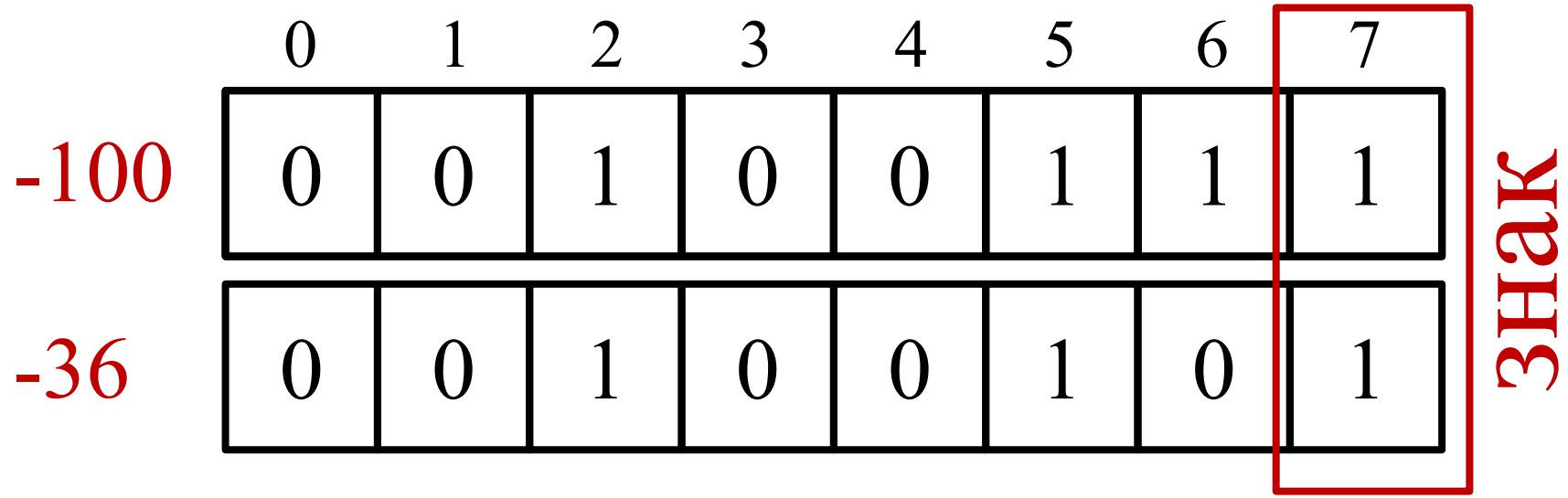
+123 456

-001 000

-012 123

Прямой код (двоичная СС, 8 бит)

При формировании прямого кода в двоичной СС старший бит (разряд) используется для хранения знака: 0 ~ "+", 1 ~ "-".



$-100_{10} = 1110\ 0100_2$, $100_{10} = 0110\ 0100_2$

$-36_{10} = 1010\ 0100_2$, $36_{10} = 10\ 0100_2$

© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Обратный код (десятичная СС, 6 разрядов)

Отрицательные числа также состоят из фиксированного числа разрядов и формируются путем дополнения каждого разряда до 9:

$$-\,123\,456 \leftrightarrow 876\,543$$

$$1 \leftrightarrow 9 - 1 = 8$$

$$2 \leftrightarrow 9 - 2 = 7$$

$$3 \leftrightarrow 9 - 3 = 6$$

$$4 \leftrightarrow 9 - 4 = 5$$

$$5 \leftrightarrow 9 - 5 = 4$$

$$6 \leftrightarrow 9 - 6 = 3$$

$$-\,123\,456 = \mathbf{999\,999 - 123\,456 = 876\,543}$$

Обратный код (двоичная СС, 8 бит)

Обратный код отрицательного числа в двоичной СС формируется путем инвертирования каждого разряда, включая знак, на противоположный.

	0	1	2	3	4	5	6	7
– 100	1	1	0	1	1	0	0	1
– 36	1	1	0	1	1	0	1	1

знак

$100_{10} = 0110\ 0100_2, -100_{10} = 1001\ 1011_2$

$36_{10} = 10\ 0100_2, -36_{10} = 1101\ 1011_2$

Обратный код (двоичная СС, 8 бит)

Для формирования обратного кода также может использоваться подход, аналогичный приведенному для десятичной СС:

$$-100_{10} = \mathbf{1111\ 1111_2 - 0110\ 0100_2 = 1001\ 1011_2}$$

Дополнительный код (десятичная СС, 6 разрядов)

Отрицательные числа в дополнительном коде представляются следующим образом:

$$-x = 0 - x = 1\,000\,000 - x$$

$$-1 = 0 - 1 = 1\,000\,000 - 1 = 999\,999$$

$$-500\,000 = 0 - 500\,000 =$$

$$1\,000\,000 - 500\,000 = 500\,000$$

Диапазон: -500 000 до 499 999

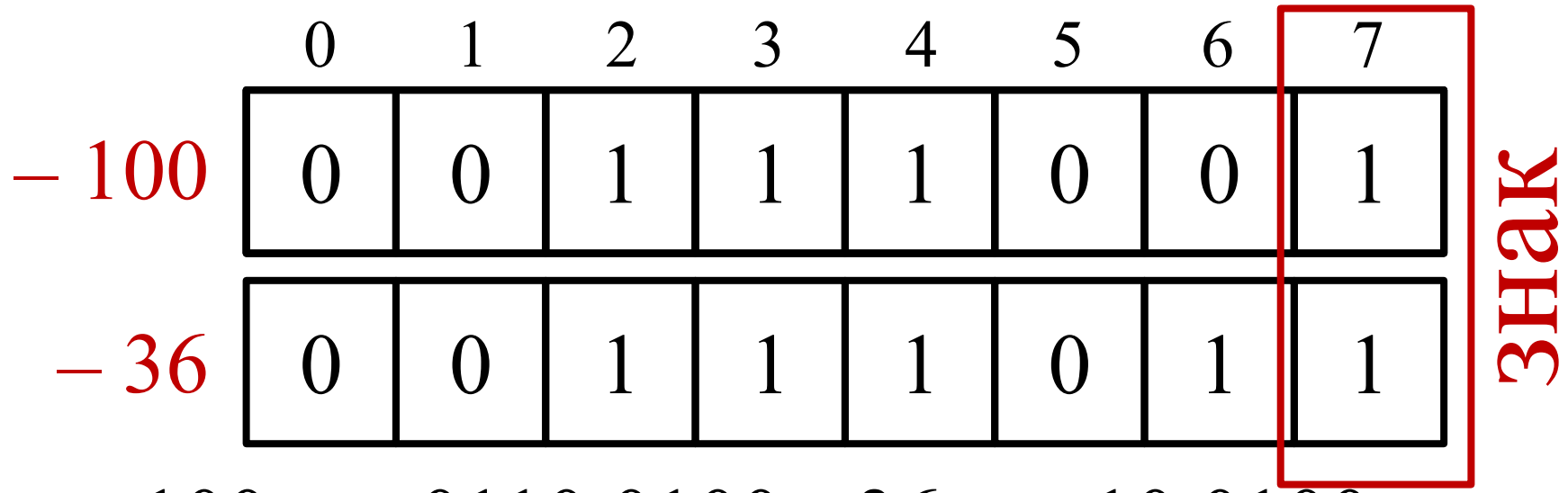
(499 999 – 500 000)

Связь дополнительного и обратного кода (дес. СС, 6 разрядов)

<Доп. код> = <Обр. код> + 1

Дополнительный код	Обратный код
$-x = 0 - x = 1\,000\,000 - x$	$-x = 0 - x = 999\,999 - x$
$-1 = 0 - 1 = 1\,000\,000 - 1 = 999\,999$	$-1 = 0 - 1 = 999\,999 - 1 = 999\,998$

Дополнительный код (двоичная СС, 8 бит)



$100_{10} = 0110\ 0100_2$, $36_{10} = 10\ 0100_2$

$-100_{10} = 1\ 0000\ 0000_2 - 0110\ 0100_2 =$

$10011100_2 = 156_{10}$

$-36_{10} = 1\ 0000\ 0000_2 - 0010\ 0100_2 =$

$11011100_2 = 220_{10}$

© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Сравнение различных представлений знаковых чисел (двоичная СС, 3 бит)

Битовый набор	Без знака	Прямой код	Обратный код	Доп. код
000	0	+0	+0	0
001	1	+1	+1	+1
010	2	+2	+2	+2
011	3	+3	+3	+3
100	**4**	**–0**	**–3**	**–4**
101	5	–1	–2	–3
110	6	–2	–1	–2
111	**7**	**–3**	**–0**	**–1**

Сложение и **вычитание** целых чисел без знака

Сложение и вычитание k-разрядных целых чисел без знака происходит по обычным для позиционных систем счисления правилам. Примеры (для $k = 3$):

$$001_2 + 100_2 = 101_2;$$

$$101_2 - 010_2 = 011_2.$$

Ситуации, когда **уменьшаемое меньше вычитаемого** или когда **результат суммы не умещается в k разрядов**, считаются ошибочными и должны отслеживаться устройством компьютера.

Обработка переполнения
при сложении целых чисел без знака

Если при сложении двух k-разрядных чисел возникает (k+1)-й разряд, то он будет отброшен. Пример (для $k = 3$):

$$5_{10} + 4_{10} =$$
$$101_2 + 100_2 = 1001_2 =$$
$$001_2 = 1_{10}$$

Сложение целых знаковых чисел в дополнительном коде

- Сложение k-разрядных знаковых чисел производится аналогично алгоритму для целых чисел без знака.
- Складываются все разряды, включая знаковый
- Если в результате сложения возникает (k+1)-й разряд, то он отбрасывается.

Для $k = 3$:

$$+3_{10} + (-1_{10}) = 011_2 + 111_2 = 1010_2 =>$$

$$010_2 = +2_{10}.$$

Вычитание целых знаковых чисел в дополнительном коде

При вычитании также используется аналогичный алгоритм, однако если уменьшаемое меньше вычитаемого, к двоичному коду уменьшаемого слева приписывается единица (т.е. добавляется 2^k) и только после этого производится вычитание (такой способ называется вычитание по модулю 2^k).

Для $k = 3$:

$$1_{10} - 3_{10} = 001_2 - 011_2 =>$$

$$1001_2 - 011_2 = 110_2 = -2_{10}.$$

Сложение и вычитание по модулю 2^k

$$(x+y)\bmod 2^k = \begin{cases} x+y, \text{если } (x+y) < 2^k \\ x+y-2^k, \text{если } (x+y) \geq 2^k \end{cases}$$

$$(x-y)\bmod 2^k = \begin{cases} x-y, \text{если } x \geq y \\ 2^k + x - y, \text{если } x < y \end{cases}$$

Вещественные числа

- В памяти ЭВМ не предусмотрено специальных средств для запоминания десятичной точки.
- Существует два способа представить вещественное число в виде десятичной дроби:

  1. Явно указав позицию запятой внутри числа: **23.456**, **0.0098**;

  2. Научный, с помощью степени основания 10: **$2.3456*10^{1}$**, **$0.98*10^{-2}$**

Вещественные числа с фиксированной точкой

Данное представление соответствует первому варианту записи вещественных чисел.

Положение точки внутри байта (байтов) задается фиксировано, например: для хранения используется 1 байт, пусть биты с 0 по 4 – целая часть, а биты с 5 по 7 – дробная часть:

0000 0.000
0000 0.001
0000 0.010
.....
1111 1.110
1111 1.111

Вещественные числа с фиксированной точкой (недостатки)

1) Малый диапазон значений.

2) Неэффективное использование памяти при работе только с малыми числами или только с большими числами.

Вещественные числа с плавающей точкой

p-разрядным числом с плавающей точкой по основанию *b* с избытком *q* называется пара величин (*e*, *f*), которой соответствует значение:

$$(e, f) = f \cdot b^{(e-q)}$$

e – порядок – беззнаковое целое число, изменяющаяся в определенном промежутке.

f – мантисса – знаковое вещественное число с фиксированной точкой, при этом:

$$|f| < 1,$$

т.е. разделяющая точка находится в крайней слева позиции

Научная форма записи вещественных чисел

Научная форма записи вещественных чисел позволяет представить одно и то же число множеством различных способов.

Например, постоянная Планка $h = 6.6261 \cdot 10^{-27}$ может быть записана одним из следующих способов:

1) $66.261 \cdot 10^{-28}$
2) $66261 \cdot 10^{-31}$
3) $0.66261 \cdot 10^{-26}$
4) $0.00066261 \cdot 10^{-23}$
5) …

Нормализованная форма

Представление информации в ЭВМ требует определенности, поэтому вещественные числа представляются в **нормализованной форме**.

Число с плавающей точкой является **нормализованным**, если:

1) наиболее значимая цифра в представлении f отлична от нуля:

$$1/b \le |f| < 1$$

2) $f = 0$ и e принимает наименьшее возможное значение

Например: 0.615, 0.101, ~~6.15~~, ~~0.01~~

p-разрядные нормализованные вещественные числа

$$(e, f) = f \cdot b^{e-q}$$

В ЭВМ для хранения вещественных чисел отводится **ограниченное число разрядов**:

$$-b^p \le f \cdot b^{e-q} \le b^p$$

Пример: рассмотрим следующий пример представления десятичных чисел: f – 8-разрядов, e – 2 разряда, избыток $q = 50$, основание $b = 10$.

Число Авогадро: $N = 6{,}02214 \cdot 10^{23} = 0.602214 \cdot 10^{24} =$

$$((24+50),+.60221400) = (74, +.60221400)$$

Постоян. Планка: $h = 6.6261 \cdot 10^{-27} = 0.66261 \cdot 10^{-26} =$

$$((-26+50), +.66261000) = (24, +.66261000)$$

Упаковка вещественных числа с одинарной точностью (тип float)

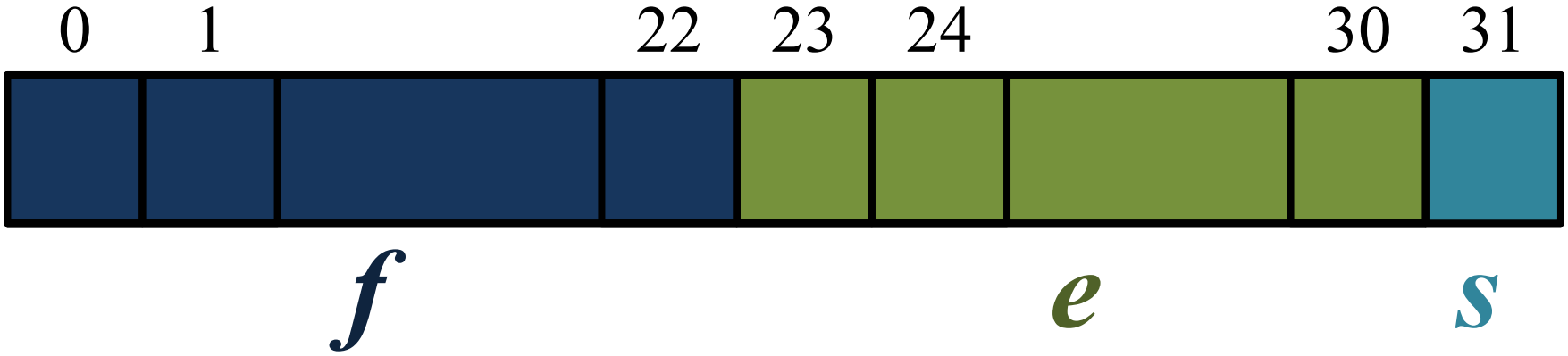
Размер, выделяемый для хранения:

4 байта (32 бита)

$$(e, f, s) = s1.f \cdot b^{e-q}$$

f: 23 бит; e: 8 бит; s: 1 бит,

$$b = 2,\ q = 2^{8-1} - 1 = 127$$



© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Примеры вещественных чисел с одинарной точностью

$$(e, f, s) = s1.f \cdot b^{e-q}$$

Десятичное представление	1
Двоичное представление	$1 \cdot 2^0$
Результат упаковки (hex)	3f 80 00 00
Двоичное представление	0011 1111 1000 0000 0000 0000 0000 0000
f	0
e	$0111\ 1111_2 = 7F_{16} = 127_{10}$
s	0 (~ "+")

$$(127, 0, 0) = +1.0 \cdot 2^{127-127} = +1.0$$

Примеры вещественных чисел с одинарной точностью (2)

$$(e, f, s) = s1.f \cdot b^{e-q}$$

Десятичное представление	-1
Двоичное представление	$-1 \cdot 2^0$
Результат упаковки (hex)	bf 80 00 00
Двоичное представление	1011 1111 1000 0000 0000 0000 0000 0000
f	0
e	$0111\ 1111_2 = 7F_{16} = 127_{10}$
s	1 (~ "–")

$$(127, 0, 1) = -1.0 \cdot 2^{127-127} = -1.0$$

Примеры вещественных чисел с одинарной точностью (3)

$$(e, f, s) = s1.f \cdot b^{e-q}$$

Десятичное представление	0.5
Двоичное представление	$1 \cdot 2^{-1} = 0.1_2$
Результат упаковки (hex)	3f 00 00 00
Двоичное представление	0011 1111 0000 0000 0000 0000 0000 0000
f	0
e	$0111\ 1110_2 = 7E_{16} = 126_{10}$
s	0 (~ "+")

$$(126, 0, 0) = +1.0 \cdot 2^{126-127} = +0.5$$

Примеры вещественных чисел с одинарной точностью (4)

$$(e, f, s) = s1.f \cdot b^{e-q}$$

Десятичное представление	0.0625
Двоичное представление	$1 \cdot 2^{-4} = 0.0001$
Результат упаковки (hex)	3d 80 00 00
Двоичное представление	0011 1101 1000 0000 0000 0000 0000 0000
f	0
e	$0111\ 1011_2 = 7B_{16} = 123_{10}$
s	0 (~ "+")

$$(127, 0, 0) = +1.0 \cdot 2^{123-127} = +2^{-4} = 0.0625$$

Перевод вещественных чисел из **десятичной** СС в **двоичную** СС

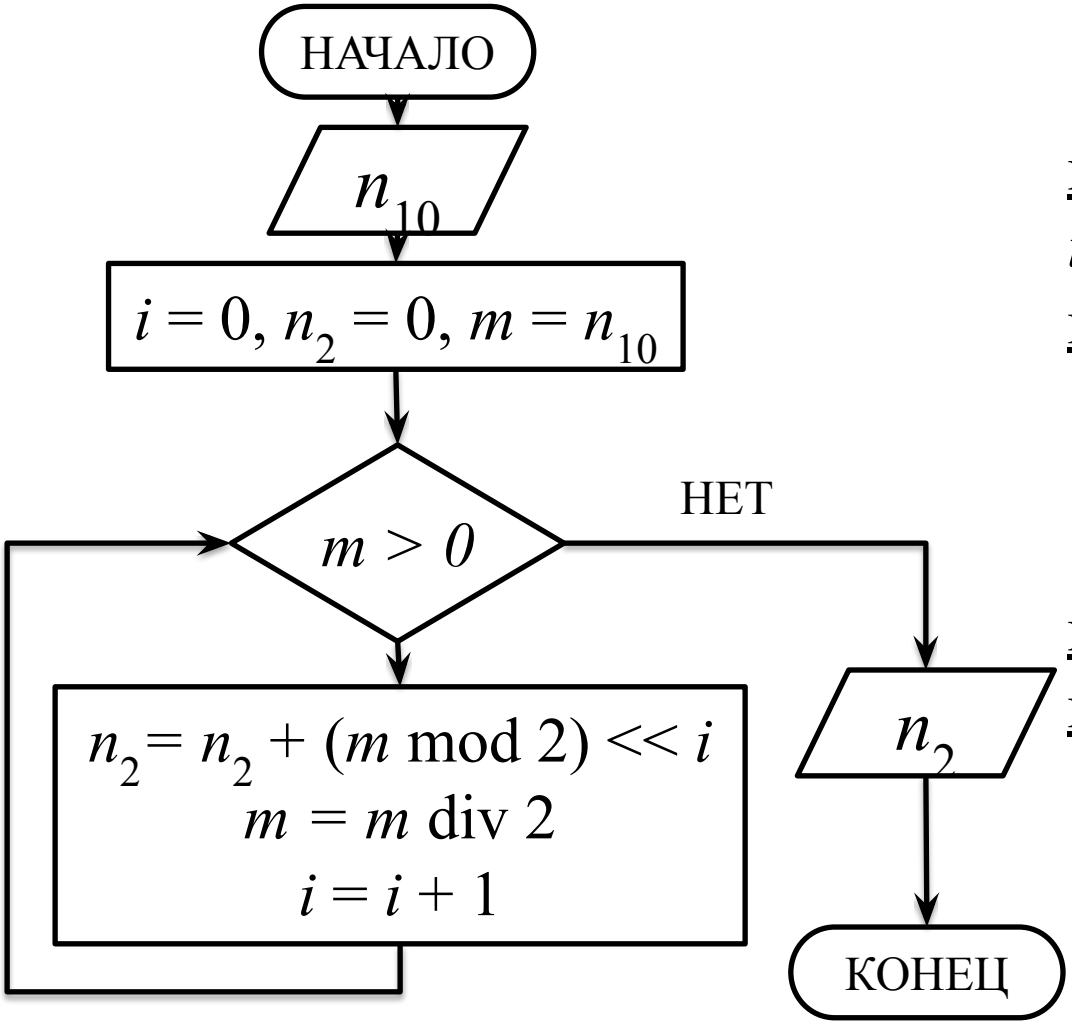
Пусть дано десятичное вещественное число $A_{10} = A'_{10} \bullet A''_{10}$

Необходимо: найти A_2

Решение:

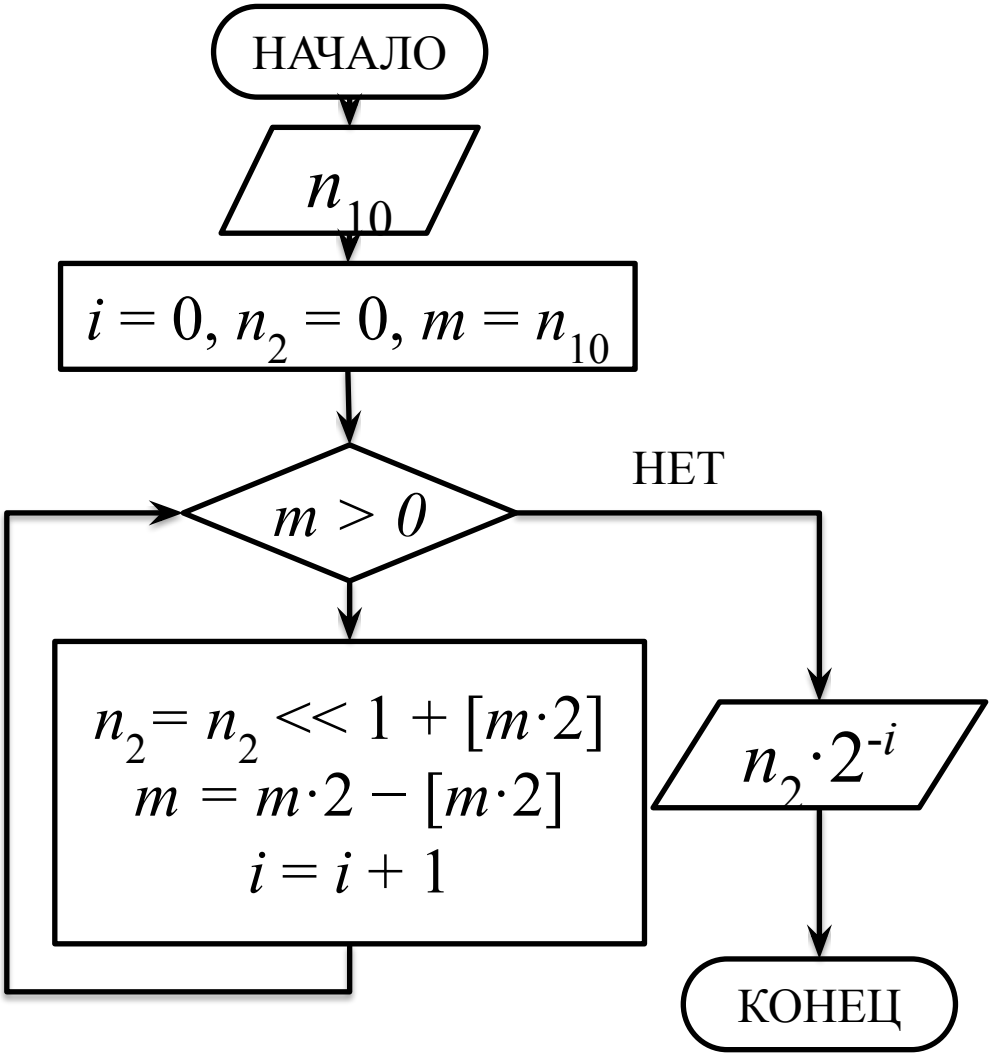
1. Найти A'_2 из A'_{10}, используя алгоритм DB[1] перевода целых десятичных чисел в двоичные.
2. Найти A''_2 из A''_{10}, используя алгоритм DB[2] перевода дробных (<1) десятичных чисел в двоичные.
3. $A_2 = A'_2.A''_2$

Алгоритм DB[1]



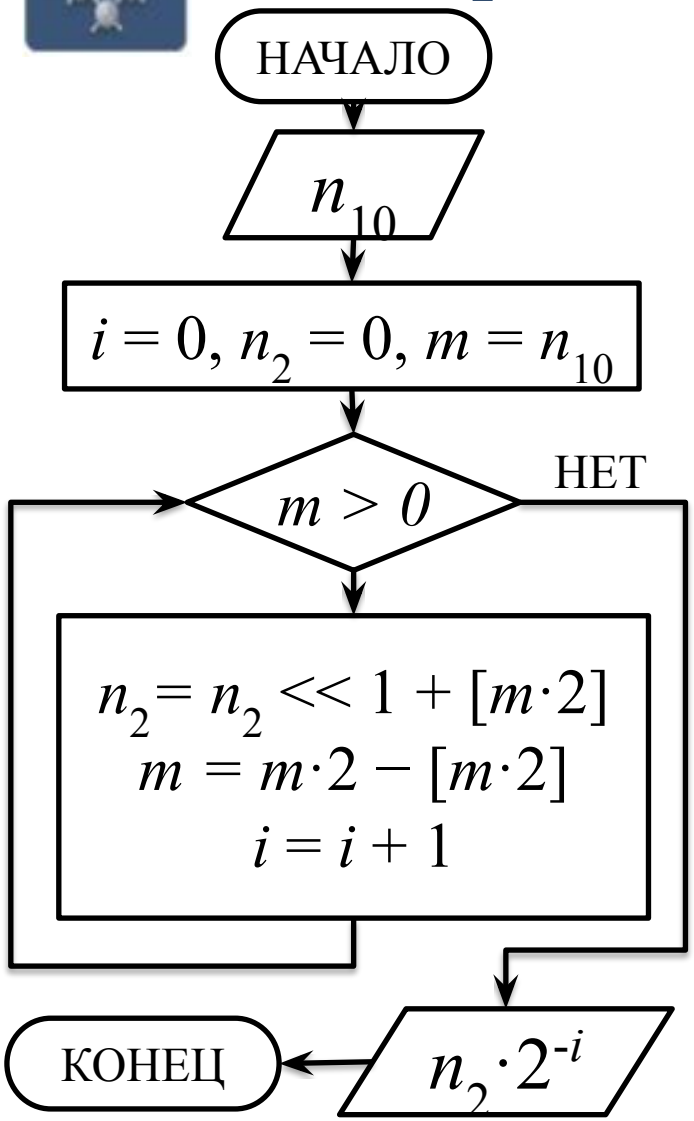
ввод n_{10}
$i = 0, n_2 = 0, m = n_{10}$
пока $m > 0$ делать
    $n_2 = n_2 + (m \bmod 2) << i$
    $m = m \text{ div } 2$
    $i = i + 1$
конец пока
вывод n_2

Алгоритм DB^2



ввод n_{10}
$i = 0, n_2 = 0, m = n_{10}$
пока $m > 0$ делать
$n_2 = n_2 << 1 + [m \cdot 2]$
$m = m \cdot 2 - [m \cdot 2]$
$i = i + 1$
конец пока
вывод $n_2 \cdot 2^{-i}$

Представление числа 0.3_{10}



1. $n_2 = 0_2 << 1 + [0.3 \cdot 2] = 0_2$
   $m = 0.6, i = 1$
2. $n_2 = 0 << 1 + [0.6 \cdot 2] = 1_2$
   $m = 1.2 - 1 = 0.2, i = 2$
3. $n_2 = 1_2 << 1 + [0.2 \cdot 2] = 10_2$
   $m = 0.4 - 0 = 0.4, i = 3$
4. $n_2 = 10_2 << 1 + [0.4 \cdot 2] = 100_2$
   $m = 0.8 - 0 = 0.8, i = 4$
5. $n_2 = 100 << 1 + [0.8 \cdot 2] = 1001_2$
   $m = 1.6 - 1 = \mathbf{0.6}, i = 5$
   $n_2 \cdot 2^{-5} = 0.01001$
6. …

…

$0.3_{10} = 0.01001\ 1001\ 1001\ 1001\ \ldots.$

© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Примеры вещественных чисел с одинарной точностью (5)

$$(e, f, s) = s1.f \cdot b^{e-q}$$

Десятичное представление	0.3
Двоичное представление	0.0100110011001100 1 …
Результат упаковки (hex)	3e 99 99 9a
Двоичное представление	0011 1110 1001 1001 1001 1001 1001 1010
f	1.001 1001 1001 1001 1001 1010
e	$0111\ 1101_2 = 7D_{16} = 125_{10}$
s	0 (~ "+")

$$(127, 0, 0) = +1.0011001\ldots \cdot 2^{125-127} =$$

$$1.0011001\ldots \cdot 2^{-2} = 0.010011001\ldots.$$

© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Примеры вещественных чисел с одинарной точностью (6)

$$(e, f, s) = s1.f \cdot b^{e-q}$$

Десятичное представление	5.3
Двоичное представление	101.0100110011001…
Результат упаковки (hex)	40 a9 99 9a
Двоичное представление	0100 0000 1010 1001 1001 1001 1001 1010
f	1.010 10011001 1001 1001 1010
e	$0100\ 0000_2 = 81_{16} = 129_{10}$
s	0 (~ "+")

$$(127, 0, 0) = +1.01010011001\ldots \cdot 2^{129-127} =$$

$$1.01010011001\ldots \cdot 2^2 = 101.010011001\ldots.$$

© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Анализ внутреннего представления числа 5.3_{10} в типе float

$$\mathbf{1}.0101\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 010_2 \cdot \mathbf{2^2} =$$

$$= 101.01\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ \underline{010}_2 =$$

$$\mathbf{5} + \mathbf{2^{-2}} + \mathbf{2^{-5}} + \mathbf{2^{-6}} + \mathbf{2^{-9}} + \mathbf{2^{-10}} +$$

$$\mathbf{2^{-13}} + \mathbf{2^{-14}} + \mathbf{2^{-17}} + \mathbf{2^{-18}} + \mathbf{2^{-20}} =$$

$$\mathbf{5} + \mathbf{0.25} + \mathbf{0{,}03125} + \mathbf{0{,}015625} +$$

$$+ \mathbf{0{,}001953125} + \mathbf{0{,}000976562} +$$

$$+ \mathbf{0{,}00012207} + \mathbf{0{,}000061035} +$$

$$+ \mathbf{0{,}000007629} + \mathbf{0{,}000003815} + \underline{\mathbf{0{,}000000954}} =$$

$$= \mathbf{5{,}299999237} + \underline{\mathbf{0{,}000000954}} = \mathbf{5{,}300000191}$$

Примеры вещественных чисел с одинарной точностью (7)

$$(e, f, s) = s1.f \cdot b^{e-q}$$

Десятичное представление	5.1
Двоичное представление	$1 \cdot 2^{-4} = 101.0\ 0011\ 0011\ 0011\ldots$
Результат упаковки (hex)	40 a3 33 33
Двоичное представление	0100 0000 1010 0011 0011 0011 0011 0011
f	1.010 0011 0011 0011 0011 0011
e	$0100\ 0000_2 = 81_{16} = 129_{10}$
s	0 (~ "+")

$$(127, 0, 0) = +1.010\ 0011\ 0011\ \ldots \cdot 2^{129-127} =$$

$$1.010\ 0011\ 0011\ \ldots \cdot 2^2 = 101.0\ 0011\ 0011\ \ldots.$$

© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Анализ внутреннего представления числа 5.1_{10} в типе float

$$\mathbf{1}.010\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011_2 \cdot \mathbf{2^2} =$$

$$= 101.0\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011_2 =$$

$$\mathbf{5} + \mathbf{2^{-4}} + \mathbf{2^{-5}} + \mathbf{2^{-8}} + \mathbf{2^{-9}} +$$

$$\mathbf{2^{-12}} + \mathbf{2^{-13}} + \mathbf{2^{-16}} + \mathbf{2^{-17}} + \mathbf{2^{-20}} + \mathbf{2^{-21}} =$$

$$\mathbf{5} + \mathbf{0{,}0625} + \mathbf{0{,}03125} +$$

$$\mathbf{0{,}00390625} + \mathbf{0{,}001953125} +$$

$$+ \mathbf{0{,}000244141} + \mathbf{0{,}00012207} +$$

$$+ \mathbf{0{,}000015259} + \mathbf{0{,}000007629} +$$

$$\mathbf{0{,}000000954} + \mathbf{0{,}000000477} = \mathbf{5{,}099999905}$$

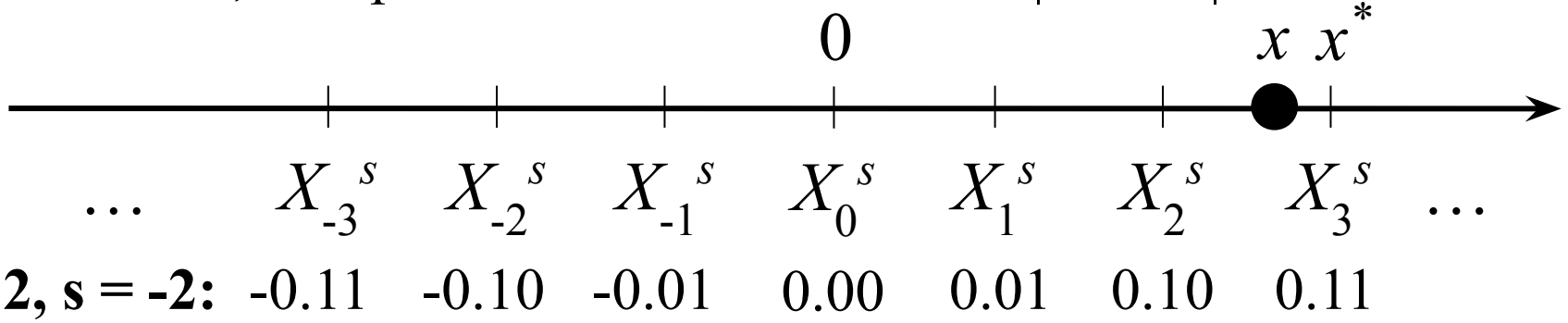
Ошибки округления

- Технические средства **не позволяют** хранить числа, заданные бесконечными дробями
- Необходима замена любого числа конечной дробью, ограниченной доступным количеством разрядов. Данная операция называется *округлением*.
- Округлением числа $x = \pm d_n \ldots d_{s+1} d_s d_{s-1} d_{s-2}$ до s разрядов в заданной СС называется его замена числом $x_s = \pm d_n \ldots d_{s+1} d_s$, в котором разряды $(s-1)$, $(s-2)$, … являются нулевыми.
- Разность $(x - x_s)$ называется *ошибкой округления*.

Способы округления

1. Отбрасывание разрядов (s – 1), (s – 2),… как это реализовано для целых чисел. **Достоинством** данного подходя является простота реализации в аппаратуре. **Недостатком** служит то, что знак ошибки ($x^* - x$) всегда противоположен знаку x.

2. Округление по правилам, используемым в школе. Вещественные числа X_i^s, имеющие нулевые младшие разряды (s – 1), (s – 2), … располагаются на числовой оси с шагом b^s, как показано на рисунке. При этом среди этих чисел есть число x^*, которое наиболее близко к x и $| x^* - x | \le b^s$



© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Примеры применения алгоритмов округления для числа 5.3_{10}

Отбрасывание разрядов:

$$\mathbf{5.3} = 101.01\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011_2 =$$

$$5{,}299999237 + \mathbf{2^{-21}} = 5{,}299999714$$

$$5{,}299999714 - 5{,}3 = -\,2.86 \cdot 10^{-7}$$

Округление с использованием школьной арифметики

$$\mathbf{5.3} = 101.01\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011_2 =$$

$$101.01\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 001 + 2^{-21} =$$

$$101.01\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 010 =$$

$$5{,}299999237 + \mathbf{2^{-20}} = 5{,}300000191$$

$$5{,}300000191 - 5{,}3 = 1.91 \cdot 10^{-7}$$

Примеры применения алгоритмов округления для числа 5.1_{10}

Отбрасывание разрядов:

$$\mathbf{5.1} = 101.0\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 1\ \sout{0011}_2 =$$

$$5{,}099999905$$

$$5{,}099999905 - 5{,}1 = -\ 0.95 \cdot 10^{-7}$$

Округление с использованием школьной арифметики

$$\mathbf{5.1} = 101.0\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 1\ \sout{0011}_2 =$$

$$5{,}099999905$$

$$5{,}099999905 - 5{,}1 = -\ 0.95 \cdot 10^{-7}$$

Машинный ноль

$$(e, f, s) = s1.f \cdot b^{e-q}$$

Десятичное представление	0
Двоичное представление	0
Результат упаковки (hex)	00 00 00 00
Двоичное представление	0 000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000
f	1.000 0000 0000 0000 0000 0000
e	$0000\ 0000_2 = 00_{16} = 0_{10}$
s	0 (~ "+")

$$(0, 0, 0) = +1.000\ 0000\ 0000\ \ldots \cdot 2^{0-127} =$$

$$1.000\ 0000\ 0000\ \ldots \cdot 2^{-127} = 2^{-127}$$

© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Машинный ноль

- Число ω, для которого $f = 0$, мантисса $m = 1.0$, а порядок e принимает наименьшее значение (для float $e = 0 \Rightarrow (e - q) = -127$) называется машинным нулем.
- Оно совпадает с минимальным положительным числом, которое может быть представлено числом с плавающей точкой при заданных размерностях f и e (для float размерность f – 23 бита, e – 8 бит).
- Любое число $x < \omega$ рассматривается как 0.

Погрешности измерений

- **Абсолютная погрешность** (Δx) − разность между приближенным значением некоторой величины и ее точным значением: $\Delta x = | x_п - x_т |$, где $x_т$ – точное значение, а $x_п$ – приближенное.
- **Относительная погрешность** (δx) – погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерения к действительному или измеренному значению измеряемой величины:

$$\delta x = \Delta x / x_п,$$

$$\delta x = \Delta x / x_т .$$

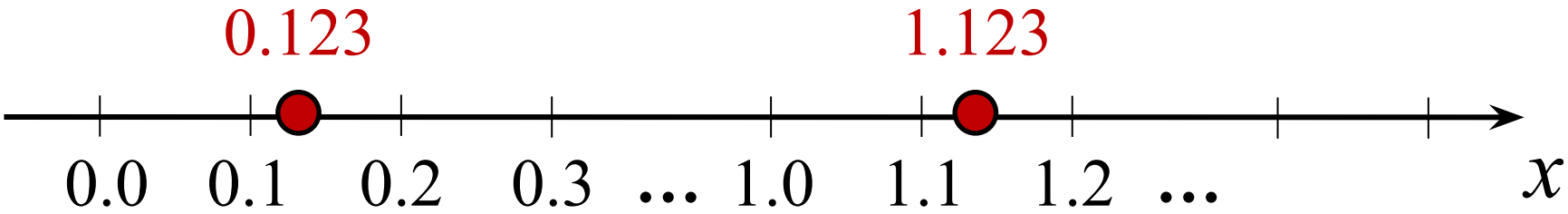
δx является безразмерной величиной

Погрешность представления вещественных чисел

- В отличие от чисел с фиксированной точкой, сетка чисел, которые способна отобразить арифметика с плавающей точкой, неравномерна: она более густая для чисел с малыми порядками и более редкая — для чисел с большими порядками.
- Для чисел с фиксированной точкой постоянным является *порядок* абсолютной погрешности.
- Для чисел с плавающей точкой постоянным является *порядок* относительной погрешности.

Погрешности вещественных чисел с фиксированной точкой

Рассмотрим 2-хразрядные числа с фиксированной точкой, один разряд отводится под целую часть, второй – под дробную.



$$\Delta x_1 = | x_п - x_т | = | 0.123 - 0.1 | = 0.023, \text{ порядок } 10^{-2}.$$

$$\Delta x_2 = | x_п - x_т | = | 1.123 - 1.1 | = 0.023, \text{ порядок } 10^{-2}.$$

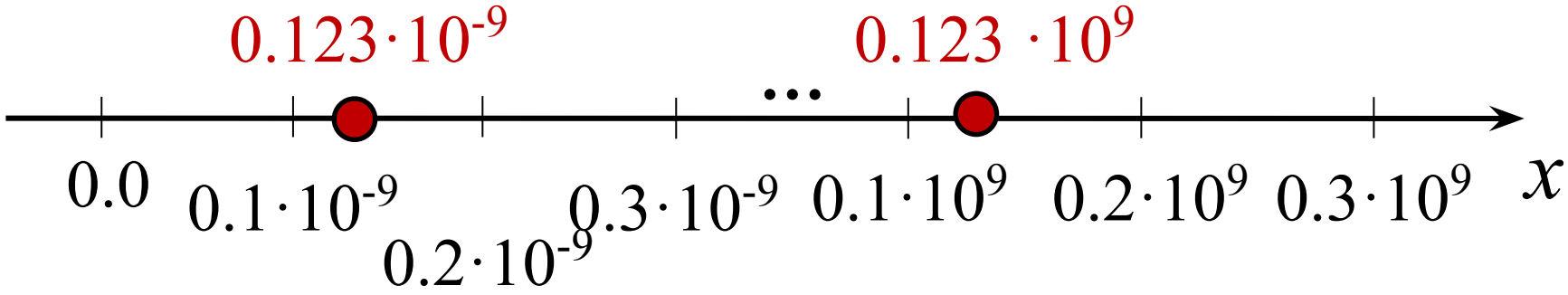
$$\delta x_1 = \Delta x / x_п = 0.023/0.123 \approx 0.186, \text{ порядок } 10^{-1}$$

$$\delta x_2 = \Delta x / x_п = 0.023/1.123 \approx 0{,}020 \text{ , порядок } 10^{-2}$$

© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Погрешности вещественных чисел с плавающей точкой

Рассмотрим 2-хразрядные числа с плавающей точкой, один разряд отводится под мантиссу, второй – под порядок.



$$\Delta x_1 = | x_п - x_т | = 0.023 \cdot 10^{-9}, \text{ порядок } 10^{-10}.$$

$$\Delta x_2 = | x_п - x_т | = 0.023 \cdot 10^{9}, \text{ порядок } 10^{8}.$$

$$\delta x_1 = \Delta x / x_п = 0.023 \cdot 10^{-9} / 0.123 \cdot 10^{-9} \approx 0.186, \text{ порядок } 10^{-1}$$

$$\delta x_2 = \Delta x / x_п = 0.023 \cdot 10^{9} / 0.123 \cdot 10^{9} \approx 0.186, \text{ порядок } 10^{-1}$$

© Кафедра вычислительных систем ГОУ ВПО «СибГУТИ»

Машинный эпсилон

Машинным эпсилоном называется наименьшее положительное число ε такое, что

$$1 \oplus \varepsilon \neq 1,$$

где $\oplus$ – машинное сложение.

Пример:

Пусть даны два числа: a и $b = a + \gamma$.

Если $\gamma < a \cdot \varepsilon$, то с точки зрения машины $a = b$.

$$a < a \cdot (1 \oplus \gamma) < a \cdot (1 \oplus \varepsilon)$$

$$1 \oplus \gamma = 1$$

Программа поиска машинного эпсилона

```
#include <stdio.h>
int main()
{
   float e,e1;
   int k=0;
   e=1.0;
   do
   {
      e=e/2.0;
      e1=e+1.0;
      k++;
   } while (e1>1.0);
   printf("Число делений на 2: %d\n",k);
   printf("Машинный эпсилон: %e\n",e);
   return 0;
}
```

Результаты работы:

```
Число делений на 2: 24
Машинный эпсилон: 5.960464e-08
```

Алгоритм сложения чисел с плавающей точкой

Задача: найти число $\omega = \upsilon \oplus \nu$

a : $(2p + 1)$ разрядный аккумулятор

1 ввод υ, ν

2 распаковать $\upsilon \rightarrow (e_\upsilon, \pm f_\upsilon)$ и $\nu \rightarrow (e_\nu, \pm f_\nu)$

3 если $e_\nu > e_\upsilon$ то $\upsilon \leftrightarrow \nu$ $(e_\nu \leftrightarrow e_\upsilon$ и $f_\upsilon \leftrightarrow f_\nu)$ конец если

4 $e_\omega = e_\upsilon$

5 если $(e_\upsilon - e_\nu) \geq p + 2$ то $f_\omega = f_\upsilon$

6 иначе

7 сдвиг $f_\nu >> (e_\upsilon - e_\nu) \Rightarrow a = f_\nu / b^{(e\upsilon - e\nu)}$

8 $a = f_\upsilon + a, f_\omega = окр(a, p)$

9 конец если

10 нормализация $(e_\omega, \pm f_\omega)$ и упаковка $(e_\omega, \pm f_\omega) \rightarrow \omega$

Алгоритм нормализации чисел с плавающей точкой

почему?

Задача: обеспечить для числа $\omega = (e_\omega, \pm f_\omega)$, $f_\omega < b$

выполнение условия: $1/b \le |f_\omega| < 1$

1 ввод ω

2 распаковать $\upsilon \to (e_\upsilon, \pm f_\upsilon)$ и $\nu \to (e_\nu, \pm f_\nu)$

3 если $e_\nu > e_\upsilon$ то $\upsilon \leftrightarrow \nu$ ($e_\nu \leftrightarrow e_\upsilon$ и $f_\upsilon \leftrightarrow f_\nu$) конец если

4 $e_\omega = e_\upsilon$

5 если $(e_\upsilon - e_\nu) \ge p + 2$ то $f_\omega = f_\upsilon$

6 иначе

7 сдвиг $f_\nu >> (e_\upsilon - e_\nu) \Rightarrow a = f_\nu / b^{(e\upsilon - e\nu)}$

8 $a = f_\upsilon + a, f_\omega = окр(a, p)$

9 конец если

10 нормализация $(e_\omega, \pm f_\omega)$ и упаковка $(e_\omega, \pm f_\omega) \to \omega$

ИТОГИ

- Рассмотрены внутренние представления целых чисел:
  - целых чисел без знака
  - целых чисел со знаком
    - прямой код, обратный код, дополнительный код;
    - арифметические действия (сложение и вычитание) над знаковыми числами в дополнительном коде.
- Внутреннее представление вещественных чисел:
  - вещественные числа с фиксированной и плавающей запятой;
  - упаковка вещественных чисел;
  - понятие машинного нуля, понятие погрешности вычислений, понятие машинного эпсилона;
  - арифметические действия (сложение и вычитание) над вещественными числами с плавающей точкой.

ЛИТЕРАТУРА

1) Кнут, Д.Э. Искусство программирования. Том 2. Получисленные алгоритмы. – Вильямс, Addison Wesley Longman, 2000. – 500 с. – (Серия: Искусство программирования). – ISBN 0-201-89684-2.

2) Воеводин, В.В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. – М.: Изд-во МГУ, 2006. – 112 с. – ISBN 5-211-05310-9.

3) Вылиток, А.А. Представление чисел в ЭВМ cmcmsu.no-ip.info/download/pc.number.representation.pdf

4) Википедия, стандарт IEEE 754 1985 года http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754-1985.

5) Википедия, стандарт IEEE754 2008г. http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754-2008.