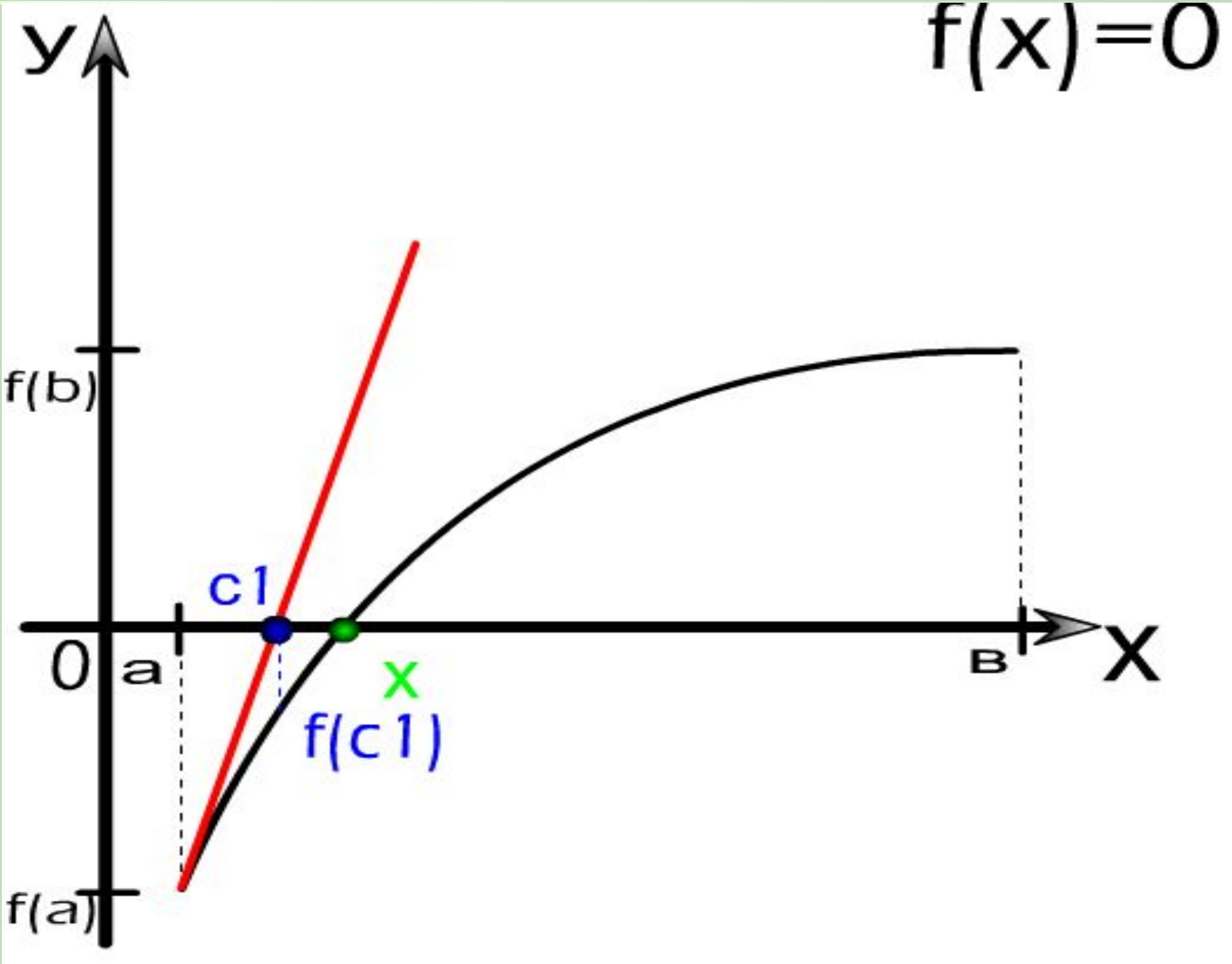
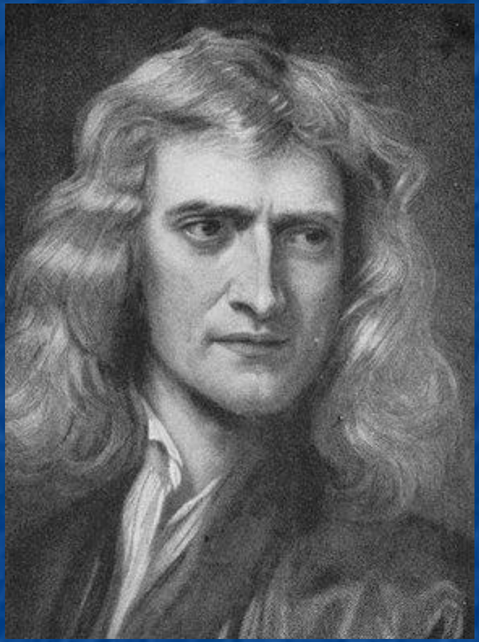
Метод Ньютона (метод касательных)



Историческая справка

- Метод был впервые предложен английским физиком, математиком и астрономом Исааком Ньютоном, под именем которого и обрёл свою известность.
- Впервые метод был опубликован в трактате *Алгебра* Джона Валлиса в 1685 году, по просьбе которого он был кратко описан самим Ньютоном.



Исаак Ньютон
1643-1727

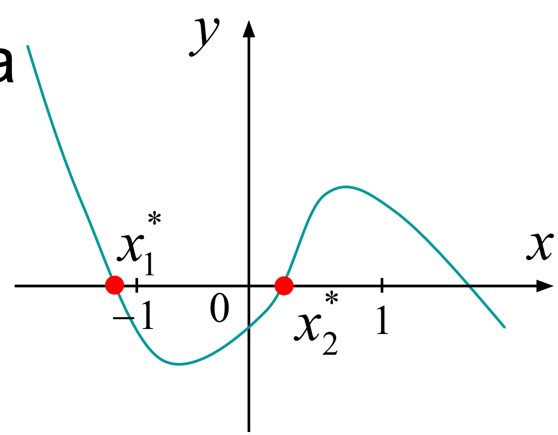
Постановка задачи

Решить нелинейное уравнение,

$$f(x)=0$$

Графически **корень** – это координата x точки пересечения графика функции f(x) с осью OX

Графическая иллюстрация



Возможные преобразования

$X^2 = 5\cos x$ → $X^2 – 5\cos x = 0$ → **$f(x)=x^2 – 5\cos x$**

Исходные данные и результаты

Исходные данные

- Функция f(x)
- Точность вычисления ε>0
- Начальное приближение к корню x_0

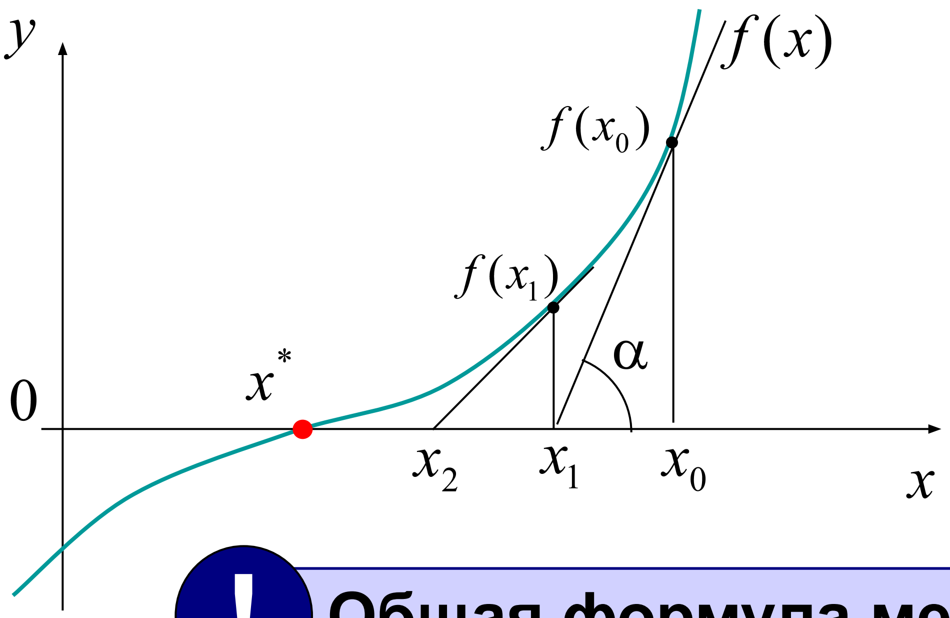
Результаты вычислений

- Корень уравнения x*
- Количество шагов метода k

Основная идея метода

Метод Ньютона основан на замене исходной функции f(x), на каждом шаге поиска касательной, проведенной к этой функции. Пересечение касательной с осью X дает очередное приближение к корню.

Вывод формулы метода Ньютона из геометрических построений



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

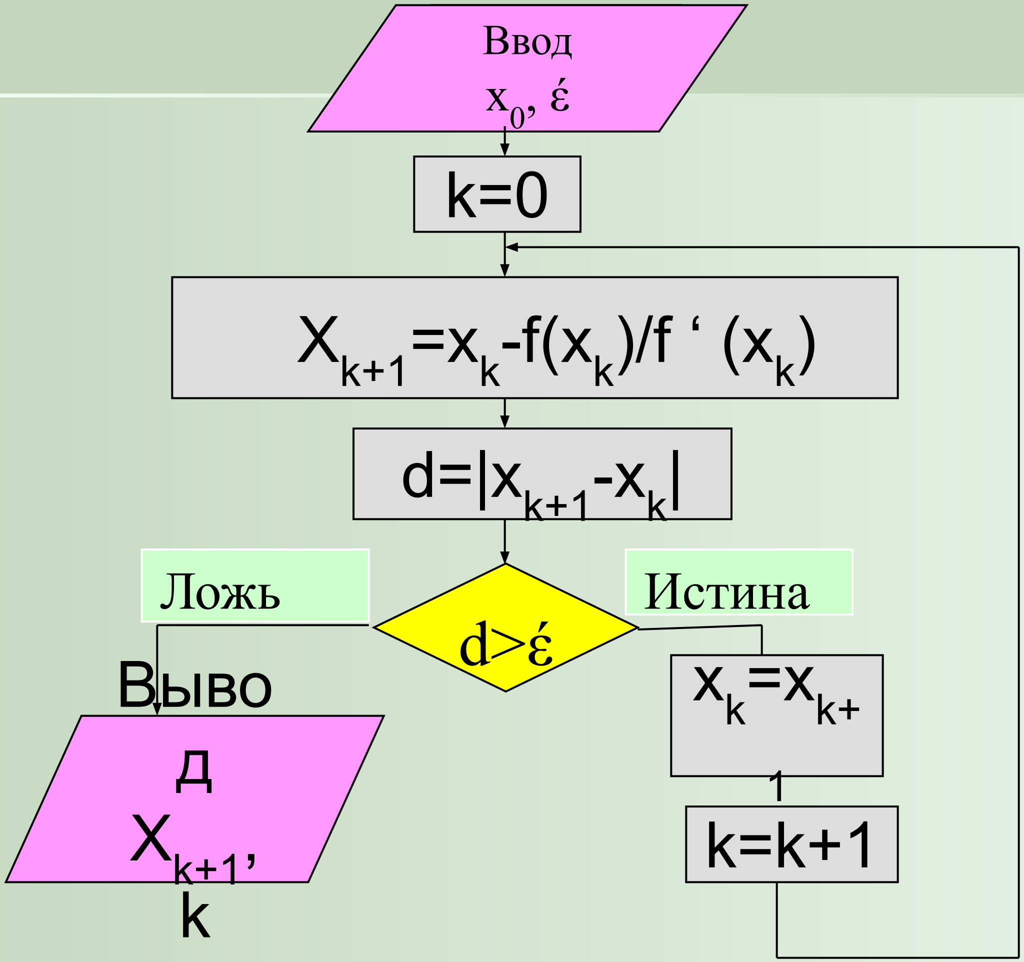
$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

! Общая формула метода Ньютона

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

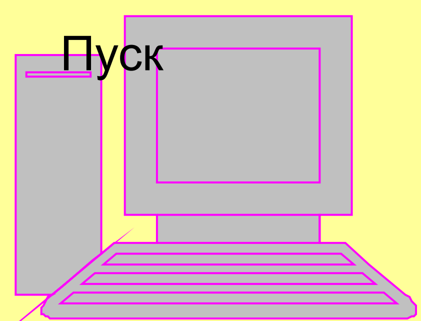
Блок-схема метода Ньютона



Функция – реализация метода Ньютона

```
//-----------------------------------------------
// Newton решение уравнения методом Ньютона
// Вход:  x – начальное приближение
//        eps  - точность решения
// Выход: решение уравнения f(x)=3x^3+2x+5=0
//        k - число шагов
//-----------------------------------------------
float Newton ( float x, float eps,
{ float dx, xk;
  k = 0;
  do {
     xk =x - f(x) / df(x);
     d = fabs(xk – x);
     if ( d > eps )
        { x=xk;
          k++;
        }
     } while (d<eps);
  return xk;
}
```

```
float f ( float x ) {
  return 3*x*x*x+2*x+5;
}
float df ( float x ) {
  return 9*x*x + 2;
}
```



Преимущества и недостатки метода

- быстрая (квадратичная) сходимость – ошибка на k-ом шаге обратно пропорциональна k^2
- не нужно знать интервал, только начальное приближение
- применим для функция нескольких переменных

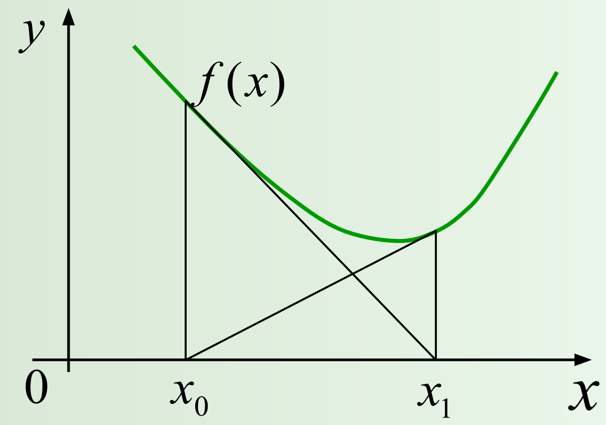
- нужно уметь вычислять производную (по формуле или численно)
- производная не должна быть равна нулю

$$x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

- может зацикливаться

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = 0$$



Заключение

Благодарю за внимание!