Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах (термодинамика и экономика)

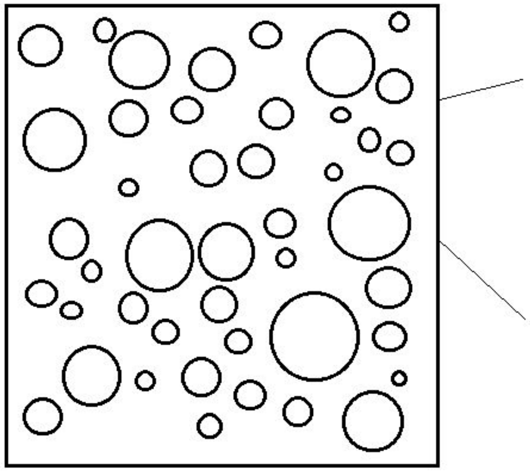
Исследовательский центр системного анализа

Макросистемы (МС)

Основная тематика ИЦ связана с исследованием оптимальных процессов и предельных возможностей макросистем с приложениями к необратимой термодинамике и экономике.

Макросистемы (МС) – системы, состоящие из большого числа индивидуально неуправляемых элементов (молекул в термодинамике, элементарных экономических агентов в экономике, индивидуумов в процессах миграции и пр.). Управление в таких системах возможно только на макроуровне, изменением воздействий, влияющих на все множество микроэлементов.

МС: термодинамика, экономика, миграция, сегрегированные системы



Экстенсивные

$V, U, \ldots, N_0, N$

Интенсивные

$T, \mu, P, \ldots, p, c$

При феноменологическом подходе к макросистемам их состояние характеризуют двумя типами переменных: *экстенсивными* и *интенсивными*. Первые пропорциональны масштабу системы, а вторые от масштаба системы не зависят.

Типы равновесных МС

Системы бесконечной емкости, у которых интенсивные переменные постоянны или изменяются во времени независимо от значений экстенсивных переменных (термодинамические резервуары, рынки совершенной конкуренции).

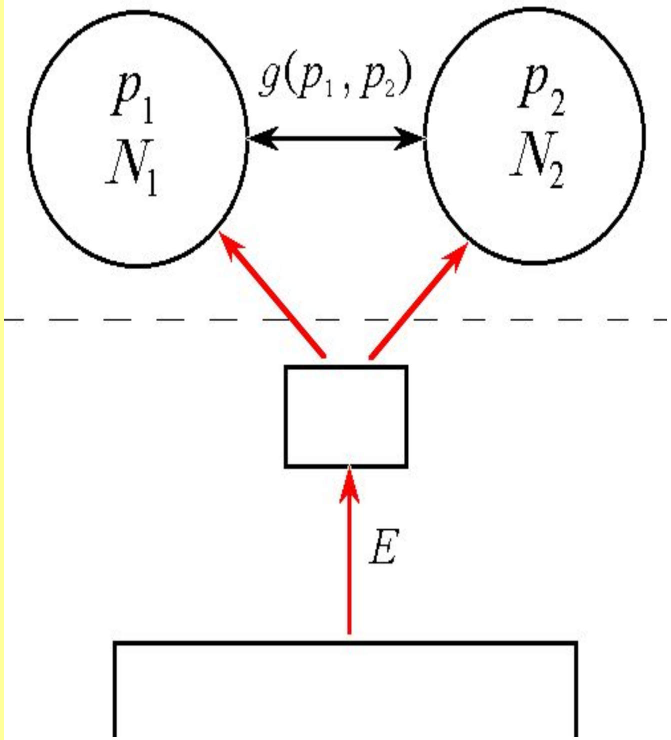
Системы конечной емкости, у которых интенсивные переменные зависят от экстенсивных (термодинамическая система ограниченного объема, экономическая система с ограниченными запасами ресурсов).

Активные системы, у которых значениями интенсивных переменных можно управлять независимо от экстенсивных (рабочее тело тепловой машины, посредническая или производственная фирма, дилер на финансовых рынках).

Важной особенностью макросистем является то обстоятельство, что при их взаимодействии возникают процессы обмена, приводящие к возникновению потоков, которые изменяют экстенсивные переменные систем так, что в системах конечной емкости интенсивные переменные выравниваются. Эти «естественные» процессы протекают без какого-либо воздействия окружающей среды. Для возврата контактировавших систем в исходное состояние требуется привлечение из окружения некоторого ресурса. Такие процессы называют *необратимыми*.

Одной из характеристик макросистем является количественная мера необратимости процессов, изменение которой характеризует тот объем ресурса, который потребуется привлечь для возврата макросистем в исходное состояние после необратимого процесса. В термодинамике мерой необратимости является энтропия, в экономике - функция благосостояния, на которой мы ниже остановимся подробнее. И ту и другую далее будем обозначать через S. Для любого процесса в макросистеме мера необратимости не убывает, если же она возрастает, то скорость ее роста называют *диссипацией*.

Необратимость и кинетика



«Естественные процессы»

$$\lim_{t\to\infty}\left(p_1(t)-p_2(t)\right)=0$$

$$\dot{N}_1=-\dot{N}_2=g(p_1,p_2)$$

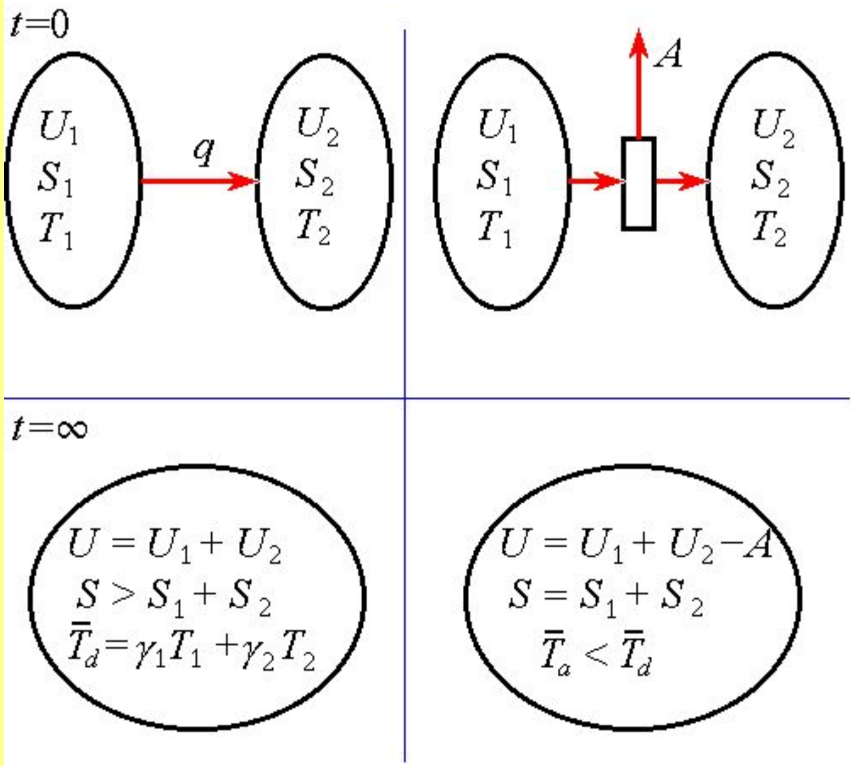
Мера необратимости,

диссипация

$S,$ σ

Ключевой пример

термодинамика



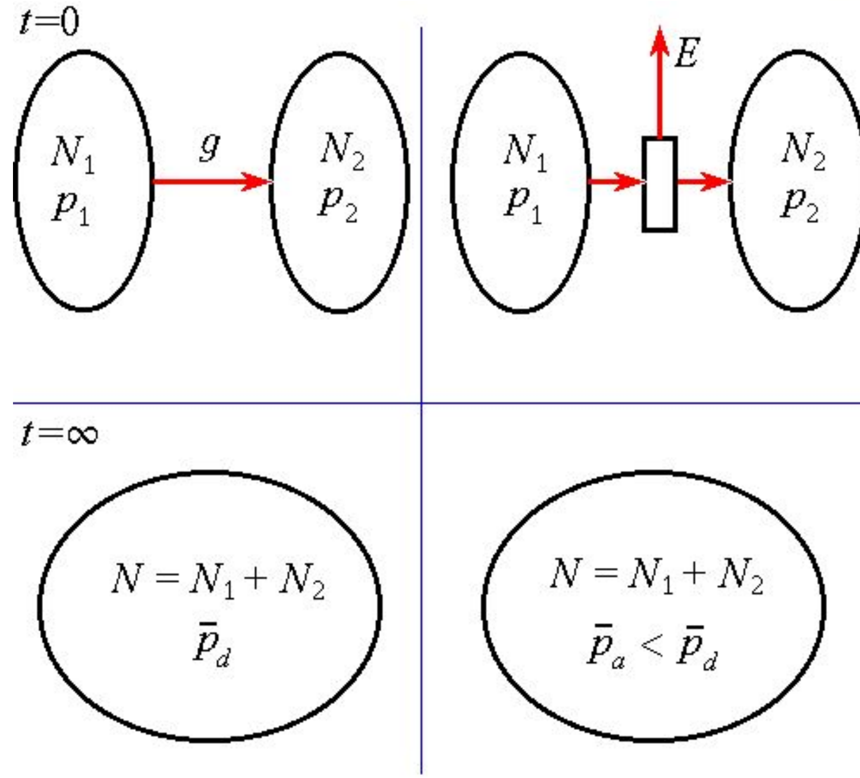
Необратимый:

$\Delta S > 0, \quad A = 0$

Обратимый:

$\Delta S = 0, \quad A > 0$

микроэкономика



Необратимый:

$? > 0, \quad E = 0$

Обратимый:

$? = 0, \quad E > 0$

Основные задачи

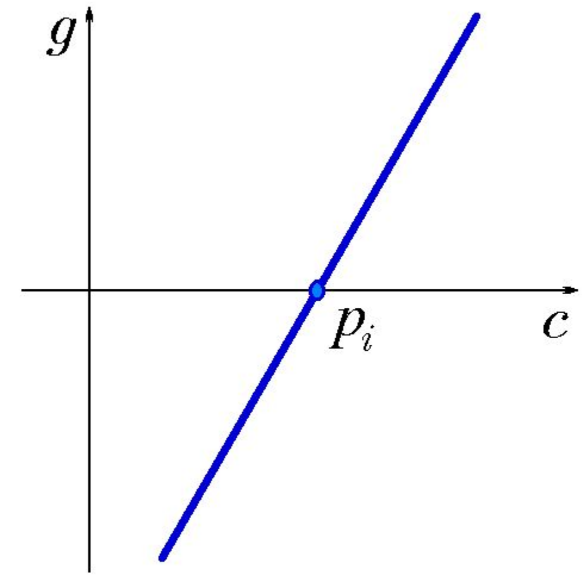
1. Процессы минимальной диссипации .
2. Стационарное состояние ОС, включающей посредника.
3. Предельные возможности посредника в замкнутых, открытых и нестационарных МС.
4. Количественная мера необратимости в микроэкономике.
5. Область реализуемых состояний МС.

Мера необратимости в микроэкономических системах

Экономический агент

$N \in R^{n+1}$ запасы ресурсов и капитала (N_0)

$p_i(N)$ оценка i-го ресурса (равновесная цена)

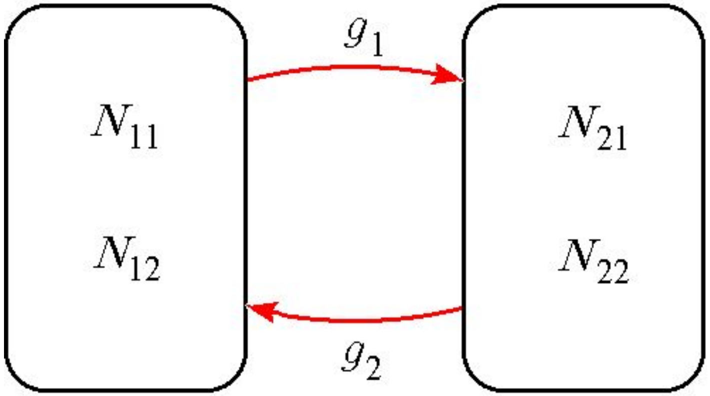


Существует функция благосостояния $S(N)$ такая, что

$$dS = p_0(N)\left[dN_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i(N)dN_i\right], \quad p_0(N) > 0$$

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial N_0}, \quad p_i = \frac{1}{p_0}\frac{\partial S}{\partial N_i}, \quad \frac{\partial}{\partial N_i}\left(p_0 p_j\right) = \frac{\partial}{\partial N_j}\left(p_0 p_i\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial N_i \partial N_j}$$

Принцип добровольности



$dS_i \geq 0, \;\; i=1,2$

Если p_{1i} и p_{2i} имеют одинаковый знак, то обмен должен происходить не менее, чем двумя потоками.

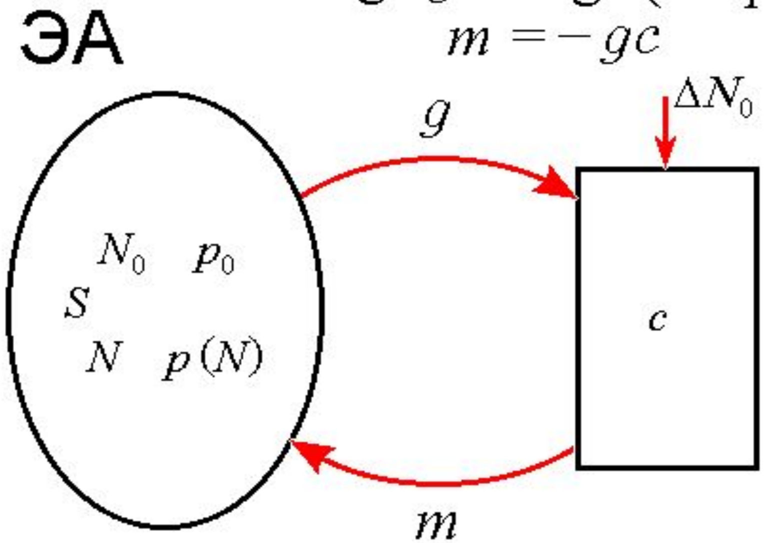
При $\quad p_1 = p_2 \quad g(p_1, p_2) = 0,$

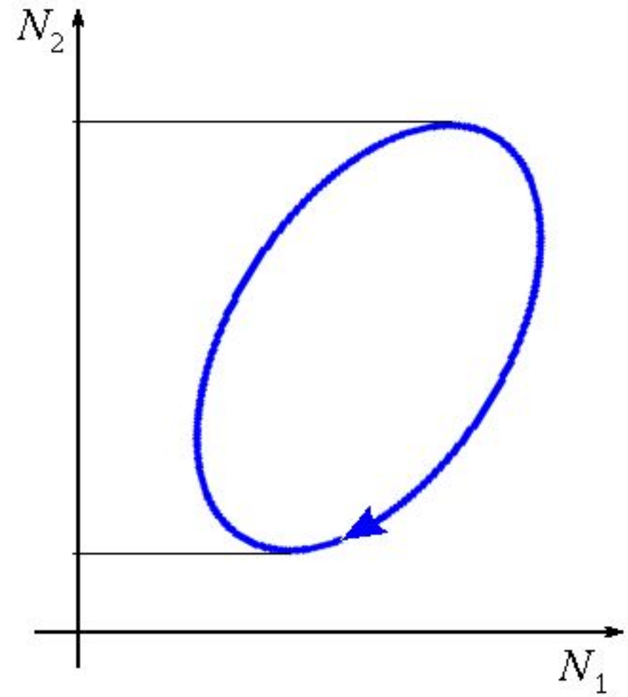
$$S_{рез} = p_0\left(N_0 + \sum_i p_i N_i\right), \quad p_0, p_i - \text{const},$$

$S_a = p_0(N_0)N_0 \quad -$ извлечение капитала

Диссипация капитала

$$\operatorname{sign} g = \operatorname{sign}(c-p)$$
$$m = -gc$$





Время процесса τ бесконечно

$$c(t) = p(t), \qquad \oint dS = 0 \Rightarrow \Delta N_0 = 0$$

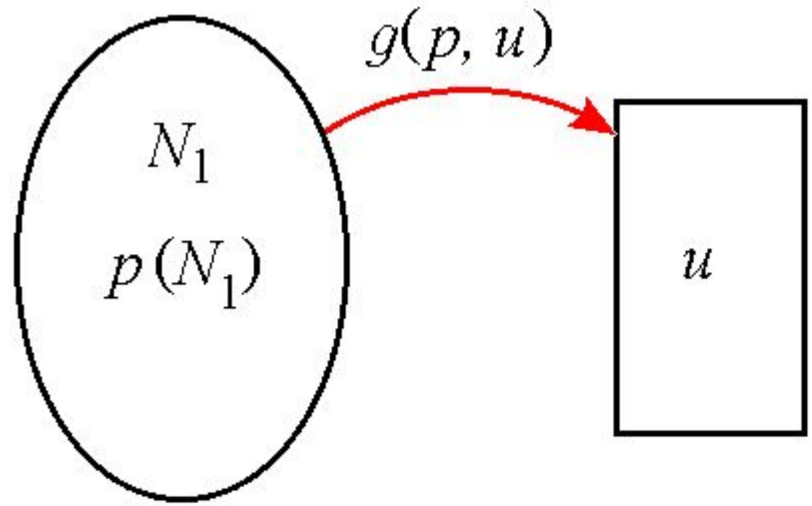
Время процесса τ ограничено

$$\Delta S = p_0 \int_0^\tau g(c,p)(c-p)dt > 0 \qquad \Delta N_0 = \int_0^\tau g(c,p)(c-p)dt = \frac{\Delta S}{p_0}.$$

$\sigma = g(c, p)(c-p)$ диссипация капитала (торговые издержки)

Процессы минимальной диссипации термодинамика (1)

Рассмотрим процесс обмена подсистемы конечной емкости и активной подсистемы конечной продолжительности. Поток зависит только от интенсивных переменных, одна из которых зависит от экстенсивной переменной, а другая является управлением. Производство энтропии представляет собой произведение потока на движущую силу. Скорость изменения экстенсивной переменной зависит от потока. Пусть, кроме того, средняя интенсивность потока задана. Задача о минимальной диссипации примет вид:



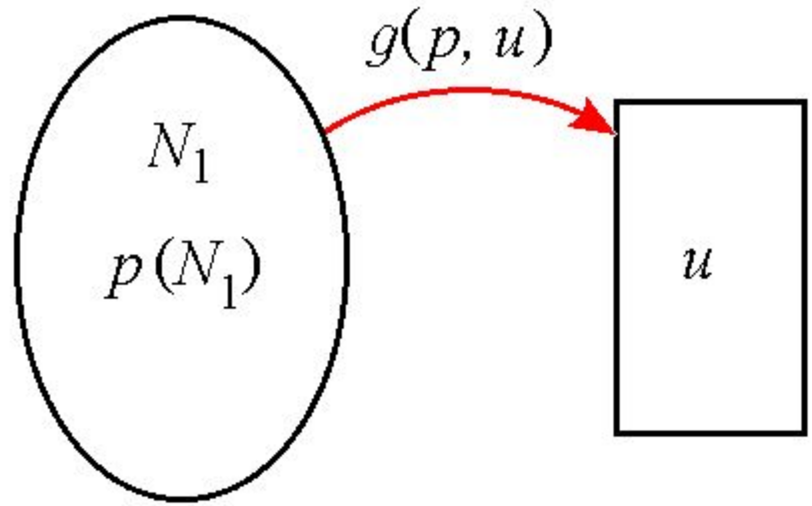
Процессы минимальной диссипации термодинамика (2)

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(p,u)X(p,u)dt \to \min_{u(t)}$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(p,u)dt = \overline{g}$$

$$\dot{N}_1 = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = \varphi(p,u),$$

$$p(0) = p_0, \quad \varphi \neq 0 \left(p \neq u\right)$$



Для случая

$\phi = \alpha(p)g(p, u)$

получим:

$$\boxed{\frac{g^2}{\partial g/\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = \mathrm{const}}$$

Процессы минимальной диссипации термодинамика (3)

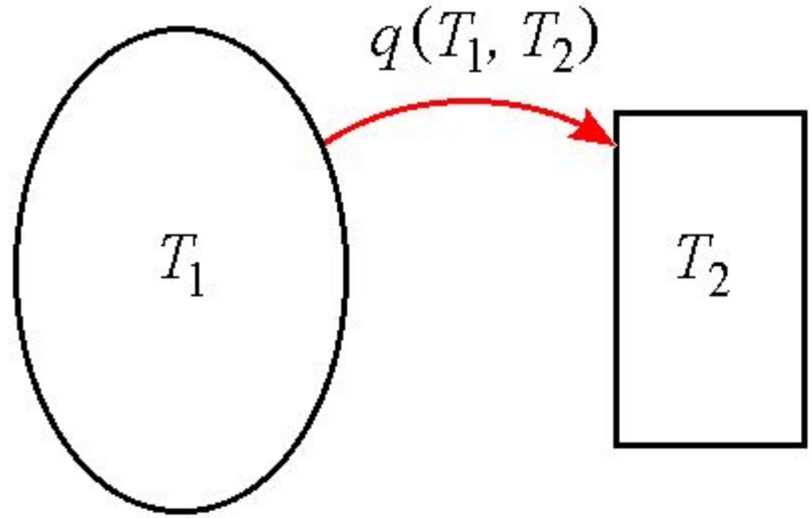
Теплоперенос:

$$p \sim T_1,\ u \sim T_2$$

$$g \sim q = \alpha(T_1 - T_2),$$

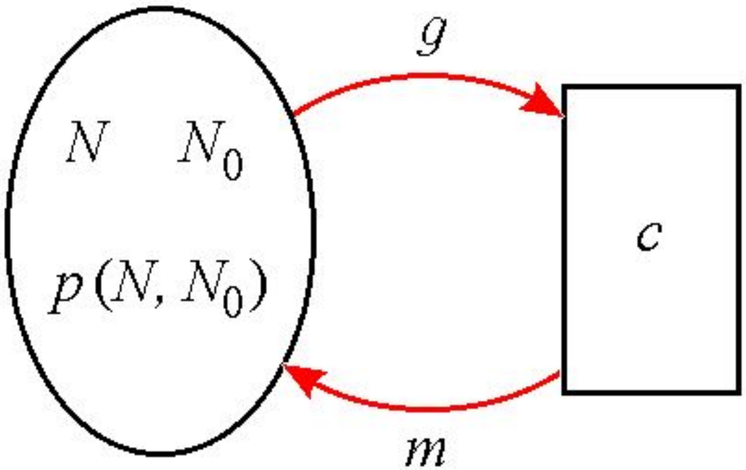
$$\varphi(T_1, T_2) = \frac{q}{c(T_1)}$$

$$X = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$$



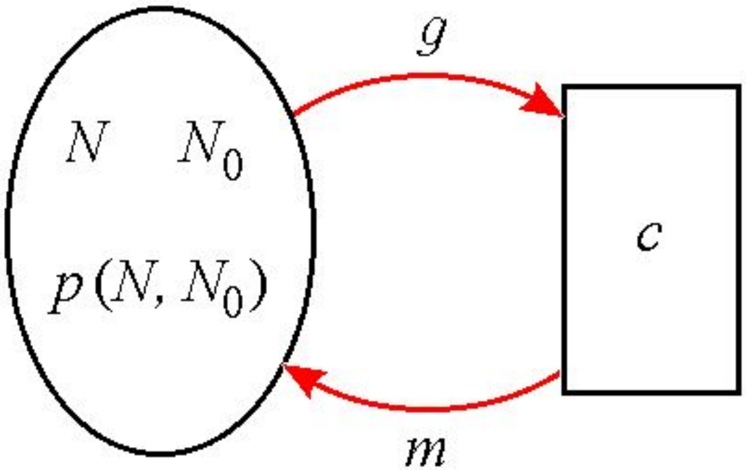
$$\boxed{\frac{T_1(t)}{T_2(t)} = \mathrm{const}}$$

Процессы минимальной диссипации микроэкономика (1)



Так как диссипация капитала представляет собой интенсивность потерь посредника при покупке ресурса (переплата) или при его продаже (скидка) по сравнению с равновесными ценами, то минимуму диссипации соответствует минимум капитала экономического агента в конце процесса покупки (продажи) ресурса, если количество ресурса и продолжительность процесса заданы. Для скалярного ресурса приходим к задаче:

Процессы минимальной диссипации микроэкономика (2)



$$N_0(\tau) \to \min_{c(t)}$$

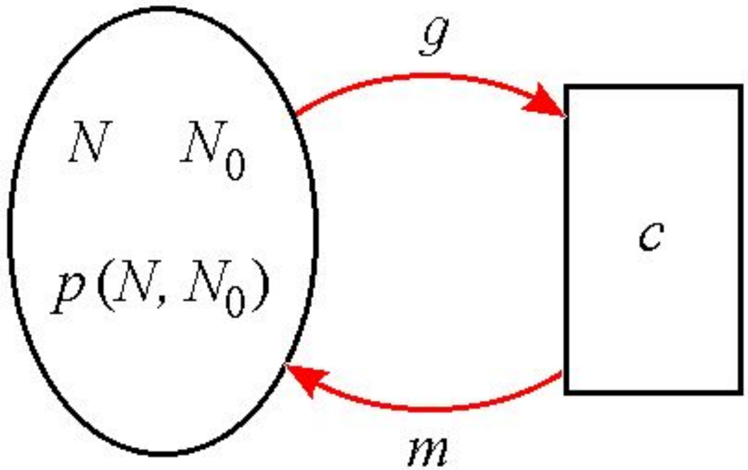
$$\frac{dN_0}{dt} = cg(c, p), \quad N_0(0) = N_0^0,$$

$$\frac{dN}{dt} = -g(c, p), \quad N(0) = N^0,$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau g(c, p)dt = \bar{g}.$$

$$\boxed{\frac{d}{dN}\left[\frac{\partial g/\partial c}{g^2}\right] = \frac{(\partial g/\partial p)(\partial p/\partial N_0)}{g^2}}$$

Процессы минимальной диссипации микроэкономика (3)



Если $\dfrac{\partial p}{\partial N_0} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial g / \partial c}{g^2} = \text{const}}$$

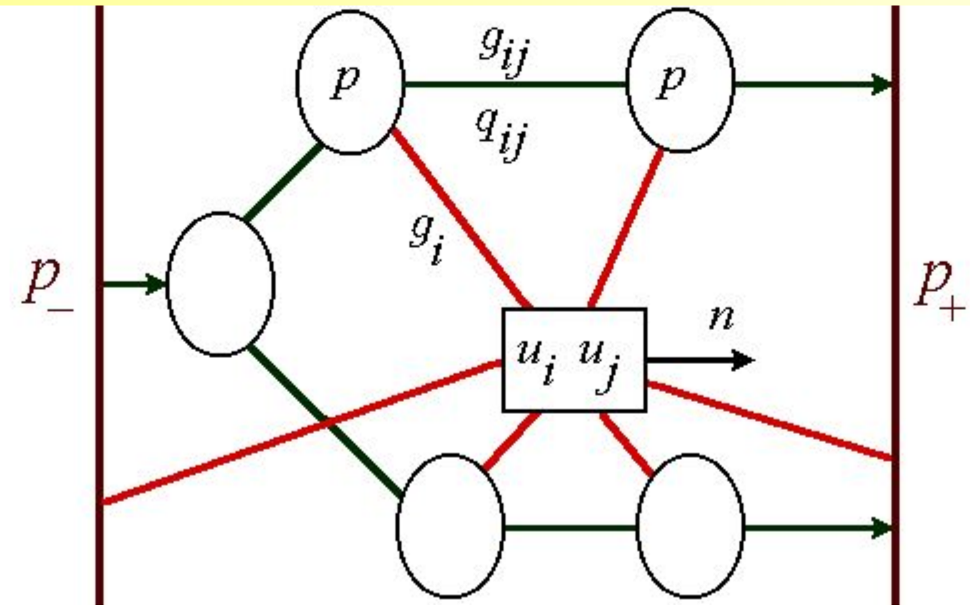
$$g = \alpha\bigl(c - p(N)\bigr) \quad \Rightarrow \quad g\bigl(c^*(t), p(t)\bigr) = \text{const} \quad \forall t$$

Стационарное состояние открытых МС (1)

Будем рассматривать открытую систему, состоящую из m внутренне равновесных подсистем, двух резервуаров и активной подсистемы. Между всеми подсистемами возникают потоки, зависящие от различия их интенсивных переменных, так что в целом система неравновесна.

В стационарном режиме потоки отличны от нуля, если число резервуаров больше двух и их интенсивные переменные различны. Для простоты рассмотрим систему с двумя резервуарами. Активная система может контактировать как с резервуарами, так и с любой из подсистем, устанавливая в точках контакта значения интенсивных переменных. Требуется выбрать такие значения переменных u, чтобы извлекаемый ею поток «организованной» энергии (работы, работы разделения, электрической энергии) был максимален.

Стационарное состояние открытых МС (2)



Термодинамика

n – мощность, p_{1i}~T_i

q – тепло,

g – вещество,

p – интенсивные переменные

$$n = \sum_i \left[q_i(p_i, u_i) + g_i(p_i, u_i) \right] \to \max_u$$

при $\sum_j q_{ij}(p_i, p_j) = q_i,$ $\sum_j g_{ij}(p_i, p_j) = g_i,$

$$\sum_i g_i = 0,$$

$$\sum_j \left[g_{ij} s_{ij} + \frac{q_{ij}}{p_{1j}} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad \sum_i \left[g_i s_i + \frac{q_i}{u_{1i}} \right] = 0.$$

Стационарное состояние открытых МС (3)

Если $g = 0$, $\quad q_{ij} = \alpha_{ij}(T_i - T_j)$, то

$$\sum_i \alpha_i \frac{T_i}{u_i} = \sum_i \alpha_i; \quad u_i^2 = \Lambda \frac{T_i}{1-\lambda_i}$$

$$\alpha_i \left(1 + \frac{\Lambda}{u_i} - \lambda_i \right) = \lambda_i \sum_j \alpha_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m$$

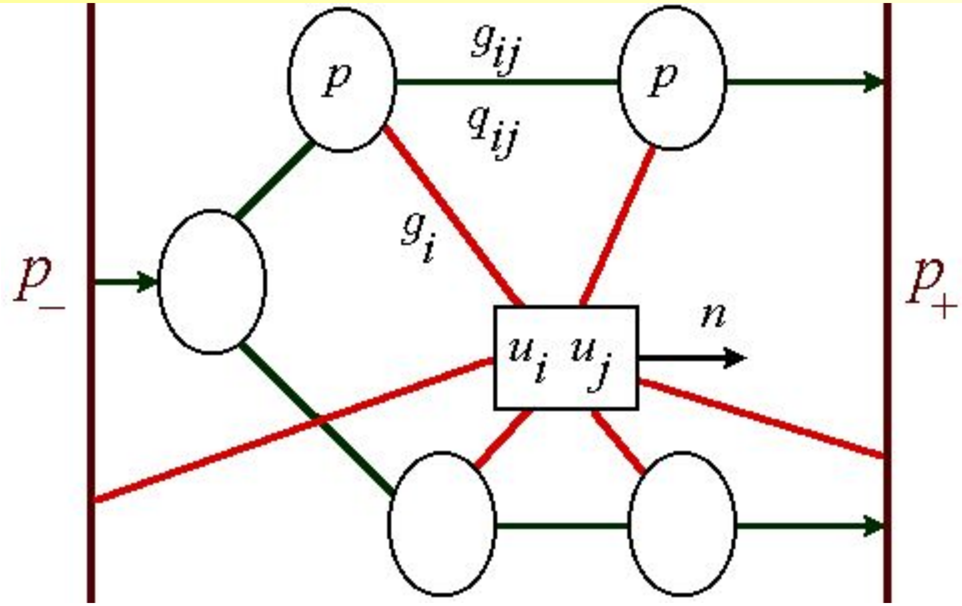
Если $m = 2$, $T_1 = T_+$, $T_2 = T_-$, то

$$u_1^* = k\sqrt{T_+}, \quad u_2^* = k\sqrt{T_-}, \quad \eta = 1 - \sqrt{\frac{T_-}{T_+}},$$

$$N_{\max} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\sqrt{T_+} - \sqrt{T_-} \right)^2$$ – предельная мощность тепловой машины

Экстремальный принцип Пригожина при $g = AX$ (A – матрица Онзагера) справедлив для любого u.

Стационарное состояние открытых МС (4)



Микроэкономика

u_i – цены,

p – оценки

$$n = -\sum_i g_i(p_i, u_i)u_i \to \max_{u,\,p}$$

$$\sum_j g_{ij}(p_i, p_j) = g_i, \quad \sum_i g_i = 0.$$

Стационарное состояние открытых МС (5)

Если $g_{ij} = \alpha_{ij}(p_j - p_j)$, $g_i = \alpha_i(u_i - p_j)$, то

$$u_i = 0{,}5\left(p_i + \lambda_i + \Lambda\right), \quad \Lambda - u_i + \lambda_i = -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\sum_j \alpha_{ij}.$$

Если $m = 2$, $p_1 = p_+$, $p_2 = p_-$, то

$$u_1 = \frac{2\alpha_1 p_- + \alpha_2\left(p_+ + p_-\right)}{2\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}, \quad u_2 = \frac{2\alpha_2 p_+ + \alpha_1\left(p_+ + p_-\right)}{2\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)},$$

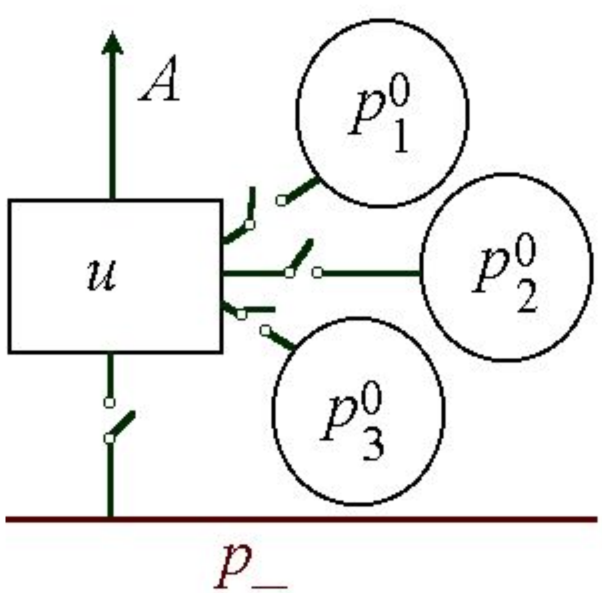
$$n_{\max} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{4\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}\left(p_+ - p_-\right)^2$$

Аналог экстремального принципа Пригожина для $g = A\Delta$ $\quad(\Delta_{ij} = p_i - p_j)$:

$$\sigma = 0{,}5\sum_{i,j}\Delta_{ij}^T A_{ij}\Delta_{ij} + \sum_i \Delta_i^T A_i \Delta_i \to \min_p \quad \forall u$$

Матрица A – симметрическая.

Оптимальные процессы



Работоспособность $A_{\max}(\tau)=?$

Управление $u(t) = (u_1, \ ..., \ u_m)$,

$h(t) = (h_1,...,h_m), \quad h_i = \{0, 1\}$

k – число условий на конечное состояние.

<u>Утверждения:</u>

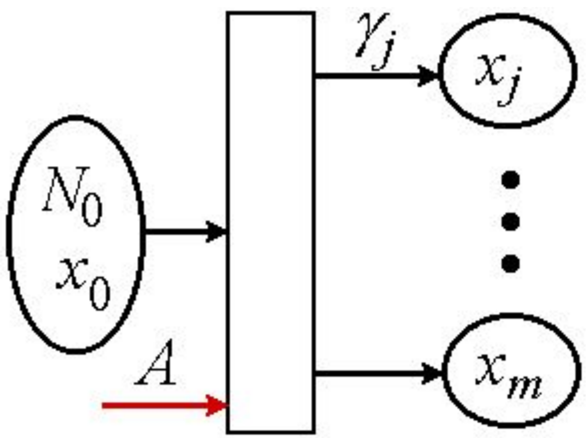
1. $u^*(t) \ \forall h$ – процессы минимальной диссипации,
2. Для резервуаров $\{u^*(t), h^*(t)\}$ – кусочно постоянная функция, которая принимает не более $k+1$ значений.
3. Энтропия системы $S(t)$ кусочно-линейная функция времени $\forall q, g$

Если $q_i = \alpha_i (u_i - T_i)$, $\dot{T}_i = -\dfrac{q_i}{c_i}$, $T_i(0) = T_{0i}$

$$A_\infty = \sum_i c_i \left[T_{0i} - T_i \left(1 + \ln \frac{T_{0i}}{T_-} \right) \right]$$ – эксергия

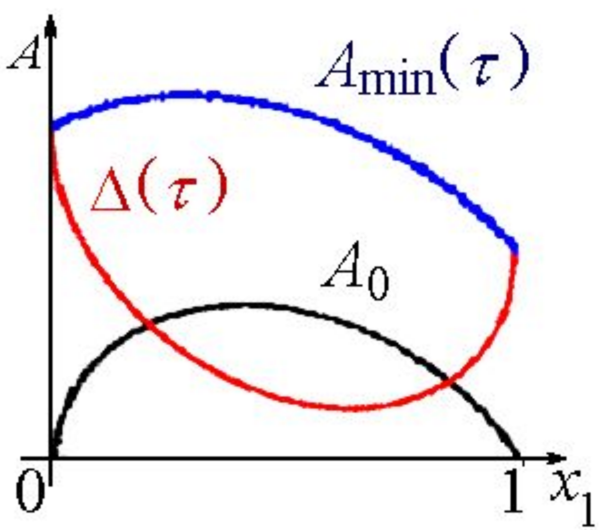
$$\begin{cases} A_\tau = Q_+(k) - Q_-(k), \\ Q_+ = \sum_i T_{0i} c_i \left[1 - \exp\left(-\dfrac{\tau \alpha_i (1 - k_i)}{c_i} \right) \right], \\ Q_- = \tau T_- \alpha_- \sum_i \dfrac{\alpha_i (1 - k_i)}{\alpha_- k_i - \alpha_i (1 - k_i)} \\ T_{0i} \exp\left(-\dfrac{\alpha_i \tau}{c_i} (1 - k_i) \right) = \dfrac{T_- \alpha_-^2}{\left(\alpha_- k_i - \alpha_i (1 - k_i) \right)^2} \end{cases}$$

Системы разделения



$$A_{\min}(\tau) = RTN_0 \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \sum_i x_{ij} \ln \frac{x_{ij}}{x_{i0}} + \sum_{j=0}^{m} \gamma_j^2 \sum_i \frac{x_{ij}^2}{\alpha_{ij}} = A_0 + \Delta(\tau)$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_j = \frac{N_j}{N_0}$$



На рисунке показаны первое слагаемое выражения для работы разделения – обратимая работа разделения, второе слагаемое – минимальные затраты из-за необратимости, и $A_{\min}$ для смеси из двух компонент и полного разделения. Видно, что обратимая оценка дает очень большую погрешность для «бедных» смесей.

Микроэкономика. Прибыльность =? (1)

Прибыльность – максимальный капитал, который можно извлечь в системе экономических агентов с разными начальными состояниями за время τ.

Заданы для каждого экономического агента начальные запасы ресурса, капитала и соответствующие им оценки. Система может включать или не включать резервуар. Посредник меняет цены закупок так, чтобы извлечь максимальную прибыль.

Микроэкономика. Прибыльность =? (2)

$$E(\tau) = \sum_i \left(N_{i0}(0) - N_{i0}(\tau)\right) \to \max_{c(t),h(t)}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{N}_i = -n_i(p_i, c_i), \quad N_i(0) = N_i^0; \\ \dot{N}_{i0} = c_i n_i(\cdot), \quad p_i = p_i(N_{i0}, N_i), \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

E_∞ – аналог эксергии.

τ – задано:

$c^*(t)$ удовлетворяет условиям минимальной диссипации при каждом контакте

$\Rightarrow \quad c_i^*(N_i, \overline{N}_i)$

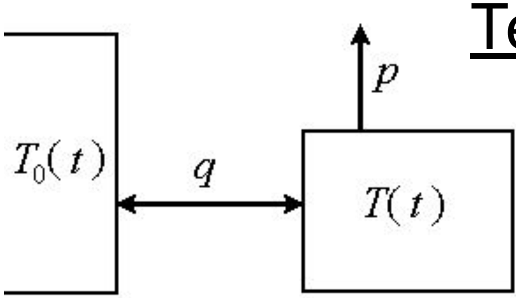
$\overline{N}_i^*$ удовлетворяют условиям

$$c_i^*(\overline{N}_i, \overline{N}_i) + \int_{N_i^0}^{\overline{N}_i} \frac{\partial c^*}{\partial \overline{N}_i} dN_i = \Lambda \quad \forall i, \quad \sum_i \overline{N}_i = \sum_i N_i^0.$$

Нестационарные резервуары (1)

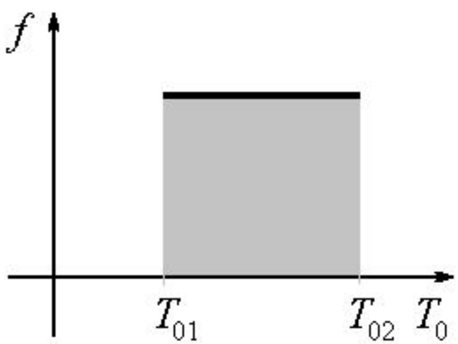
Для нестационарного случая извлечение работы в термодинамике и прибыли в микроэкономике возможно при взаимодействии не с несколькими, а только с одной подсистемой. Мы остановимся только на этом случае, хотя решение найдено и для нескольких нестационарных подсистем.

Нестационарные резервуары (2)



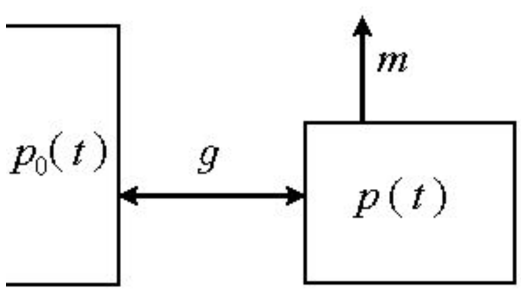
Термодинамика $\overline{p} = \overline{q(T_0(t), T)} \to \max\limits_{T(t)}$

$$\frac{1}{T^2}\frac{q}{\partial q/\partial T} - \frac{1}{T} = \text{const}$$



$$\overline{p}_{\max} = \alpha\left[\frac{T_{01} + T_{02}}{2} - \frac{4}{9}\left(\frac{T_{02}^{3/2} - T_{01}^{3/2}}{T_{02} - T_{01}}\right)^2\right]$$

Микроэкономика $\overline{m} = \overline{pg(p_0, p)} \to \max\limits_{p(t)}$



$$\frac{g}{\partial g/\partial p} + p = \frac{\int_0^\tau \frac{\partial q}{\partial p} p\,dt}{\int_0^\tau \frac{\partial q}{\partial p}\,dt}$$

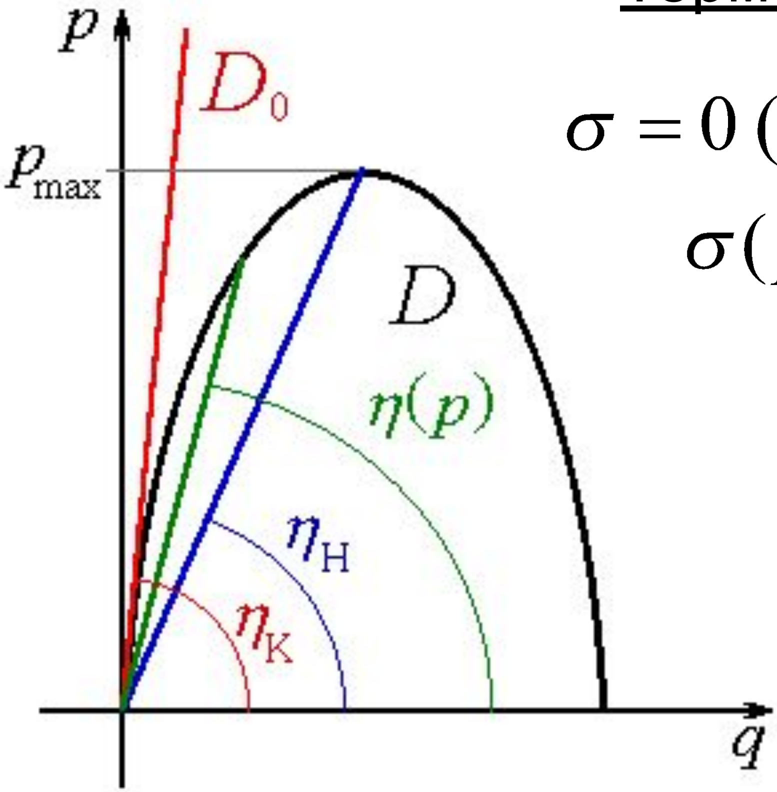
Область реализуемости (1)

Кроме прямых ограничений на состояние МС, наложенных в конкретной задаче, для этих систем характерны ограничения, возникающие из-за того, что в замкнутых системах показатель необратимости может только возрастать, а в открытых системах диссипация (энергии, капитала) неотрицательна.

Общая методология построения области реализуемости для замкнутых МС, включающих активные подсистемы, такова:

1. Записывают уравнения балансов, включая в их число балансовое соотношение по фактору необратимости *S*.
2. При ограничениях, наложенных на продолжительность процесса, находят минимальное значение $\sigma = \sigma_{min}$, при котором может быть достигнуто то или иное состояние. Этому значению соответствует процесс минимальной диссипации.
3. Уравнения балансов при условии $\sigma > \sigma_{min}$ определяют область реализуемости *D*.

Область реализуемости (2)



Термодинамика (тепловая машина)

$$\sigma = 0\,(\tau \to \infty,\, p \to 0) \sim D_0$$

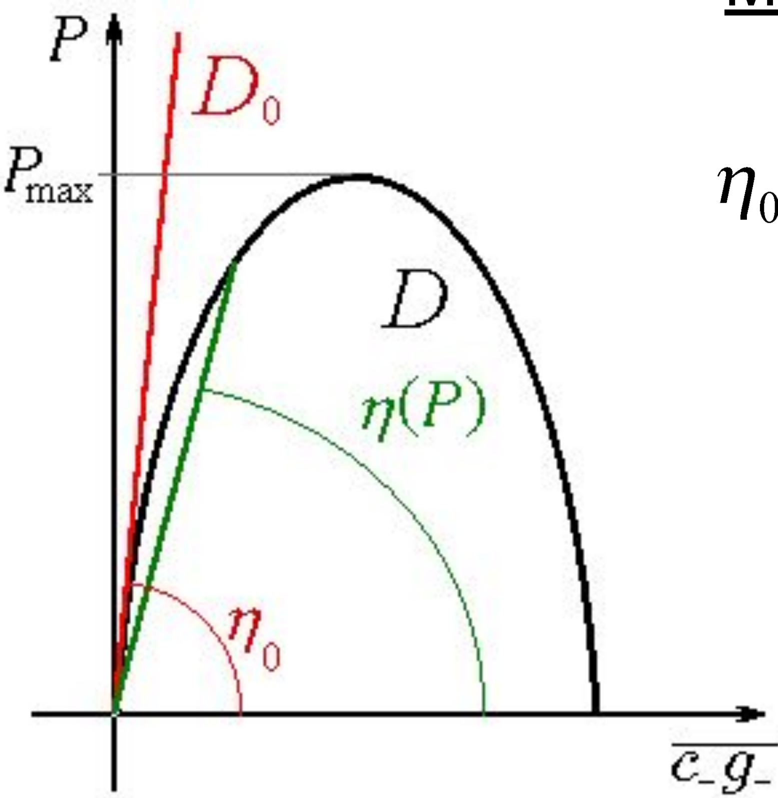
$$\sigma(p) > 0\,(\tau,\, p > 0) \sim D$$

$$D \subset D_0$$

$$\eta_K = 1 - \frac{T_-}{T_+}$$

$$\eta(p) = \frac{p}{q} \le \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\alpha T_+} + \eta_K\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{p}{\alpha T_+} + \eta_K\right)^2 - \frac{p}{\alpha T_+}}$$

Область реализуемости (3)



<u>Микроэкономика (посредник)</u>

$$\eta_0 = \frac{p_+}{p_-} - 1 \qquad g_i = \alpha_i \left(c_i - p_i \right)$$

$$\lambda = \frac{p_- \sqrt{\alpha_1} + p_+ \sqrt{\alpha_+}}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_+}}$$

$$P_{\max} = \frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{4\left(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}\right)} \left[\sqrt{\alpha_2}\left(p_+^2 - \lambda^2\right) + \sqrt{\alpha_1}\left(p_-^2 - \lambda^2\right) \right]$$

Математические модели и оптимальные процессы в макросистемах (термодинамика и экономика)

e-mail:
tsirlin@sarc.botik.ru