

# Построение сечений многогранников

Методические разработки  
Коротковой Елены Анатольевны,  
школа №15, ЮЗАО.

Существуют проблемы при изучении стереометрии. Формальные знания по этому разделу школьной математики обнаруживаются у большинства учащихся: недостаточно сформированное пространственное представление учащихся, отсутствие умения выполнять проекционный чертёж и оперировать данными на нем. Изучение темы «Построение сечений многогранников» предполагает устойчивое развитие пространственного воображения учащихся необходимое для свободного овладения умением решать стереометрические задачи. Он знакомит учащихся с понятием поэтапного построения на проекционном чертеже. В школьном курсе стереометрии на тему: «Построение сечений» отводится всего два часа. Программа приведенного ниже элективного курса предполагает ознакомление с основными методами решения задач на построение сечений многогранников, применение которых способствует осознанию учащимися поэтапного построения сечения многогранника, формирует основы грамотного построения моделей многогранников, развивает пространственное представление и воображение учащихся. Данный курс призван помочь учителям средней школы в решении следующих образовательных задач:

- обучение учащихся методам построения (изображения) пространственных фигур на плоскости;
- обучение учащихся методам решения задач на построение сечений многогранников.

## Программа элективного курса для 10-го класса (I вариант)

№ урока	Тема	Кол-во часов
	<b>Изображение пространственных фигур</b>	<b>3 ч.</b>
1.	Аксонметрические проекции.	1 ч.
2-3.	Изображение многогранников.	2 ч.
	<b>Методы построения сечений многогранников.</b>	<b>29 ч.</b>
4-7.	Базовые задачи на построение сечений.	4 ч.
8-11.	Метод следов.	4 ч.
12-15.	Метод внутреннего проектирования.	4 ч.
16-20.	Метод деления $n$ -угольной призмы(пирамиды) на треугольные призмы(пирамиды). Метод дополнения $n$ -угольной призмы(пирамиды) до треугольной призмы (пирамиды).	5 ч.
21-24.	Метод параллельных прямых. Метод параллельного переноса секущей плоскости.	4 ч.
25-32.	Комбинированный метод.	8 ч.

## Программа элективного курса для 10-го класса (II вариант)

№ урока	Тема	Кол-во часов
	<b>Изображение пространственных фигур</b>	<b>3 ч.</b>
1.	АксонOMETрические проекции.	1 ч.
2-3.	Изображение многогранников.	2 ч.
	<b>Методы построения сечений геометрических фигур с дополнительными условиями.</b>	<b>29 ч.</b>
4-10.	Построение сечения многогранника плоскостью, заданной тремя точками.	7 ч.
11-17.	Построение сечения многогранника плоскостью, заданной прямой и точкой вне её или двумя параллельными прямыми.	7 ч.
18-24.	Применение метода внутреннего проектирования при построении сечения призмы плоскостью.	7 ч.
25-32.	Построение сечения многогранника плоскостью, заданной точкой и условием параллельности или перпендикулярности к указанным прямым и плоскостям.	8 ч.

# Цели элективного курса

- формирование основ научного мировоззрения, базирующегося на инвариантных и фундаментальных знаниях стереометрии;
- формирование основ грамотного построения моделей многогранников;
- развитие пространственных представлений и воображения учащихся;
- выявление и развитие математических способностей учащихся.

# Изображение пространственных фигур

Основные понятия  
и умения

АксонOMETрическая  
плоскость

АксонOMETрическая  
проекция  
плоских фигур

АксонOMETрическая  
проекция  
многогранников

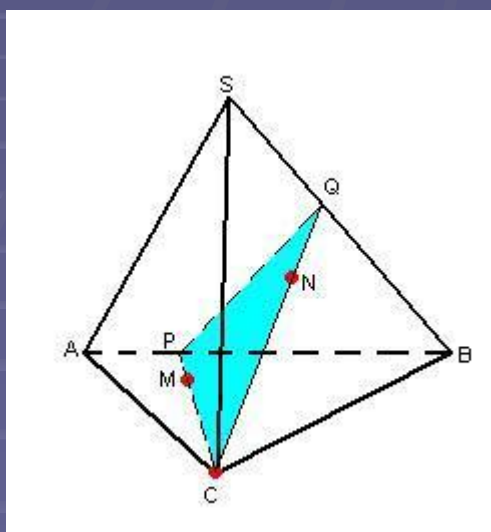
Косоугольная  
фронтальная  
димерическая  
проекция

Прямоугольная  
изометрическая  
проекция

# Базовые задачи на построение сечений многогранников.

- I. Если две плоскости имеют две общие точки, то прямая, проведенная через эти точки, является линией пересечения этих плоскостей.

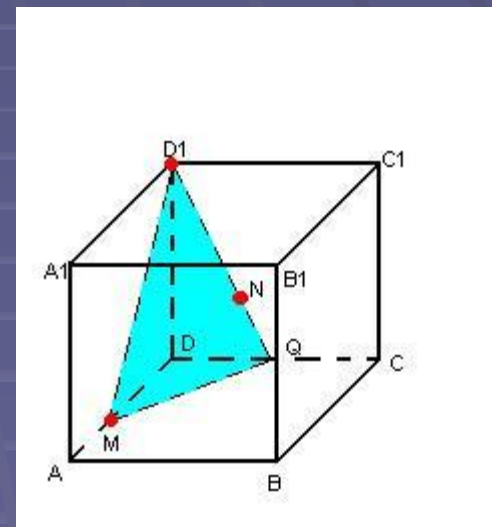
1.



$M \in ABC$ ,  $N \in SBC$ ,  $C$ ;  $SABC$ -тетраэдр.

1.  $C \in ABC$ ,  $M \in ABC$ ,  $CM \cap AB = P$ .
2.  $C \in SBC$ ,  $N \in SBC$ ,  $CN \cap SB = Q$ .
3.  $P \in ABS$ ,  $Q \in ABS$ ,  $PQ$ .

2.

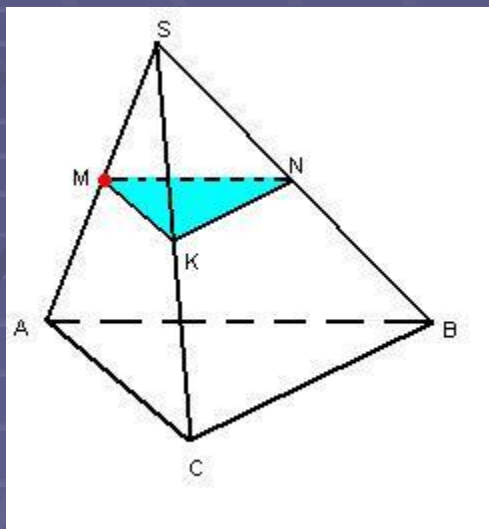


$M \in AD$ ,  $N \in DCC1$ ,  $D1$ ;  
 $ABCDA1B1C1D1$ -куб

1.  $M \in ADD1$ ,  $D1 \in ADD1$ ,  $MD1$ .
2.  $D1 \in D1DC$ ,  $N \in D1DC$ ,  $D1N \cap DC = Q$ .
3.  $M \in ABC$ ,  $Q \in ABC$ ,  $MQ$ .

II. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

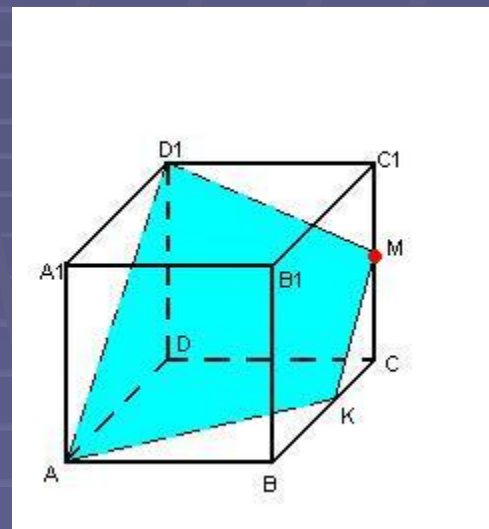
3.



$M \in AS$ ,  $\alpha \parallel ABC$ ;  $SABC$ -тетраэдр.

1.  $MN \parallel AB$ ,  $N \in SB$ .
2.  $MK \parallel AC$ ,  $K \in SC$ .
3.  $KN$ .

4.



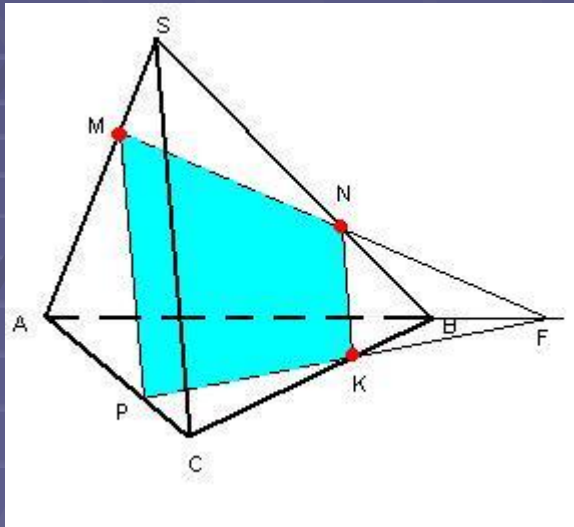
$M \in CC1$ ,  $AD1$ ;  $ABCDA1B1C1D1$ -куб.

1.  $MK \parallel AD1$ ,  $K \in BC$ .
2.  $M \in DCC1$ ,  $D1 \in DCC1$ ,  $MD1$ .
3.  $A \in ABC$ ,  $K \in ABC$ ,  $AK$ .



III. Общая точка трех плоскостей (вершина трехгранного угла) является общей точкой линий их парного пересечения (ребер трехгранного угла).

5.



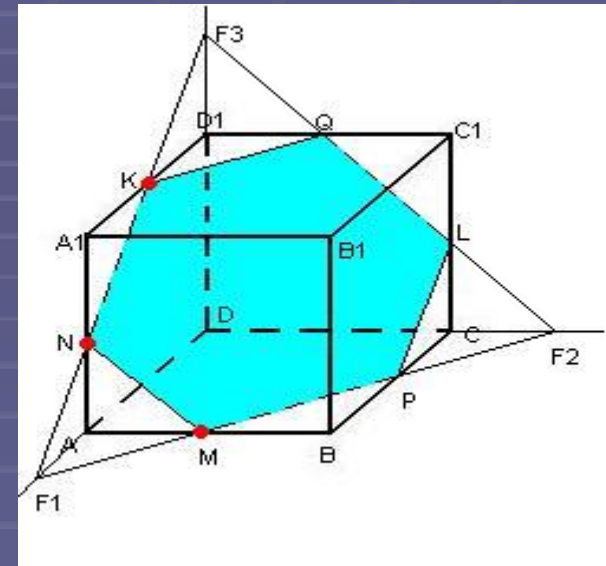
$M \in SA, N \in SB, K \in SC, SABC$ -тетраэдр.

1. Плоскости  $\alpha, SAB, ABC$  образуют трехгранный угол, вершиной которого является точка  $F. AB \cap MN = F.$

2.  $FK \cap AC = P.$

3.  $P \in SAC, M \in SAC, MP.$

6.



$M \in AB, N \in AA_1, K \in A_1D_1; ABCDA_1B_1C_1D_1$ -куб.

1.  $NK \cap AD = F_1$  - вершина трехгранного угла образованного плоскостями  $\alpha, ABC, ADD_1.$

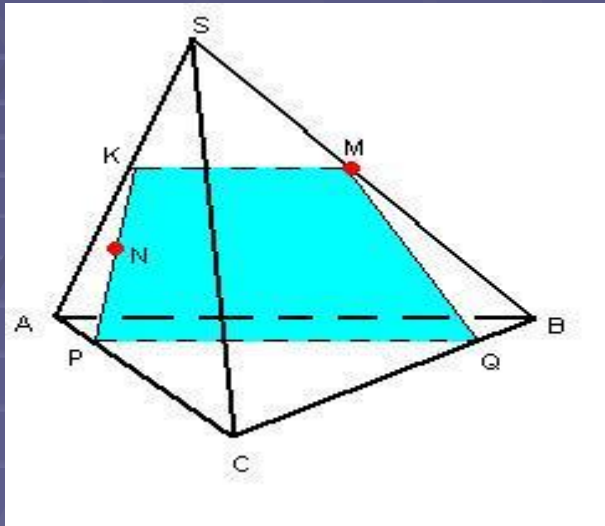
2.  $F_1M \cap CD = F_2$  - вершина трехгранного угла образованного плоскостями  $\alpha, ABC, CDD_1. F_1M \cap BC = P.$

3.  $NK \cap DD_1 = F_3$  - вершина трехгранного угла образованного плоскостями  $\alpha, D_1DC, ADD_1.$

4.  $F_3F_2 \cap D_1C_1 = Q, F_3F_2 \cap CC_1 = L.$

IV. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает ее, то линия пересечения параллельна данной прямой.

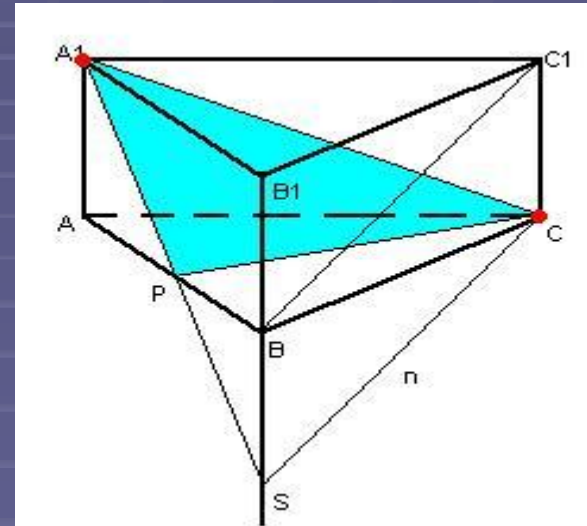
7.



$M \in SB, N \in SAC, \alpha \parallel AB; SABC$ -тетраэдр.

- $\alpha \cap SAB = KM, K \in SA, KM \parallel AB.$
- $KN \cap AC = P.$
- $\alpha \cap ABC = PQ, Q \in BC, PQ \parallel AB.$

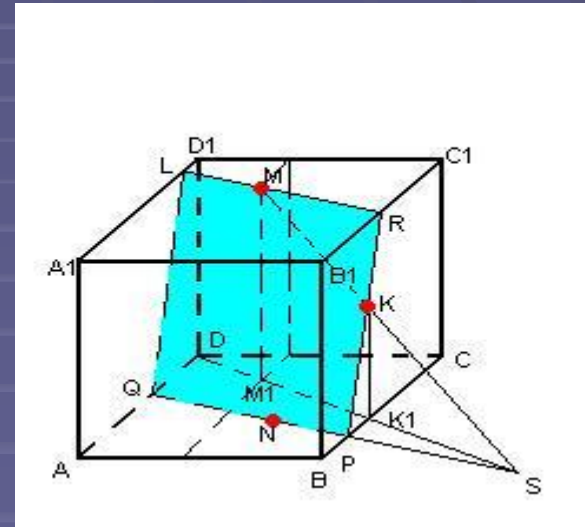
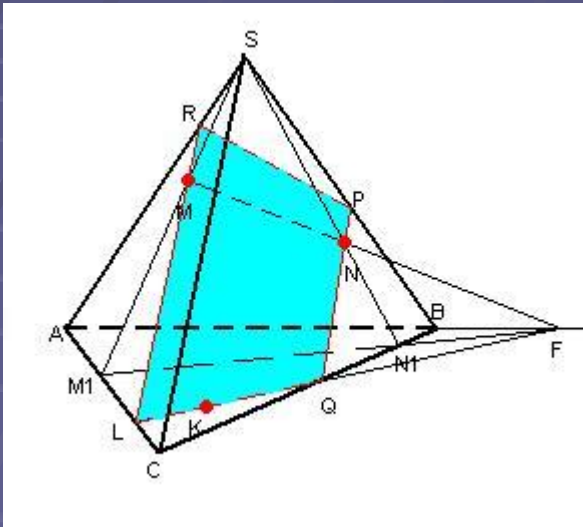
8.



$A1, C, \alpha \parallel BC1; ABCA1B1C1$ -призма.

- $\alpha \cap BCC1 = n, n \parallel BC1, n \cap BB1 = S.$
- $SA1 \cap AB = P.$
- Соединяем  $A1, P$  и  $C.$

V. Если прямая лежит в плоскости сечения, то точка ее пересечения с плоскостью грани многогранника является вершиной трехгранного угла, образованного сечением, гранью и вспомогательной плоскостью, содержащей данную прямую.



$M \in SAC$ ,  $K \in ABC$ ,  $N \in SBC$ ;  $SABC$ -тетраэдр.

1. Вспомогательная плоскость  $SMN$ :  
 $SMN \cap ABC = M_1N_1$ ,  $MN \cap M_1N_1 = F$ ,  
 $MN \cap ABC = F$ ,  $F$ - вершина трехгранного  
 угла образованного плоскостями:  $\alpha$ ,  
 $ABC$ ,  $SMN$ .
2.  $KF \cap BC = Q$ ,  $KF \cap AC = L$ ,  $LM \cap SA = R$ ,  
 $QN \cap SB = P$ .

$M \in A_1B_1C_1$ ,  $K \in BCC_1$ ,  $N \in ABC$ ;  $ABCD A_1B_1C_1$ -  
 параллелепипед.

1. Вспомогательная плоскость  $MKK_1$ :  
 $MKK_1 \cap ABC = M_1K_1$ ,  $MK \cap M_1K_1 = S$ ,  
 $MK \cap ABC = S$ ,  $S$ - вершина трехгранного  
 угла образованного плоскостями:  $\alpha$ ,  $ABC$ ,  
 $MKK_1$ .
2.  $SN \cap BC = P$ ,  $SN \cap AD = Q$ ,  $PK \cap B_1C_1 = R$ ,  
 $RM \cap A_1D_1 = L$ .

## Правило для самоконтроля.

- Если многогранник выпуклый, то сечение выпуклый многоугольник.
- Вершины многоугольника всегда лежат на ребрах многогранника.
- Если точки сечения лежат на ребрах многогранника, то они являются вершинами многоугольника, который получится в сечении.
- Если точки сечения лежат на гранях многогранника, то они лежат на сторонах многоугольника, который получится в сечении.
- Две стороны многоугольника, который получится в сечении, не могут принадлежать одной грани многогранника.
- Если сечение пересекает две параллельные грани, то и отрезки (стороны многоугольника, который получится в сечении) будут параллельны.

# Построение сечения методом следов

## Основные понятия и умения

```
graph TD; A[Основные понятия и умения] --- B[Построение следа прямой на плоскости]; A --- C[Построение следа секущей плоскости]; A --- D[Построение сечения];
```

Построение  
следа  
прямой  
на плоскости

Построение  
следа  
секущей  
плоскости

Построение  
сечения

Для объяснения материала учителю необходимо заготовить:

- набор листов с заданиями и рисунками (для экономии времени урока);
- аналогичные чертежи и таблицы на доске или компьютере.

# Построение следа прямой на плоскости грани многогранника

## ПИРАМИДА

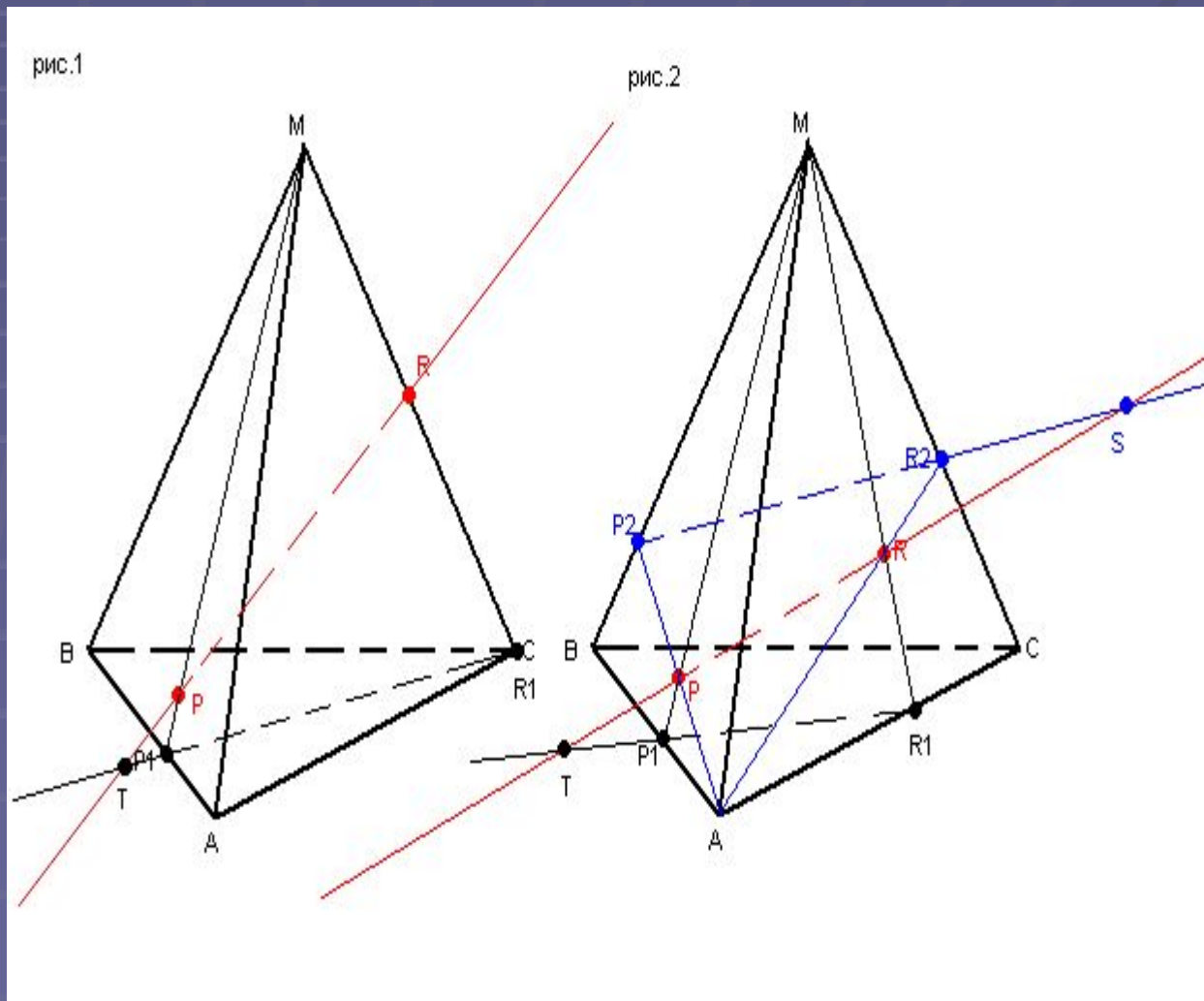
а) плоскость основания

б) плоскость любой грани

Оформление таблицы

Рис.2

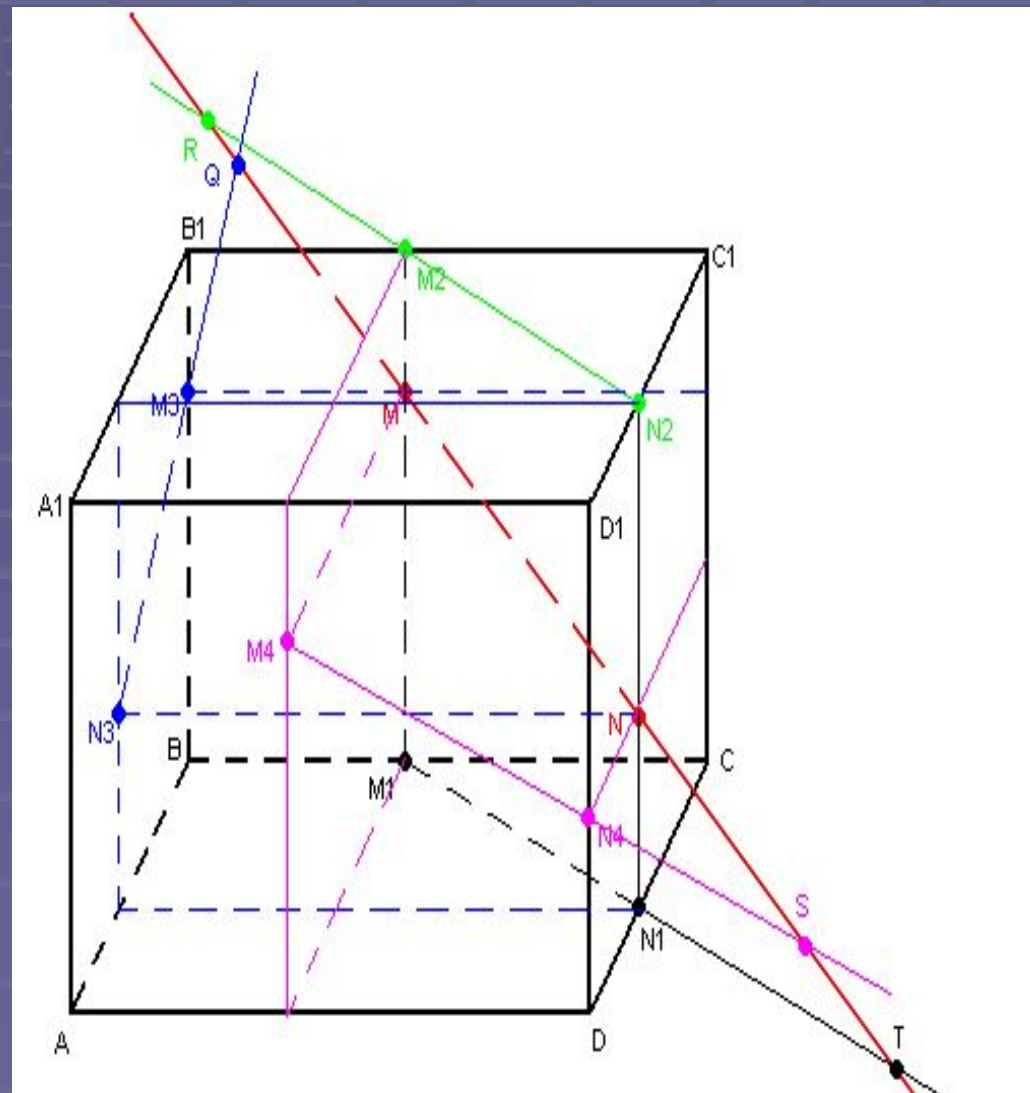
грань	след
ABC	T
ABM	P
ACM	R
BCM	S



# ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Оформление таблицы

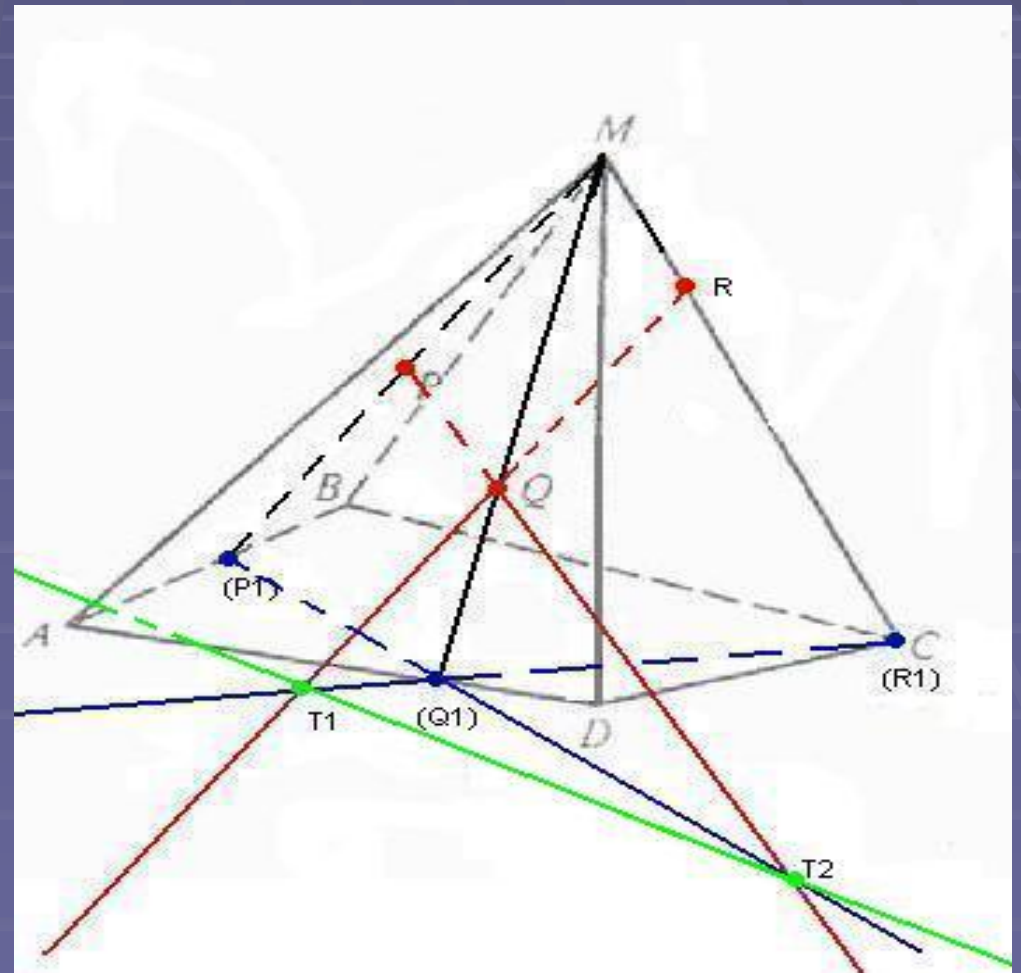
грань	след
ABCD	T
AA <sub>1</sub> B <sub>1</sub> B	Q
BB <sub>1</sub> C <sub>1</sub> C	M
CC <sub>1</sub> D <sub>1</sub> D	N
AA <sub>1</sub> D <sub>1</sub> D	S
A <sub>1</sub> B <sub>1</sub> C <sub>1</sub> D <sub>1</sub>	R



# Построение следа секущей плоскости на плоскость основания

## ПИРАМИДА

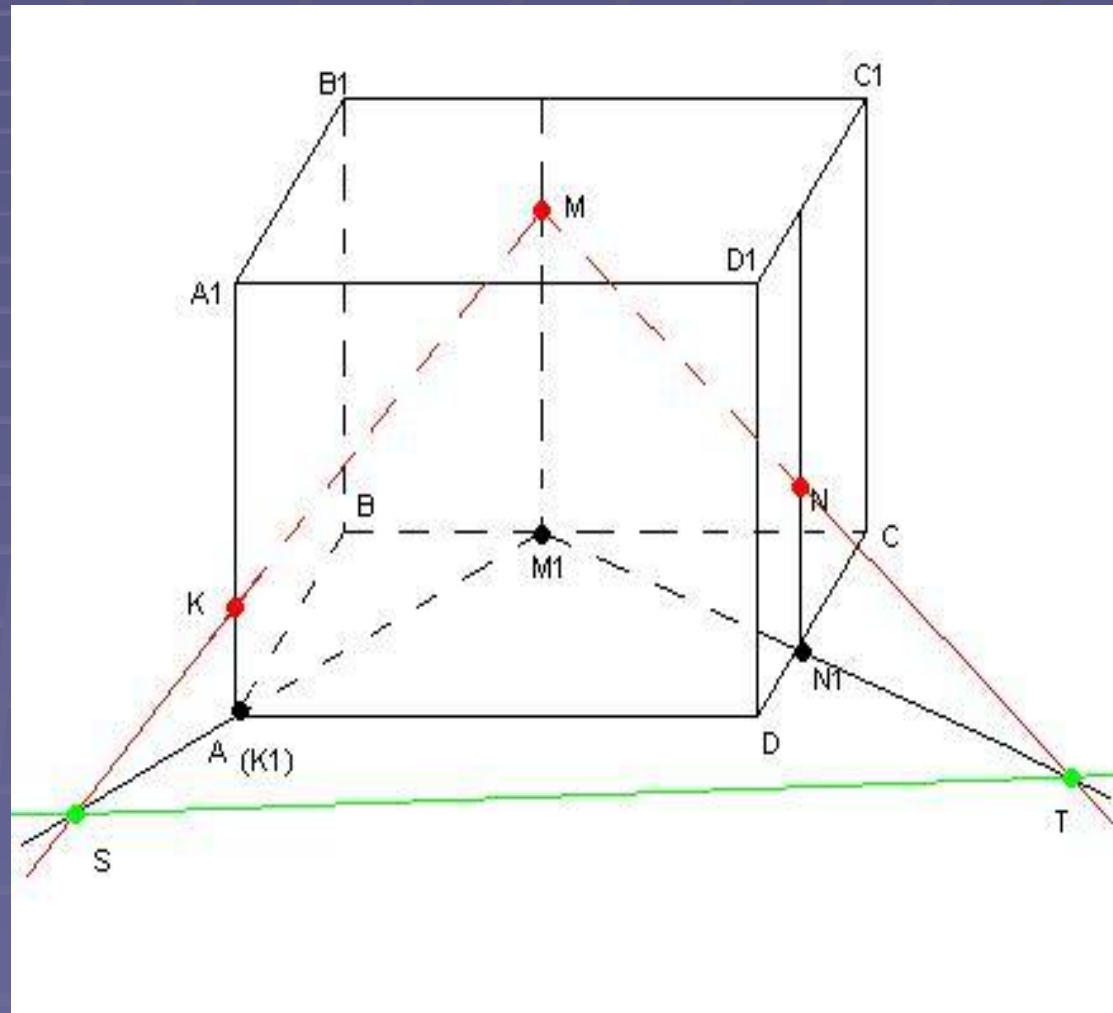
1. Построить проекции точек  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  на плоскость  $ABC$ .
2.  $PQ \cap P_1Q_1 = T_2$ ,  
 $RQ \cap R_1Q_1 = T_1$ .
3.  $T_1T_2$ -искомый след.





# ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

1. Построить проекции точек  $M$ ,  $N$ ,  $K$  на плоскость  $ABC$ .
2.  $MK \cap M_1K_1 = S$ ,  
 $MN \cap M_1N_1 = T$ .
3.  $ST$ -искомый след.



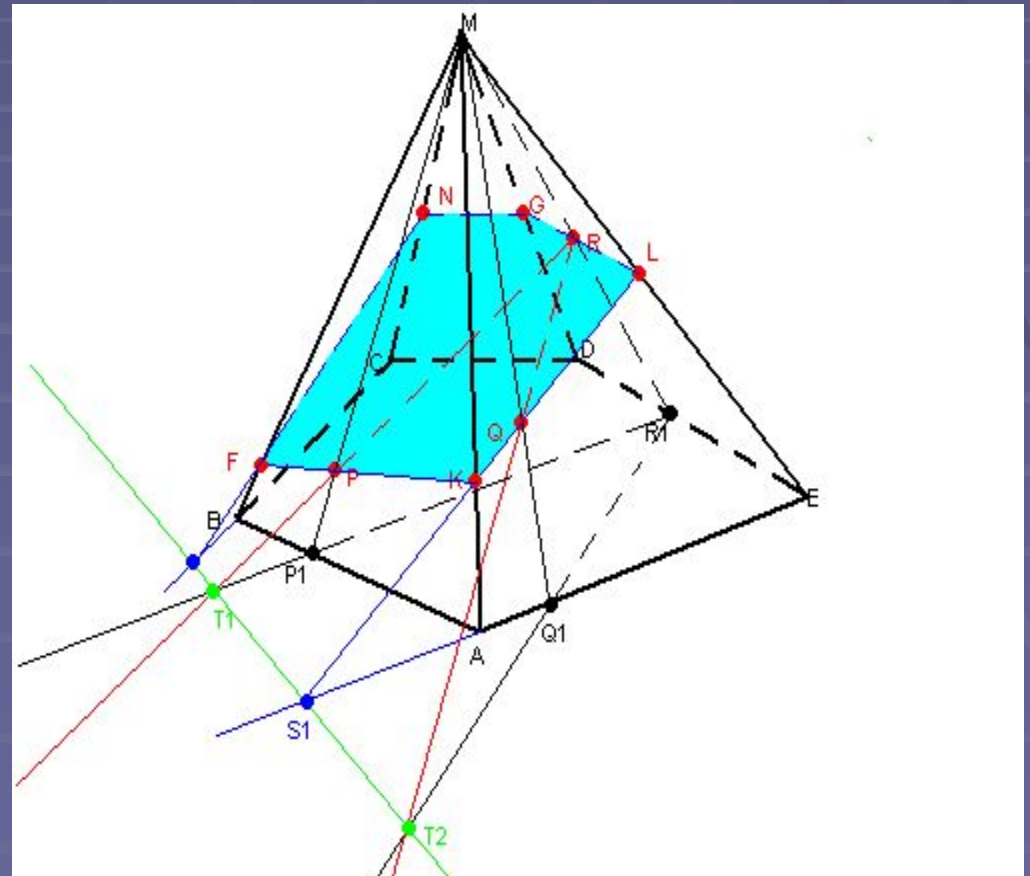
# Алгоритм построения сечения методом следов

1. Выяснить имеются ли в одной грани две точки сечения (если да, то через них можно провести сторону сечения).
2. Построить след сечения на плоскости основания многогранника.
3. Найти дополнительную точку сечения на ребре многогранника (продолжить сторону основания той грани, в которой есть точка сечения, до пересечения со следом).
4. Через полученную дополнительную точку на следе и точку сечения в выбранной грани провести прямую, отметить точки пересечения её с рёбрами грани.
5. Выполнить п.1.

# Построение сечения пирамиды

1. Двух точек принадлежащих одной грани нет.
2. Построим след сечения ( $T_1T_2$ ) в плоскости основания:
  - $RQ \cap R_1Q_1 = T_2$ ,  $RP \cap R_1P_1 = T_1$ .
3. Найдём дополнительную точку:
  - $Q \in (AME)$ ,  $AE \cap T_1T_2 = S_1$ .
4. Проведем прямую  $S_1Q$ 
  - $S_1Q \cap AM = K$ ,  $S_1Q \cap ME = L$ .
5.  $KP \cap BM = F$ ,  $LR \cap MD = G$ .
6. Найдём дополнительную точку:
  - $F \in (BMC)$ ,  $BC \cap T_1T_2 = S_2$ .
7. Проведем прямую  $S_2F$ 
  - $S_2F \cap CM = N$ .
8. Соединяем  $N$  и  $G$ .

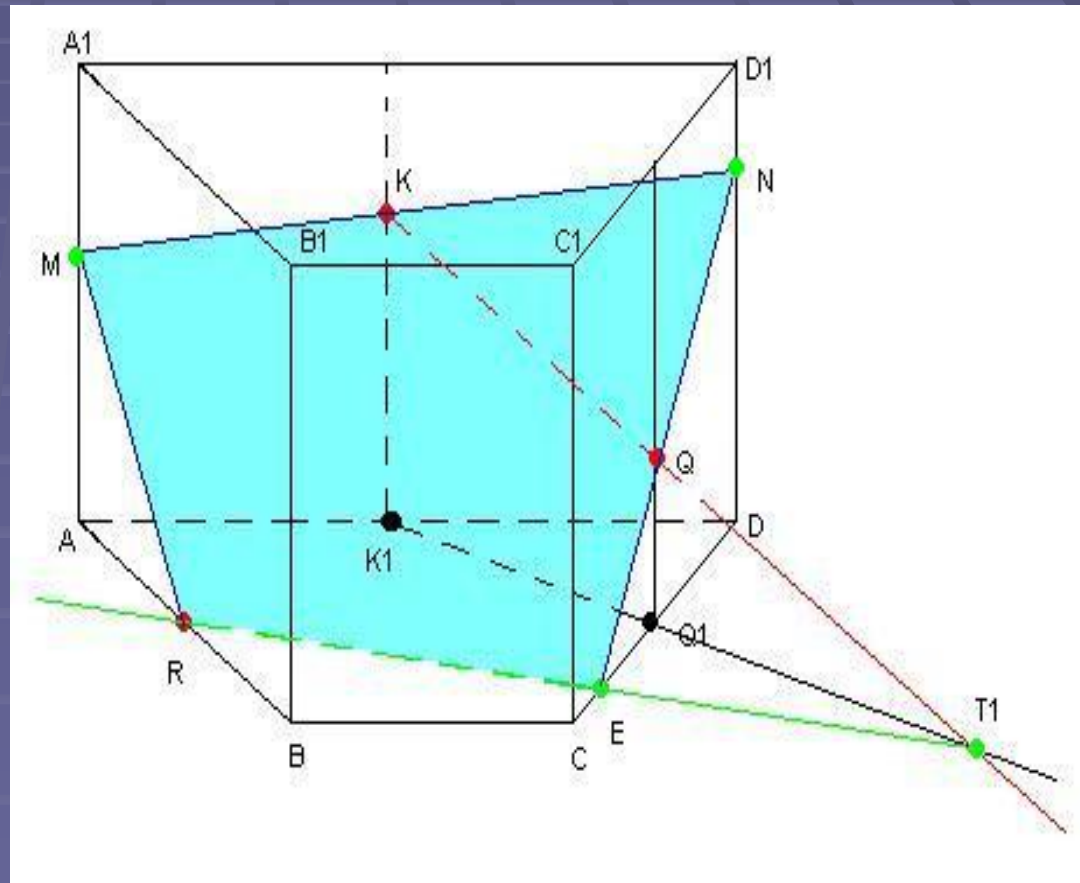
Построить сечение плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ;  $P \in ABM$ ,  $Q \in AEM$ ,  $R \in EDM$ .



# Построение сечения призмы

Построить сечение плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $K, Q, R$ ;  $K \in ADD_1$ ,  $Q \in CDD_1$ ,  $R \in AB$ .

1. Двух точек принадлежащих одной грани нет.
2. Точка  $R$  лежит в плоскости основания. Найдем след прямой  $KQ$  на плоскости основания:
  - $KQ \cap K_1Q_1 = T_1$ ,  $T_1R$ -след сечения.
3.  $T_1R \cap CD = E$ .
4. Проведем  $EQ$ .  $EQ \cap DD_1 = N$ .
5. Проведем  $NK$ .  $NK \cap AA_1 = M$ .
6. Соединяем  $M$  и  $R$ .



## Построение сечения методом внутреннего проектирования.

Этот метод является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь в виду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются «скупенными». Тем не менее в некоторых случаях метод внутреннего проектирования оказывается наиболее рациональным.

# Основные понятия и умения

Построени  
е  
вспомогате  
ль-  
ных  
сечений

Построени  
е  
следа  
сечения  
на ребре

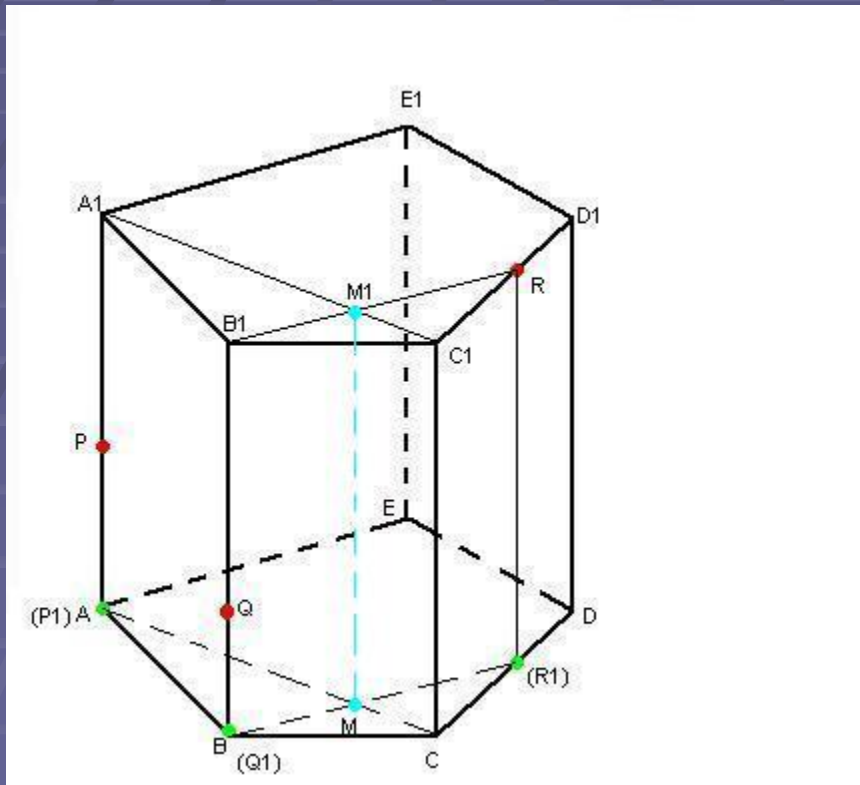
Построени  
е  
сечения

Центральное  
проектирование

Параллельное  
проектирование

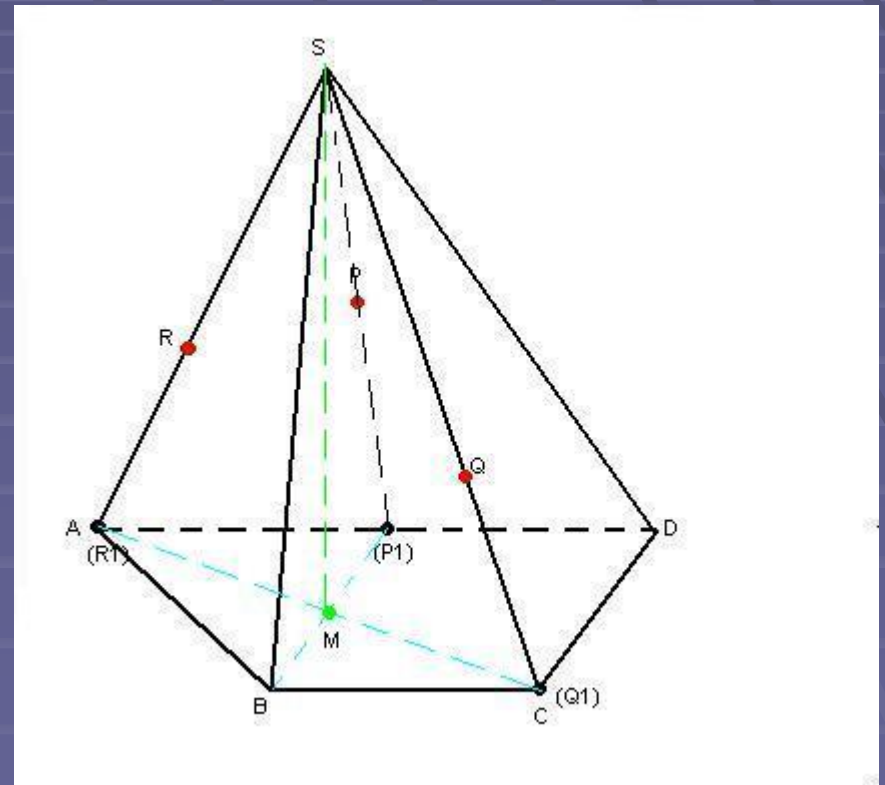
# Построение вспомогательных сечений.

## ПРИЗМА



Параллельное проектирование.

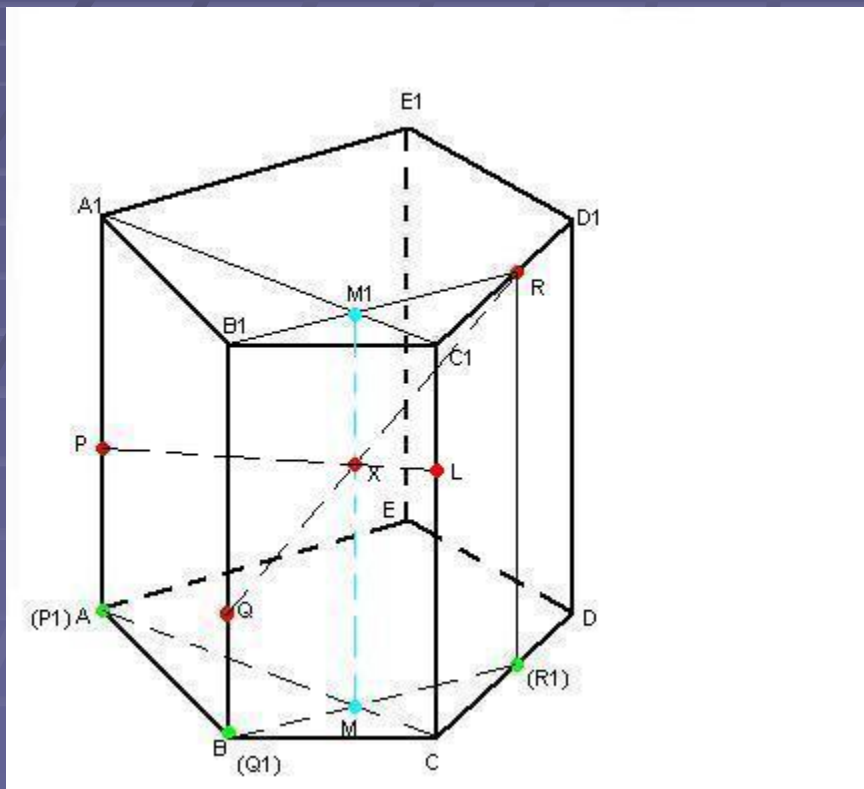
## ПИРАМИДА



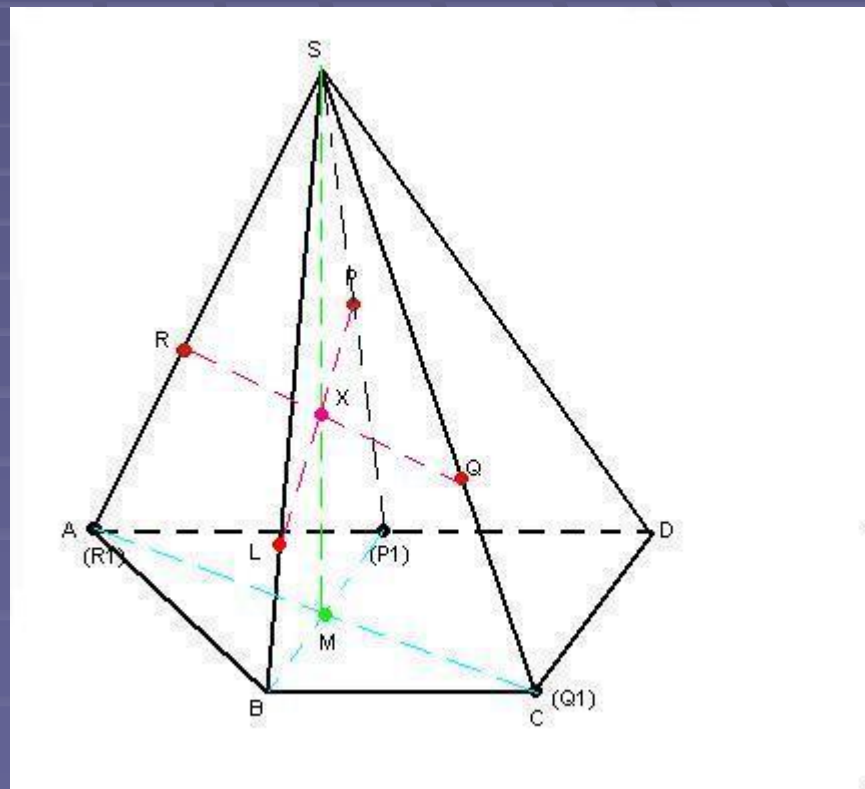
Центральное проектирование.

# Построение следа сечения на ребре

## ПРИЗМА



## ПИРАМИДА





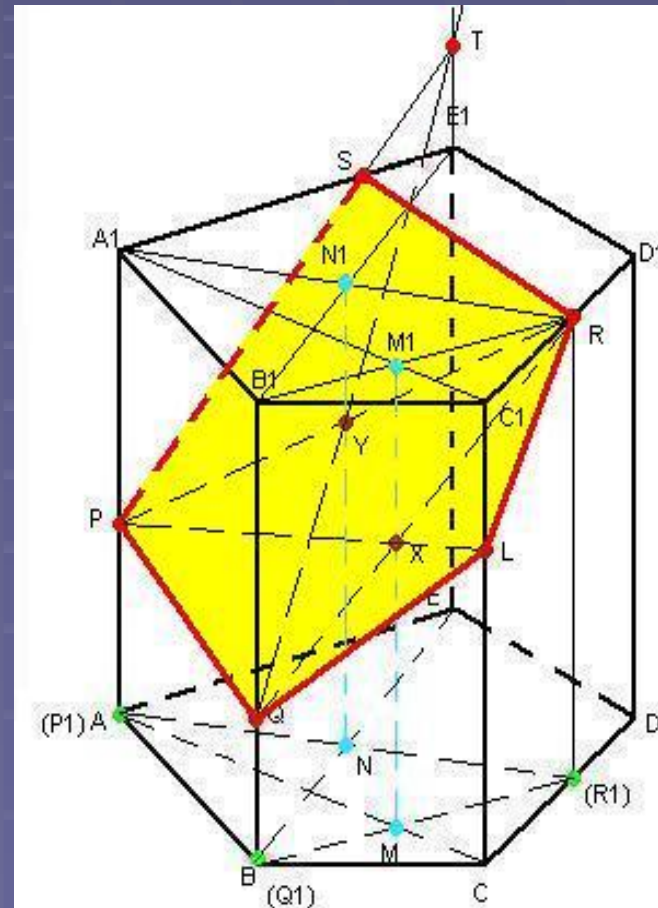
## Алгоритм построения сечения методом внутреннего проектирования.

1. Построить вспомогательные сечения и найти линию их пересечения.
2. Построить след сечения на ребре многогранника.
3. Если точек сечения не хватает для построения самого сечения повторить пп.1-2.

# Построение сечения призмы.

Построить сечение плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ;  
 $P \in AA_1$ ,  $Q \in BB_1$ ,  $R \in C_1D_1$ .

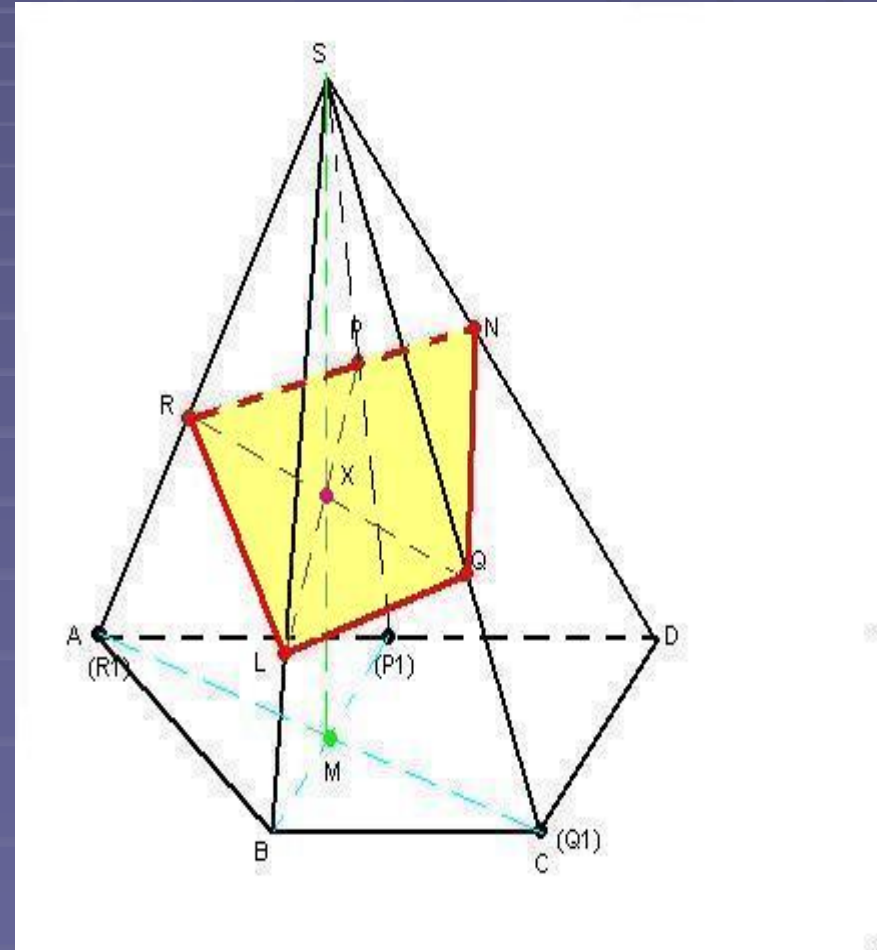
1. Построим проекции точек  $P, Q, R$  на плоскость  $ABC$ .
2. Найдем след плоскости  $PQR$  на ребре  $CC_1$ :
  - $AA_1C_1C \cap BB_1R_1R = MM_1$ ,  
 $RQ \cap MM_1 = X$ ,  $PX \cap CC_1 = L$ .
3. Найдем след плоскости  $PQR$  на ребре  $EE_1$ :
  - $AA_1R_1R \cap BB_1E_1E = NN_1$ ,  
 $PR \cap NN_1 = Y$ ,  $QY \cap EE_1 = T$ .
4. Найдем след плоскости  $PQR$  на грани  $AA_1E_1E$ :
  - $PT \cap A_1E_1 = S$ ,  $PS$ -искомый след.
5. Соединяем  $P, Q, L, R$  и  $S$ .



# Построение сечения пирамиды.

Построить сечение плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ;  
 $P \in SAD$ ,  $Q \in SC$ ,  $R \in SA$ .

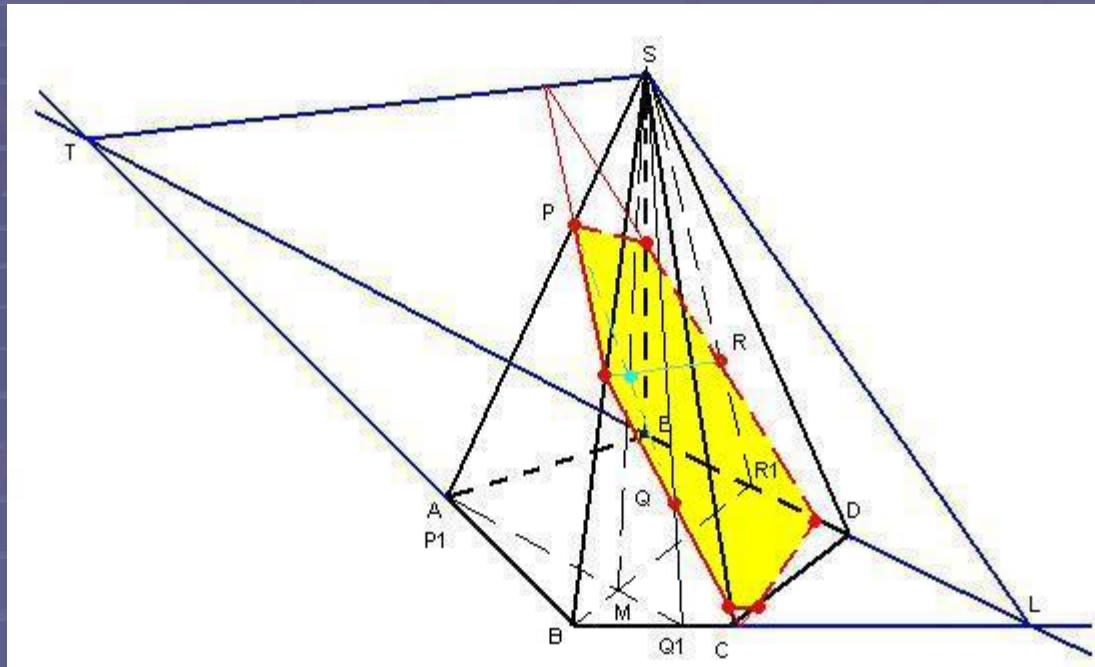
1. Построим проекции точек  $P, Q, R$  на плоскость  $ABC$ .
2. Найдем след плоскости  $PQR$  на ребре  $SB$ :  
-  $SAC \cap SBP_1 = SM$ ,  $RQ \cap SM = X$ ,  
 $PX \cap SB = L$ .
3.  $R \in SAD$ ,  $P \in SAD$ ,  $PR \cap SD = N$ .
4. Соединяем  $R, L, Q, N$  и  $R$ .



# Метод дополнения $n$ -угольной призмы (пирамиды) до треугольной призмы (пирамиды).

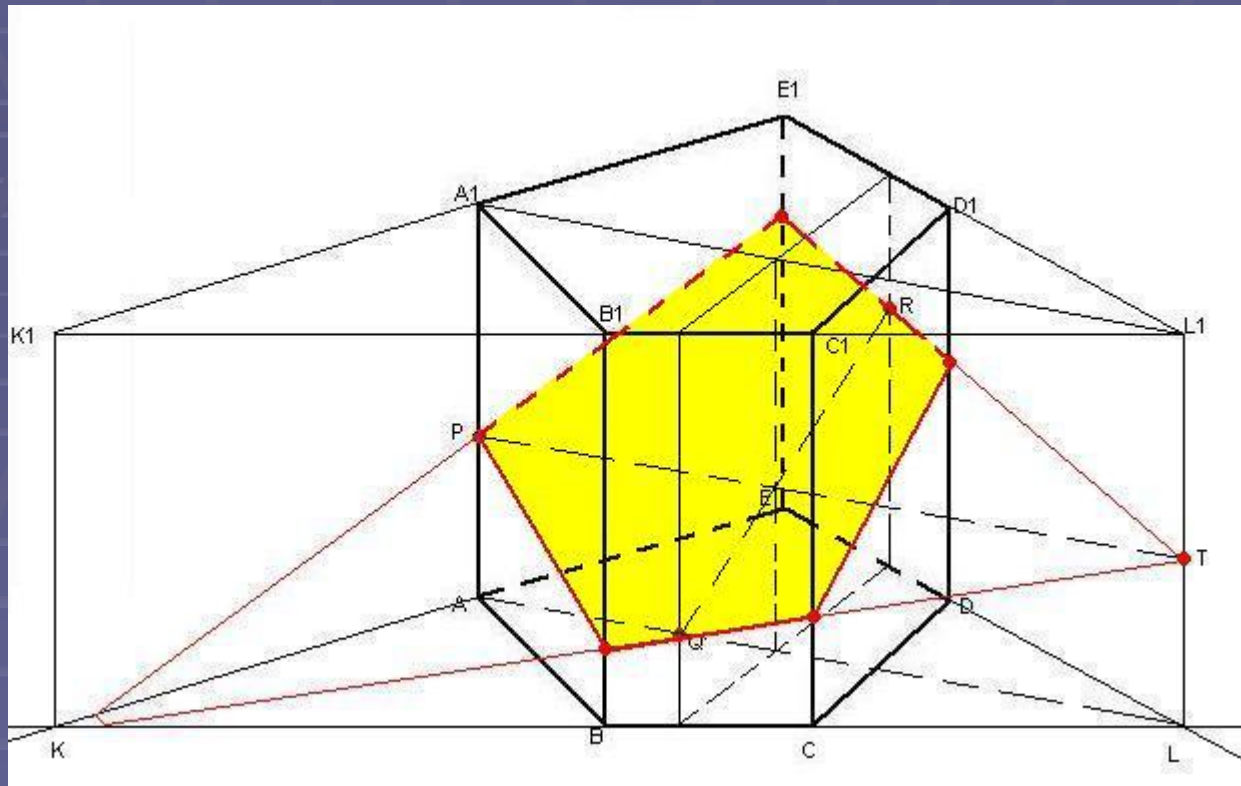
- Данная призма(пирамида) достраивается до треугольной призмы(пирамиды) из тех граней на боковых ребрах или гранях которой лежат точки, определяющие искомое сечение.
- Строится сечение полученной треугольной призмы(пирамиды).
- Искомое сечение получается как часть сечения треугольной призмы(пирамиды).

# ПИРАМИДА



1.  $Q \in SBC$ ,  $P \in SA$ ,  $R \in SED$ . Дистраиваем пирамиду до треугольной. Для этого продлим стороны основания:  $AB$ ,  $BC$ ,  $ED$ .
2. Строим сечение полученной пирамиды  $STBL$  плоскостью  $PQR$ , используя метод внутреннего проектирования.
3. Это сечение является частью искомого. Строим искомое сечение.

# ПРИЗМА



1.  $Q \in BB_1C_1C$ ,  $P \in AA_1$ ,  $R \in EDD_1E_1$ . Дистраиваем призму до треугольной. Для этого продлим стороны нижнего основания:  $AE$ ,  $BC$ ,  $ED$  и верхнего основания:  $A_1E_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $E_1D_1$ .  $AE \cap BC = K$ ,  $ED \cap BC = L$ ,  $A_1E_1 \cap B_1C_1 = K_1$ ,  $E_1D_1 \cap B_1C_1 = L_1$ .
2. Строим сечение полученной призмы  $KLEK_1L_1E_1$  плоскостью  $PQR$ , используя метод внутреннего проектирования.
3. Это сечение является частью искомого. Строим искомое сечение.

# Метод деления $n$ -угольной призмы (пирамиды) на треугольные призмы (пирамиды).

1. Строим проекции точек на плоскость основания.
2. Из данной призмы(пирамиды) выделяется та треугольная призма(пирамида) на боковых ребрах или гранях которой лежат точки, определяющие искомое сечение.
3. В выделенной призме(пирамиде) точки, определяющие искомое сечение должны лежать на ребрах.
4. Строится сечение этой треугольной призмы (пирамиды).

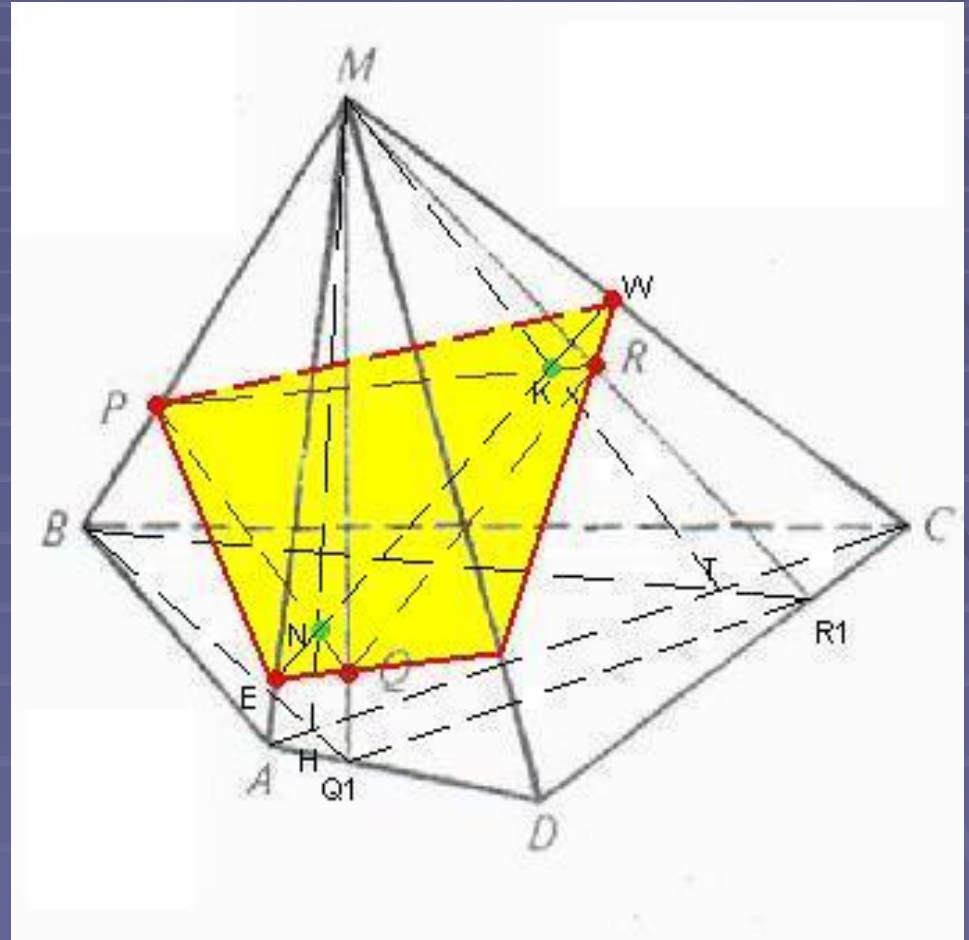
5. Данная призма(пирамида) разбивается на треугольные призмы(пирамиды), таким образом, что одна из граней должна пересечь две грани выделенной призмы (пирамиды).
6. Находим линии пересечения этих граней. Эти линии пересекут стороны построенного сечения в двух точках, которые принадлежат искомому сечению и грани призмы (пирамиды).
7. Находим точки пересечения с боковыми ребрами призмы(пирамиды).
8. Строим искомое сечение.



# ПИРАМИДА.

Построить сечение плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ;  
 $P \in BM$ ,  $Q \in ADM$ ,  $R \in CDM$ .

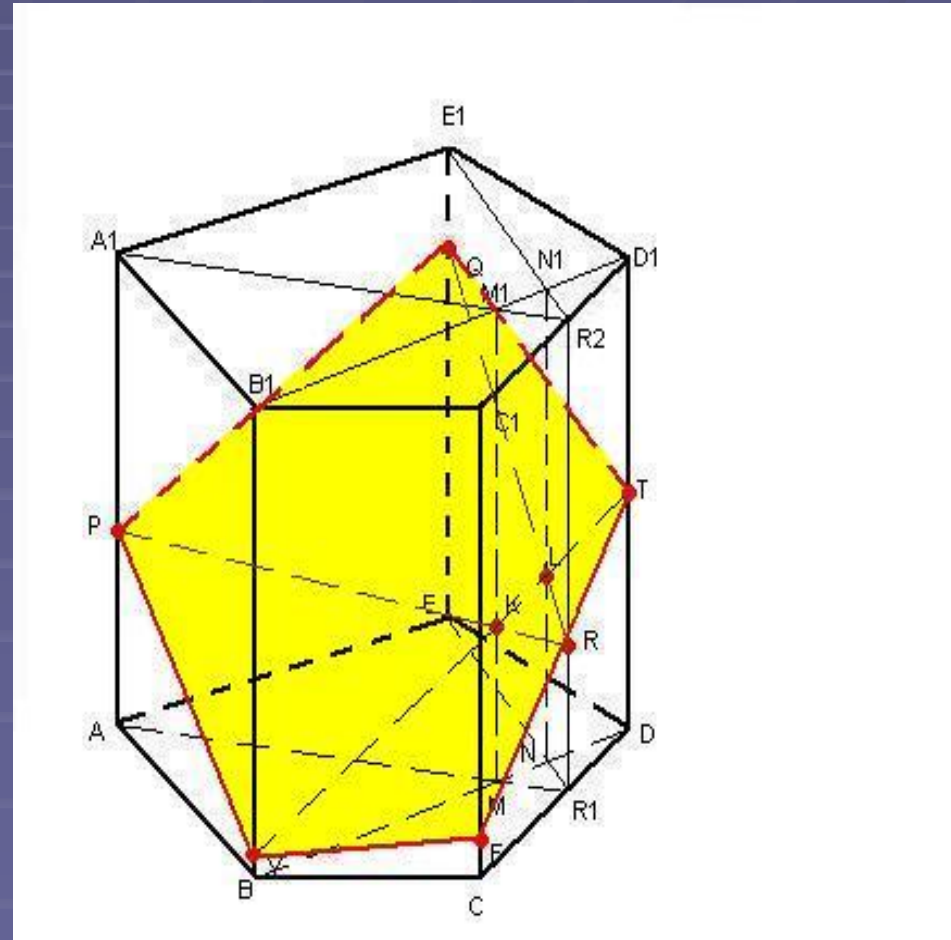
1.  $Q \in MAD$ ,  $R \in MCD$ ,  $P \in MB$ .  $Q_1$  - проекция точки  $Q$  на  $ABC$ ,  $R_1$  - проекция точки  $R$  на  $ABC$ ,  $V$  - проекция точки  $P$  на  $ABC$ .
2. Строим сечение пирамиды  $MBQ_1R_1$ .
3. Разбиваем пирамиду  $MABCD$  на  $MBAS$  и  $MACD$ .  $AC \cap BQ_1 = H$ ,  $AC \cap BR_1 = T$ .
4.  $MAC \cap MBQ_1 = MH$ ,  $MH \cap PQ = N$ ;  
 $MAC \cap MBR_1 = MT$ ,  $MT \cap PR = K$ .
5.  $NK \in MAC$ ,  $NK \cap MA = E$ ,  
 $NK \cap MC = W$ .
6.  $EQ \cap MD = V$ ; соединяем  $P, E, V, W$ .



# ПРИЗМА.

Построить сечение плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ;  
 $P \in AA_1, Q \in EE_1, R \in CDD_1$ .

1.  $Q \in EE_1, R \in CDD_1, P \in AA_1$ .  $E$  - проекция точки  $Q$  на  $ABC$ ,  $R_1$  - проекция точки  $R$  на  $ABC$ ,  $A$  - проекция точки  $P$  на  $ABC$ .
2. Строим сечение призмы  $AR_1EA_1R_2E_1$ .
3. Разбиваем данную призму на  $BCDB_1C_1D_1, BDAB_1D_1A_1$  и  $ADEA_1D_1E_1$ .
4.  $BDD_1 \cap AR_1R_2 = MM_1$ ,  
 $BDD_1 \cap ER_1R_2 = NN_1$ ;  
 $MM_1 \cap PR = K, NN_1 \cap RQ = L$ .
5.  $LK \in BDD_1, LK \cap BB_1 = Y$ ,  
 $LK \cap DD_1 = T$ .
6.  $TR \cap CC_1 = F$ .
7. Соединяем  $P, Y, F, T, Q$ .



## Метод параллельных прямых.

В основу метода положено свойство параллельных плоскостей: «Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.»

Основные  
умения и  
понятия

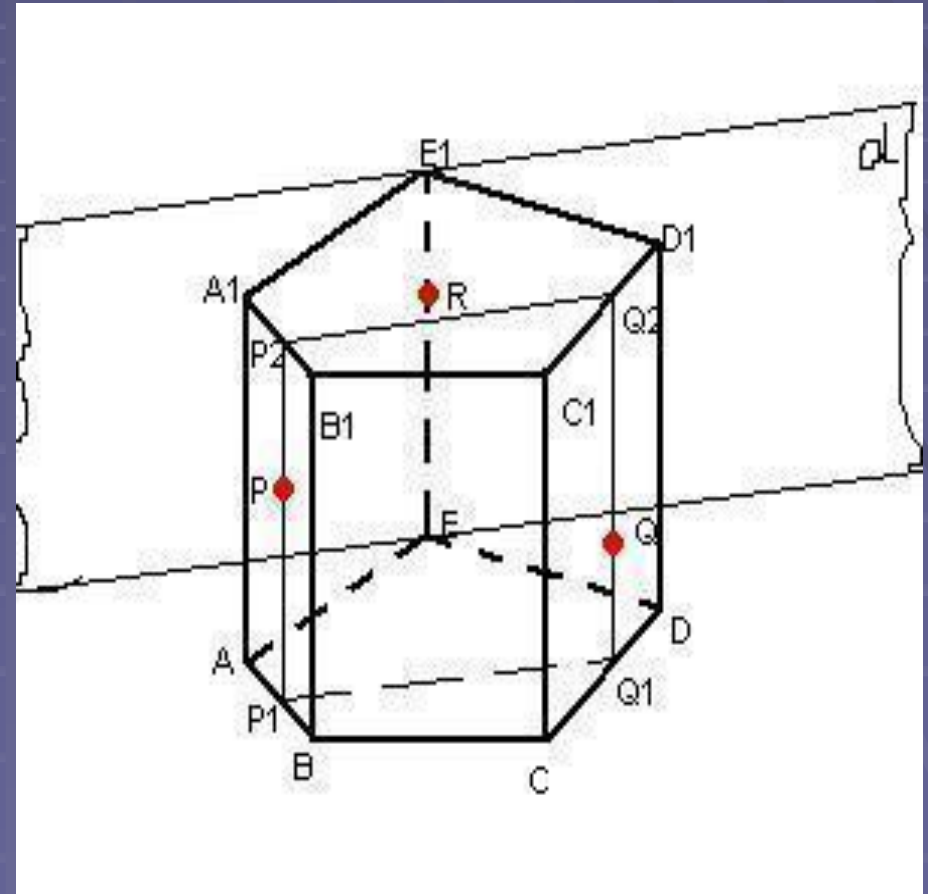
Построение  
плоскости  
параллельной  
данной

Построение  
линии  
пересечения  
плоскостей

Построение  
сечения

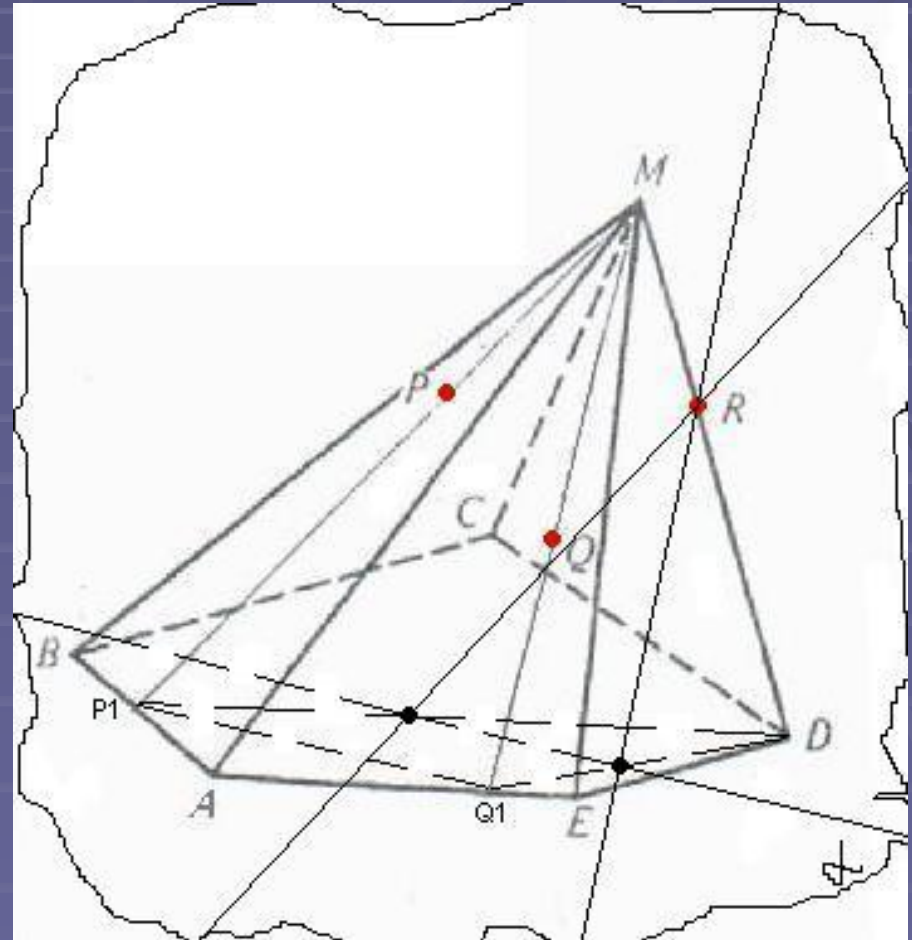
# Построение плоскости параллельной данной ПРИЗМА.

1. Строим проекции точек  $P$  и  $Q$  на плоскости верхнего и нижнего оснований.
2. Проводим плоскость  $P_2P_1Q_1Q_2$ .
3.  $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2 \parallel E_1E$ , через точку  $E$  проводим прямую параллельную  $P_1Q_1$ , через точку  $E_1$  проводим прямую параллельную  $P_2Q_2$ .
4. По признаку  $\alpha \parallel P_1Q_1Q_2$



# ПИРАМИДА.

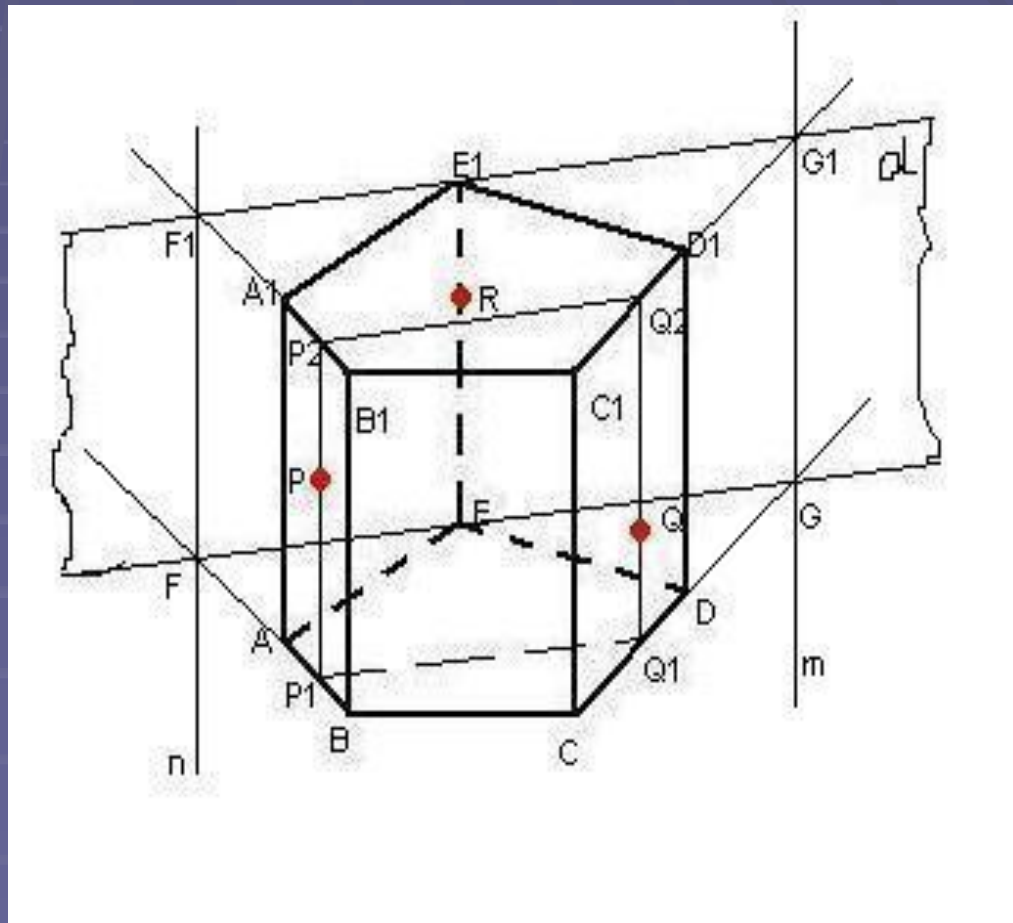
1. Строим проекции точек  $P$  и  $Q$  на плоскость основания.
2. Проводим плоскость  $MP_1Q_1$ .
3. Через точку  $R$  в плоскости  $MDQ_1$  проводим прямую параллельную  $MQ_1$ .
4. Через точку  $R$  в плоскости  $MDP_1$  проводим прямую параллельную  $MP_1$ .
5. Построенные прямые определяют плоскость  $\alpha$ . По признаку  $\alpha \parallel MP_1Q_1$ .



# Построение линии пересечения плоскостей.

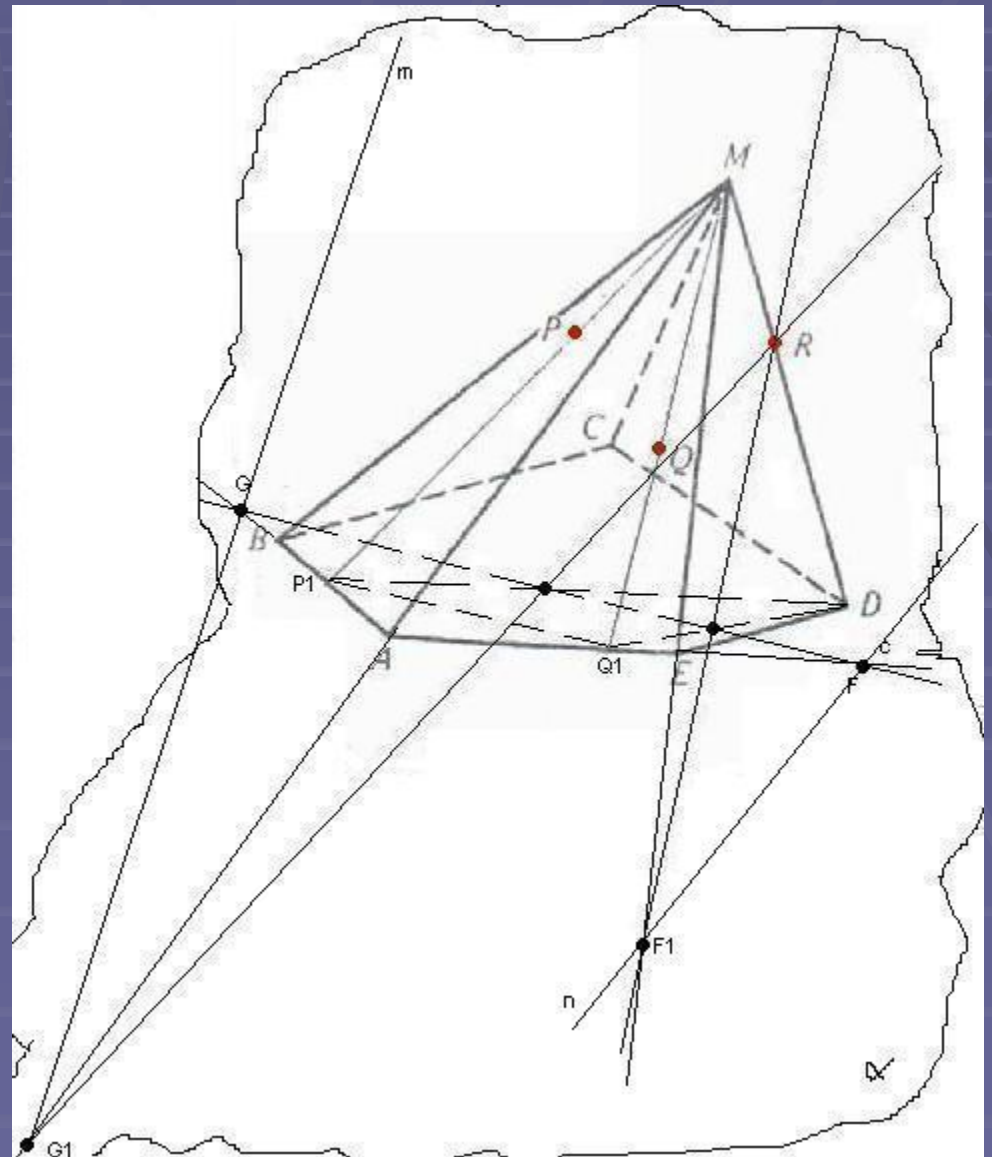
## ПРИЗМА.

1.  $P \in ABB_1$ ,  $AB \cap \alpha = F$ ,  
 $A_1B_1 \cap \alpha = F_1$ .
2.  $FF_1$  определяет  
прямую  $n$ .  $n = ABB_1 \cap \alpha$ .
3.  $Q \in CDD_1$ ,  $CD \cap \alpha = G$ ,  
 $C_1D_1 \cap \alpha = G_1$ .
4.  $GG_1$  определяет  
прямую  $m$ .  $m = CDD_1 \cap \alpha$



# ПИРАМИДА.

1.  $P \in ABM$ ,  $AM \cap \alpha = G1$ ,  
 $AB \cap \alpha = G$ ,  $ABM \cap \alpha = GG1$ .
2.  $Q \in AME$ ,  $ME \cap \alpha = F1$ ,  
 $AE \cap \alpha = F$ ,  $AME \cap \alpha = FF1$ .



## Алгоритм построения сечения методом параллельных прямых.

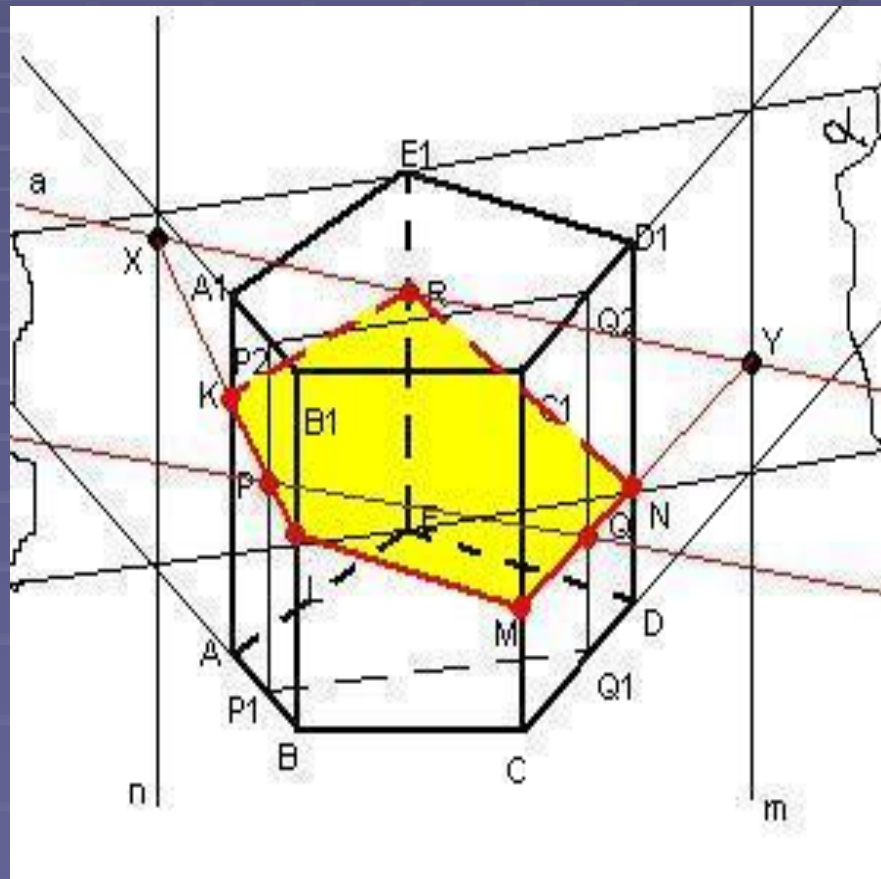
- Строим проекции точек, определяющих сечение. Через две данные точки (например  $P$  и  $Q$ ) и их проекции проводим плоскость.
- Через третью точку (например  $R$ ) строим параллельную ей плоскость  $\alpha$ .
- Находим линии пересечения (например  $m$  и  $n$ ) плоскости  $\alpha$  с гранями многогранника содержащими точки  $P$  и  $Q$ .
- Через точку  $R$  проводим прямую  $a$  параллельную  $PQ$ .
- Находим точки пересечения прямой  $a$  с прямыми  $m$  и  $n$ .
- Находим точки пересечения с ребрами соответствующей грани.



## ПРИЗМА.

Построить сечение плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ;  
 $P \in ABB_1$ ,  $Q \in CDD_1$ ,  $R \in EE_1$ .

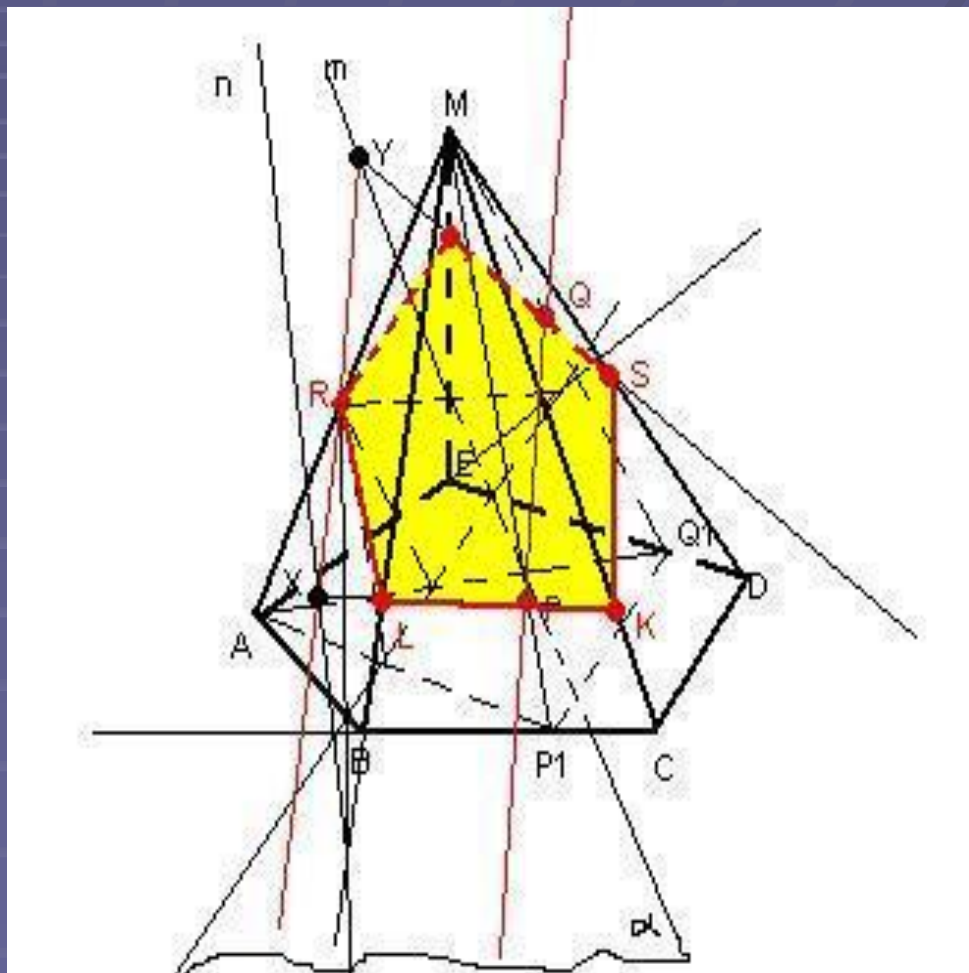
1. Строим проекции точек  $P$  и  $Q$  на плоскости верхнего и нижнего оснований.
2. Проводим плоскость  $P_1Q_1Q_2P_2$ .
3. Через ребро, содержащее точку  $R$ , проводим плоскость  $\alpha$  параллельную  $P_1Q_1Q_2$ .
4. Находим линии пересечения плоскостей  $ABB_1$  и  $CDD_1$  с плоскость  $\alpha$ .
5. Через точку  $R$  проводим прямую  $\parallel PQ$ .
6.  $a \cap n = X$ ,  $a \cap m = Y$ .
7.  $XP \cap AA_1 = K$ ,  $XP \cap BB_1 = L$ ;  
 $YQ \cap CC_1 = M$ ,  $YQ \cap DD_1 = N$ .
8.  $KLMNR$  – искомое сечение.



# ПИРАМИДА.

Построить сечение плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ;  
 $P \in MBC$ ,  $Q \in DEM$ ,  $R \in AM$ .

1. Строим проекции точек  $P$  и  $Q$  на плоскость основания.
2. Проводим плоскость  $MP_1Q_1$ .
3. Через точку  $R$ , проводим плоскость  $\alpha$  параллельную  $MP_1Q_1$ .
4. Находим линии пересечения плоскостей  $MBC$  и  $MED$  с плоскостью  $\alpha$ .  $MBC \cap \alpha = n$ ,  $MED \cap \alpha = m$ .
5. Через точку  $R$  проводим прямую  $a \parallel PQ$ .
6.  $a \cap n = X$ ,  $a \cap m = Y$ .
7.  $XR \cap MC = K$ ,  $XR \cap MB = L$ ;  
 $YQ \cap ME = N$ ,  $YQ \cap MD = S$ .
8.  $RLKSN$  – искомое сечение.



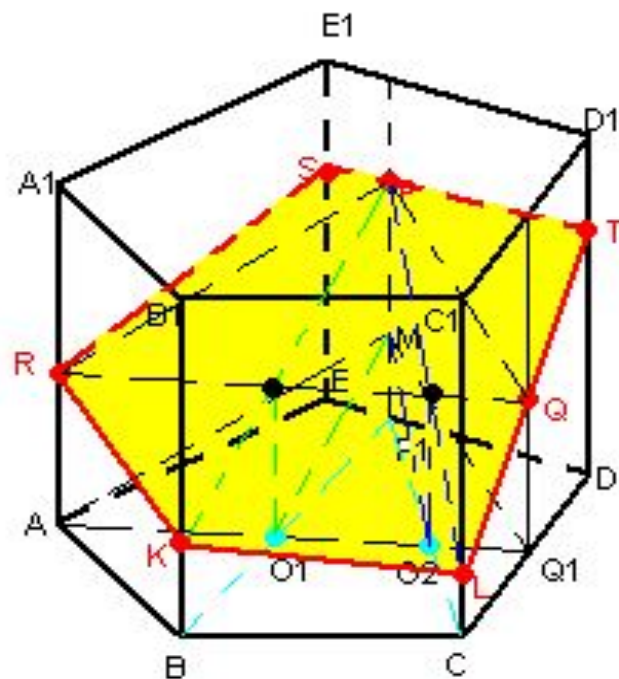
# Метод параллельного переноса секущей плоскости.

- Строим вспомогательное сечение данного многогранника, которое удовлетворяет следующим требованиям:
  - а) оно параллельно секущей плоскости;
  - б) в пересечении с поверхностью данного многогранника образует треугольник.
- Соединяем проекцию вершины треугольника с вершинами той грани многогранника, которую пересекает вспомогательное сечение, и находим точки пересечения со стороной треугольника, лежащей в этой грани.
- Соединяем вершину треугольника с этими точками.
- Через точку искомого сечения проводим прямые параллельные построенным отрезкам в предыдущем пункте и находим точки пересечения с ребрами многогранника.

# ПРИЗМА.

Построить сечение призмы плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ;  $P \in EDD_1$ ,  $Q \in CDD_1$ ,  $R \in AA_1$ .

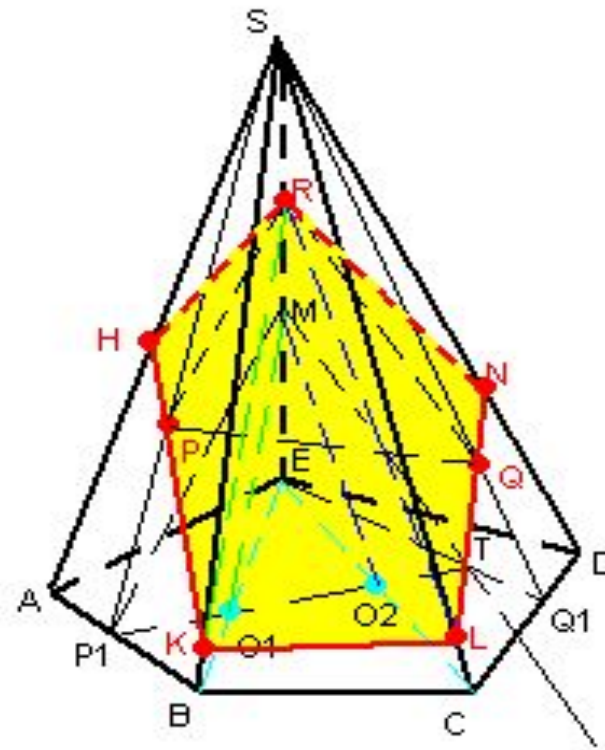
1.  $R \in AA_1$ ,  $P \in EDD_1$ ,  $Q \in CDD_1$ . Построим вспомогательное сечение  $AMQ_1 \parallel RPQ$ . Проведем  $AM \parallel RP$ ,  $MQ_1 \parallel PQ$ ,  $AMQ_1 \cap ABC = AQ_1$ .
2.  $P_1$ -проекция точек  $P$  и  $M$  на  $ABC$ . Проведем  $P_1B$  и  $P_1C$ .  $P_1B \cap AQ_1 = O_1$ ,  $P_1C \cap AQ_1 = O_2$ .
3. Через точку  $P$  проведем прямые  $m$  и  $n$  соответственно параллельные  $MO_1$  и  $MO_2$ .  $m \cap BB_1 = K$ ,  $n \cap CC_1 = L$ .
4.  $LQ \cap DD_1 = T$ ,  $TR \cap EE_1 = S$ .
5.  $RKLTST$  – искомое сечение.



# ПИРАМИДА.

Построить сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точки  $P, Q, R$ ;  $P \in ABS$ ,  $Q \in SCD$ ,  $R \in ES$ .

1.  $R \in SE$ ,  $P \in SAB$ ,  $Q \in SCD$ .  
Построим вспомогательное сечение  $MTP_1 \parallel RPQ$ . Проведем  $MP_1 \parallel RP$ ,  $MT \parallel RQ$ ,  $MTP_1 \cap ABC = TP_1$ .
2. Е-проекция точек  $S$  и  $M$  на  $ABC$ . Проведем  $EB$  и  $EC$ .  $EB \cap TP_1 = O_1$ ,  $EC \cap TP_1 = O_2$ .
3. Через точку  $R$  проведем прямые  $m$  и  $n$  соответственно параллельные  $MO_1$  и  $MO_2$ .  $m \cap SB = K$ ,  $n \cap SC = L$ .
4.  $LQ \cap SD = N$ ,  $KP \cap SA = H$ .
5.  $RHKLN$  – искомое сечение.



## Комбинированный метод.

Суть метода состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом. Применяется для построения сечения многогранника с условием параллельности.

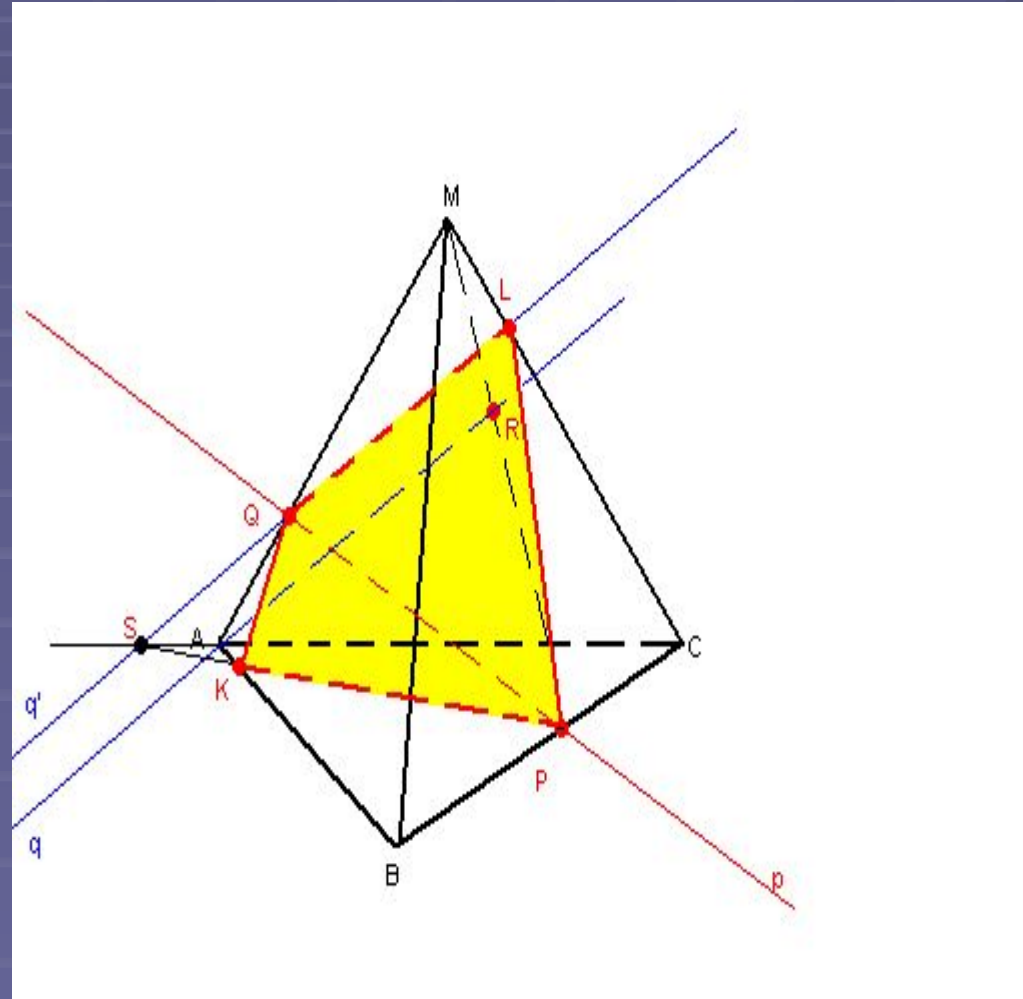
1. Построение сечения многогранника плоскостью  $\alpha$ , проходящей через заданную прямую  $p$  параллельно другой заданной прямой  $q$ .

- Через вторую прямую  $q$  и какую-нибудь точку  $W$  первой прямой  $p$  провести плоскость  $\beta$ .
- В плоскости  $\beta$  через точку  $W$  провести прямую  $q'$  параллельную  $q$ .
- Пересекающимися прямыми  $p$  и  $q'$  определяется плоскость  $\alpha$ .
- Непосредственное построение сечения многогранника плоскостью  $\alpha$

# ПИРАМИДА.

Построить сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$ , проходящей через прямую  $PQ$  параллельно  $AR$ ;  $P \in BC$ ,  $Q \in MA$ ,  $R \in MAC$ .

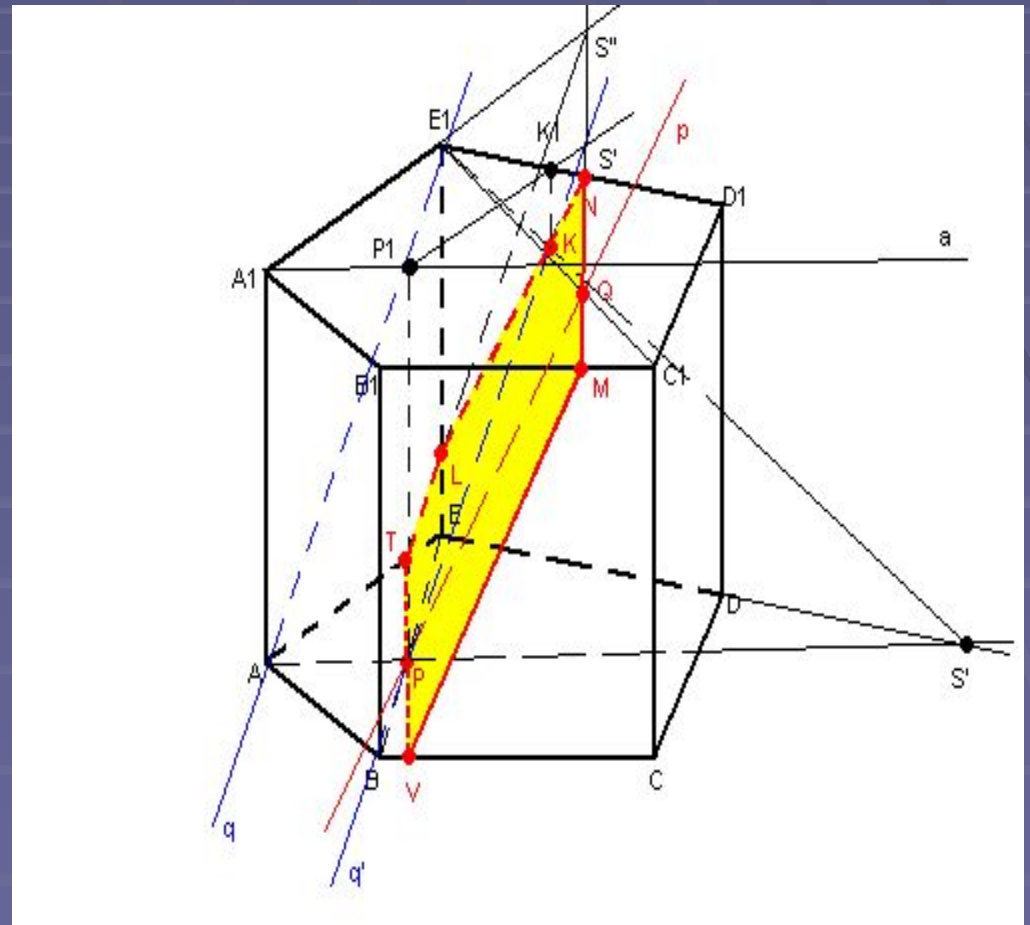
1. Проведем плоскость через прямую  $AR$  и точку  $Q$ .
2. В плоскости  $MAR$  через точку  $Q$  проведем прямую  $q'$  параллельную  $AR$ .  $q' \cap MC = L$ .
3.  $q' \cap AC = S$ .  $S \in ABC$ ,  $P \in ABC$ ,  $SP \cap AB = K$ .
4.  $QKPL$ -искомое сечение.



# ПРИЗМА.

Построить сечение призмы плоскостью  $\alpha$ , проходящей через прямую PQ параллельно  $AE_1$ ;  $P \in BE$ ,  $Q \in E_1C_1$ .

1. Проведем плоскость через прямую  $AE_1$  и точку  $P$ .
2. В плоскости  $AE_1P$  через точку  $P$  проведем прямую  $q'$  параллельную  $AE_1$ .  $q' \cap E_1S' = K$ .
3. Пересекающимися прямыми  $PQ$  и  $PK$  определяется искомая плоскость  $\alpha$ .
4.  $P_1$  и  $K_1$  - проекции точек  $P$  и  $K$  на  $A_1B_1C_1$ .  $P_1K_1 \cap PK = S''$ .  
 $S''Q \cap E_1D_1 = N$ ,  $S''Q \cap B_1C_1 = M$ ,  
 $NK \cap EE_1 = L$ ;  $MN \cap A_1E_1 = S'''$ ,  
 $S'''L \cap AE = T$ ,  $TP \cap BC = V$ .
5.  $TVMNL$  - искомое сечение.





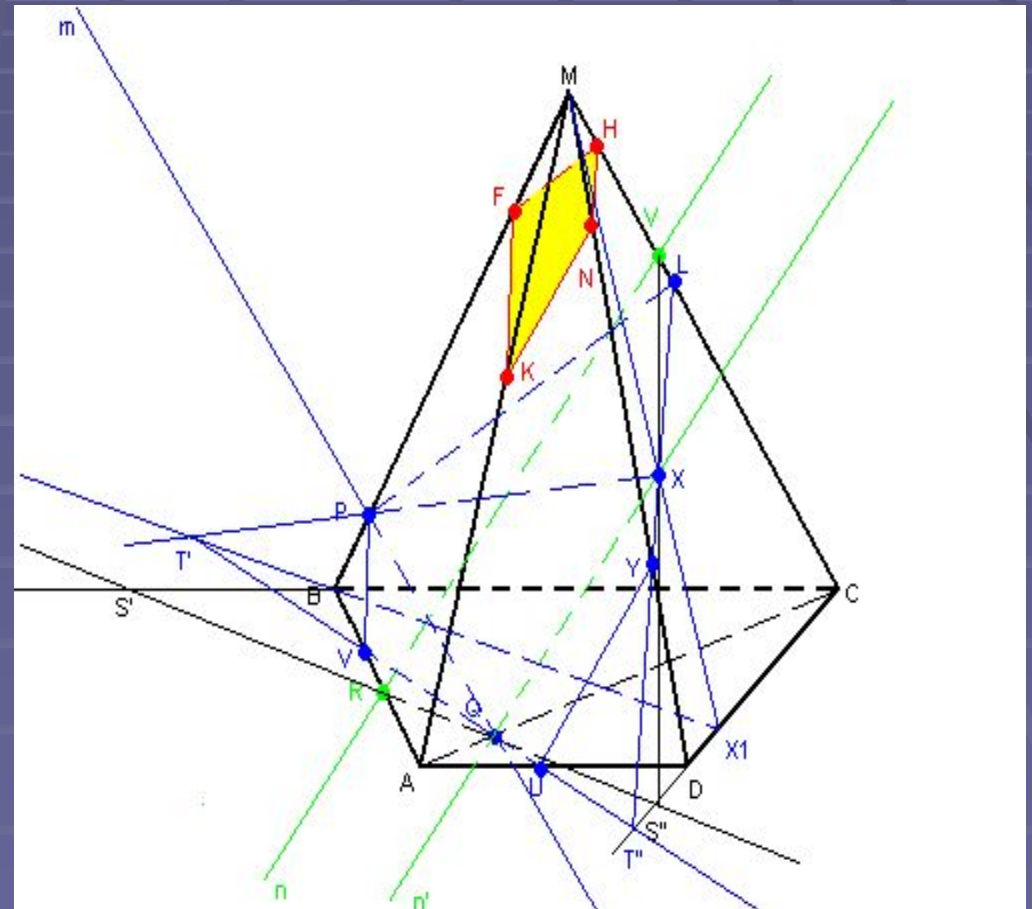
## 2. Построение сечения многогранника плоскостью $\alpha$ , проходящей через заданную точку $K$ параллельно двум заданным скрещивающимся прямым $m$ и $n$ .

- Выбрать некоторую точку  $W$ . Эта точка может лежать на одной из заданных скрещивающихся прямых, может совпадать с точкой  $K$ .
- Через точку  $W$  провести прямые  $n'$  и  $m'$ . Если точка  $W$  лежит на одной из прямых, например на прямой  $n$ , то прямая  $n'$  совпадает с прямой  $n$ .
- Пересекающимися прямыми  $n'$  и  $m'$  определяется плоскость  $\beta$  – плоскость вспомогательного сечения многогранника. Строим сечение многогранника плоскостью  $\beta$ .
- Строим сечение многогранника плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точку  $K$ , параллельно плоскости  $\beta$ .

# ПИРАМИДА.

Построить сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точку  $K$  параллельно прямым  $PQ$  и  $RV$ ;  $P \in MB$ ,  $Q \in AC$ ,  $R \in AB$ ,  $V \in MC$ .

1. Проведем плоскость через прямую  $RV$  и точку  $Q$ .
2. В плоскости  $RVQ$  через точку  $Q$  проведем  $n' \parallel RV$ .  $n' \cap VS'' = X$ .
3. Пересекающиеся прямые  $PQ$  и  $n'$  определяют плоскость  $\beta$ . Построим сечение этой плоскостью.
4.  $PX \cap BX_1 = T'$ ,  $T'Q \cap AB = V$ ,  $T'Q \cap AD = U$ .
5.  $X \in MCD$ ,  $CD \cap T'Q = T''$ ;  $T''X \cap MD = Y$ ,  $T''X \cap MC = L$ .
6.  $PVUYL$ -сечение призмы плоскостью  $\beta$ .
7. Проведем  $KN \parallel UY$ ,  $NH \parallel YL$ ,  $NF \parallel PL$ ,  $FK \parallel PV$ .
8.  $KNHF$ -искомое сечение.



# ПРИЗМА.

Построить сечение призмы плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точку  $K$  параллельно прямым  $PQ$  и  $AR$ ;  $P \in E_1D_1$ ,  $Q \in BC$ ,  $R \in ED$ .

1. В плоскости  $ABC$  через точку  $Q$  проведем  $n' \parallel AR$ .  $n' \cap CD = X$ .
2. Пересекающиеся прямые  $PQ$  и  $n'$  определяют плоскость  $\beta$ . Построим сечение этой плоскостью.
3. Через точку  $P$  в плоскости  $A_1B_1C_1$  проведем  $a \parallel n'$ .  $a \cap A_1E_1 = Y$ .  $a \cap C_1D_1 = S'$ ,  $S'X \cap DD_1 = V$ .  $AE \cap n' = S''$ ,  $S''Y \cap AA_1 = T$ ,  $AB \cap n' = S'''$ ,  $S'''T \cap BB_1 = U$ .
4.  $YTUQXVP$ -сечение призмы плоскостью  $\beta$ .
5. Через точку  $K$  проведем  $KM \parallel PV$ ,  $KN \parallel TY$ .
6.  $KMN$ -искомое сечение.

