СКОРОСТЬ ТОЧКИ

Скорость характеризует быстроту движения точки. Самую примитивную характеристику быстроты движения можно получить, разделив расстояние на время, за которое точка прошла это расстояние. Это, так называемая, средняя по модулю скорость. Такая характеристика может устроить пассажира, но абсолютно не годится для водителя транспортного средства

$$V_{cp} = \frac{s}{t}$$

Пункт А

Пункт Б

s

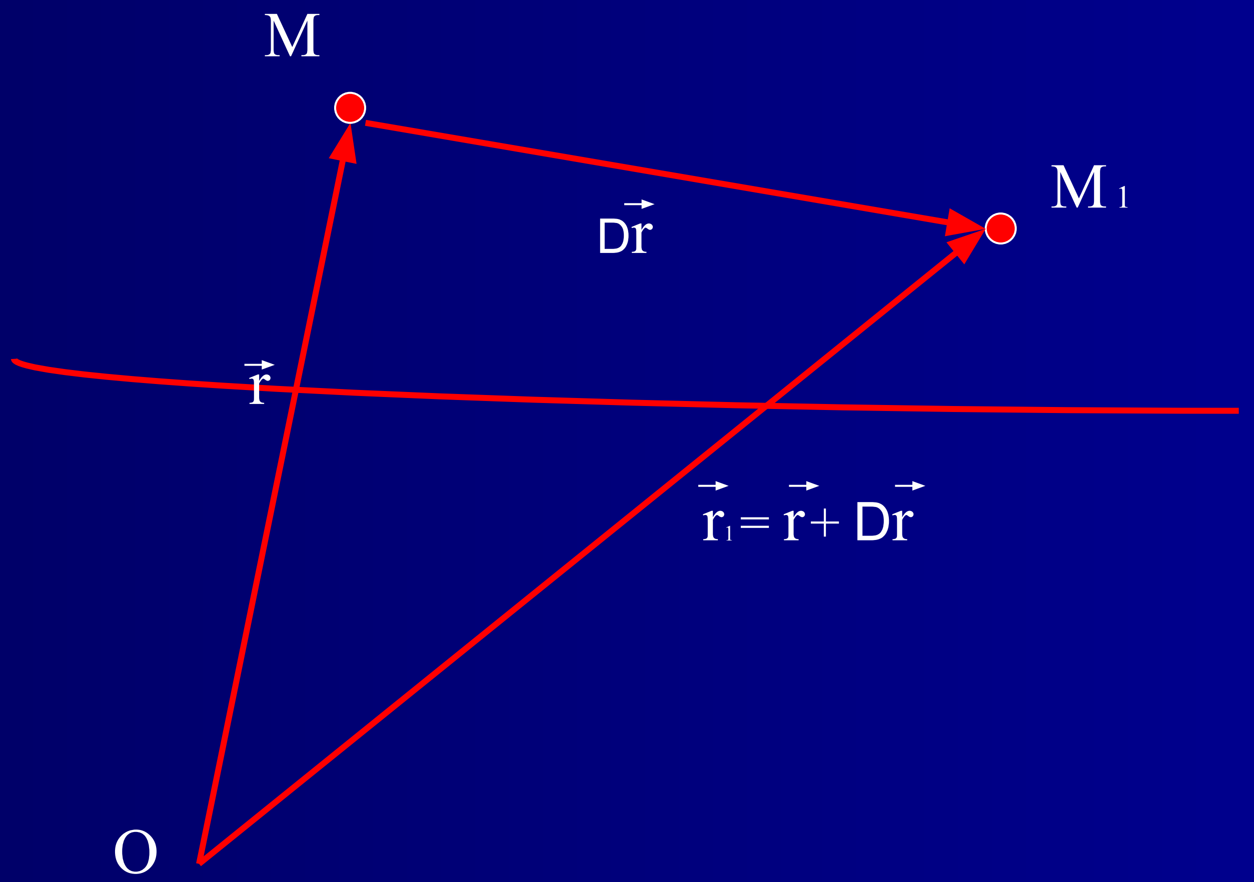
$$V_{cp} = \frac{s}{t}$$

$$V_{ср} = \frac{s}{t}$$

Как видно, в этих трёх примерах расстояние между начальным и конечным пунктами фиксировано, время движения одинаково, а само движение различно.

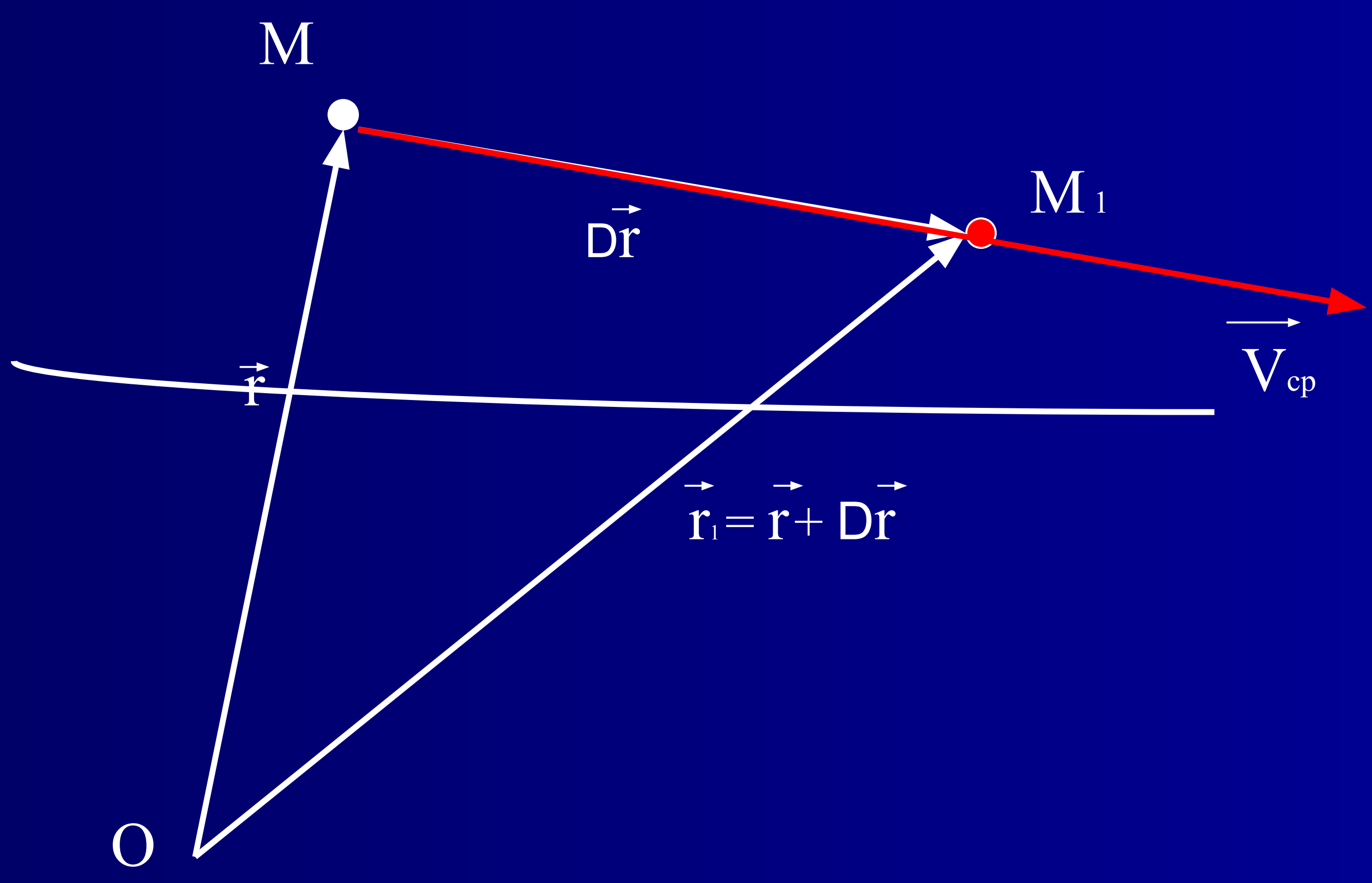
Очевидно, средняя скорость тем точнее характеризует существо вопроса, чем меньше промежуток времени, на котором она измеряется. Точный результат будет получен в пределе при величине промежутка времени, стремящейся к нулю. Заметим, что именно необходимость иметь математический аппарат для описания движения тел вызвала появление дифференциального исчисления

Пусть в момент времени t точка находится в положении М, которое задаётся радиусом-вектором $\vec{r}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ переходит в положение M_1, радиус-вектор которого $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r}$

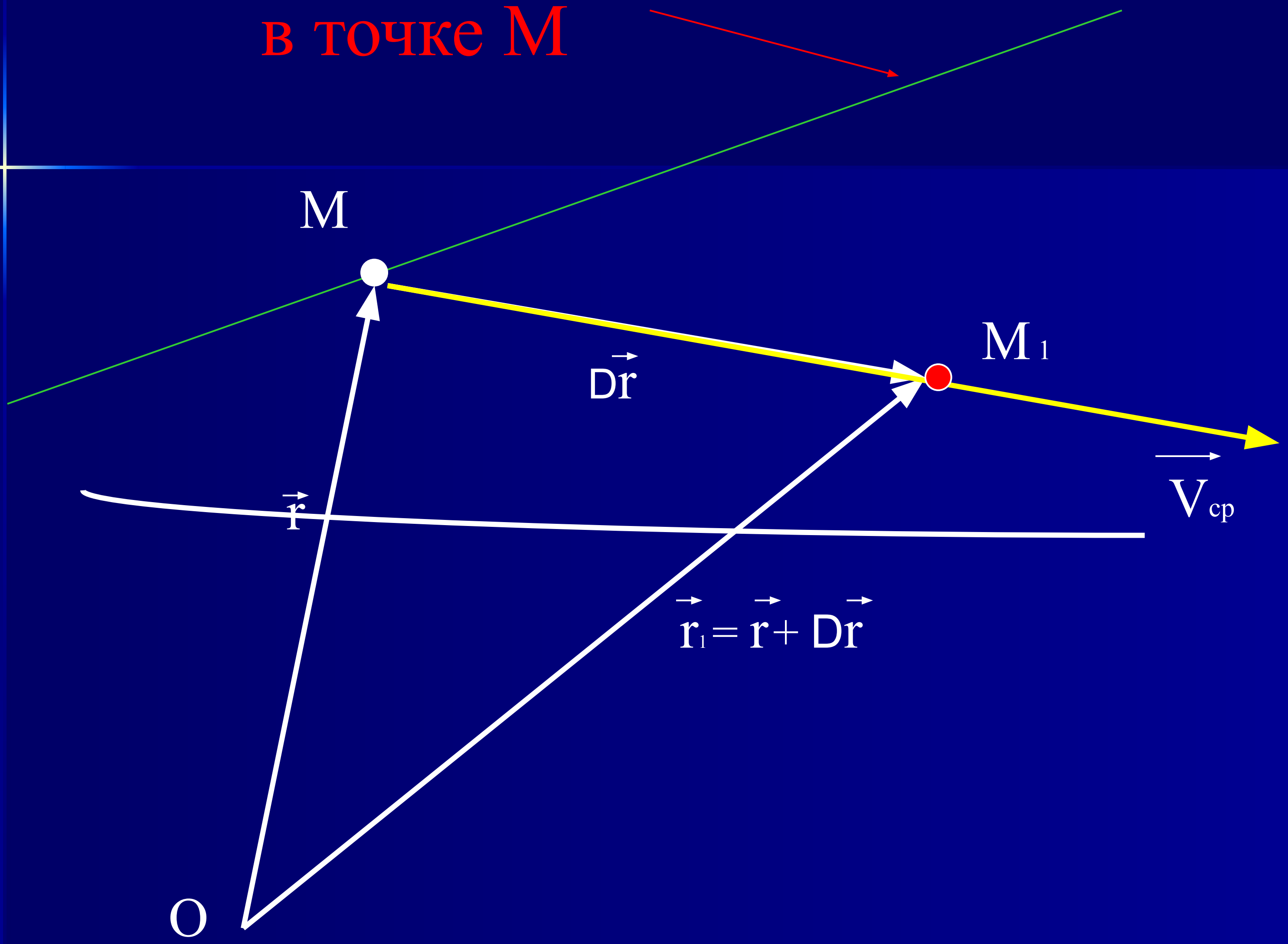


M
M 1
Dr
r
r1 = r + Dr
O

$$\vec{V}_{cp} = \frac{D\vec{r}}{Dt}$$ - средняя за время Dt скорость

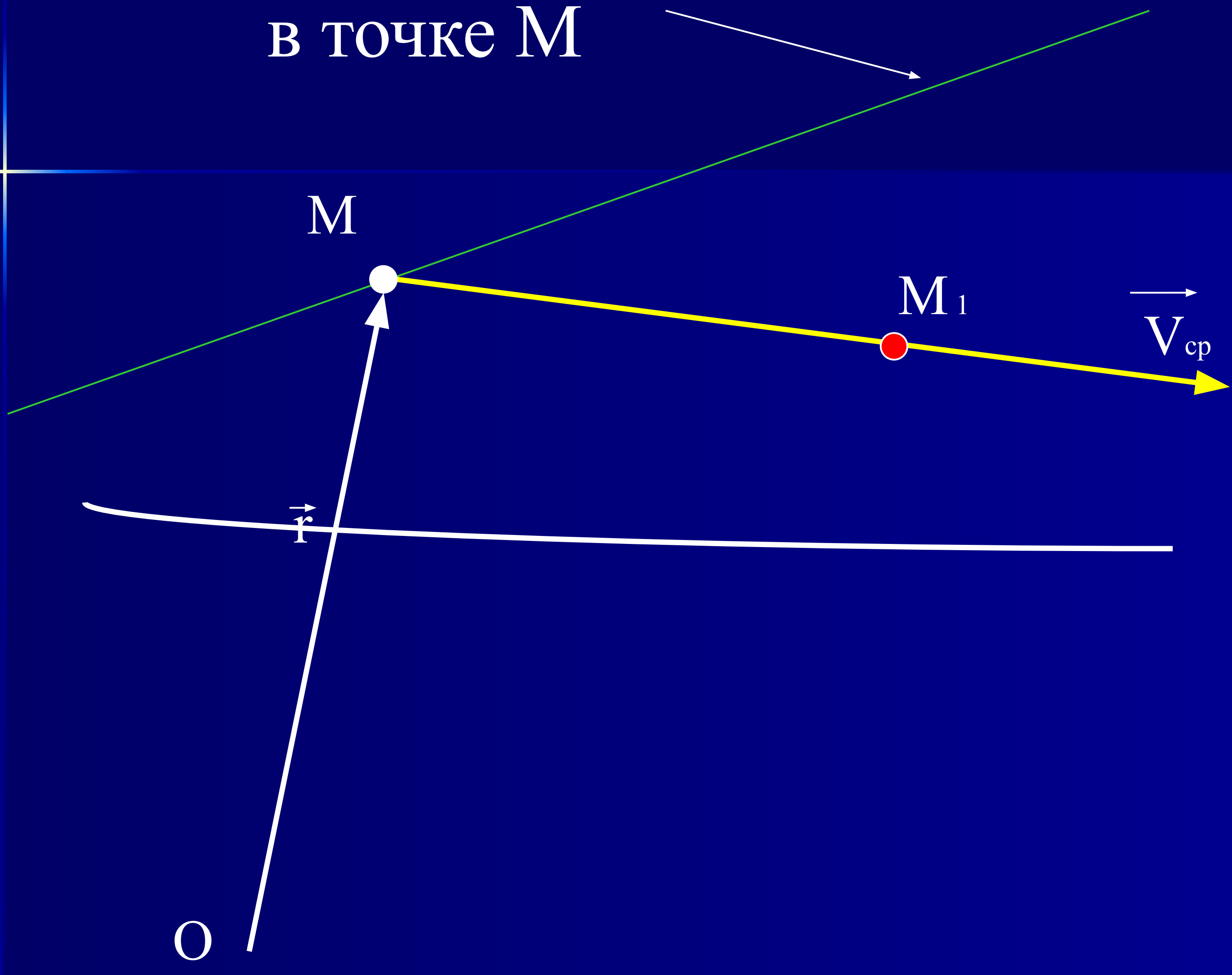


Касательная к траектории в точке M

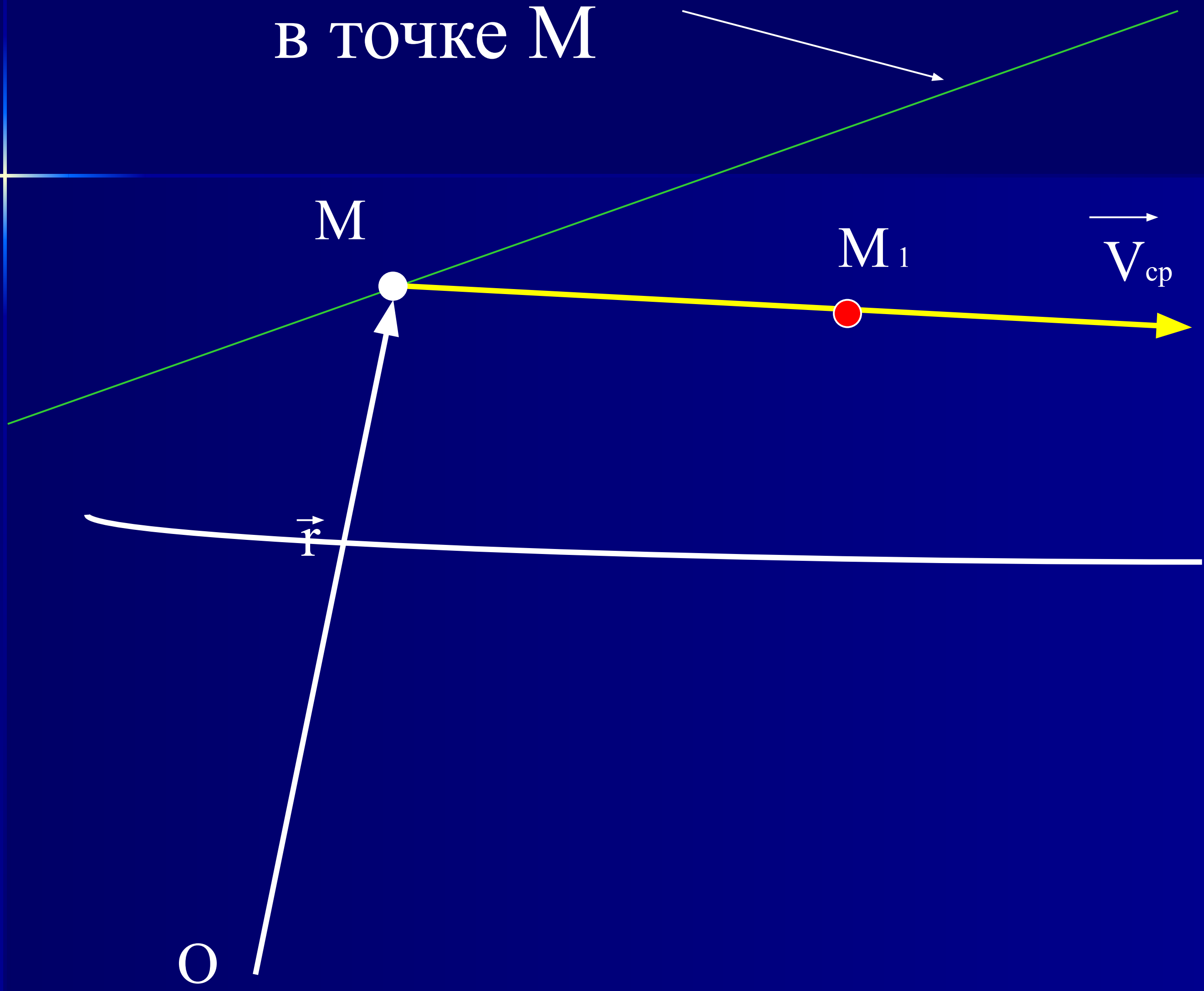


Переходим к пределу при $Dt \longrightarrow 0$

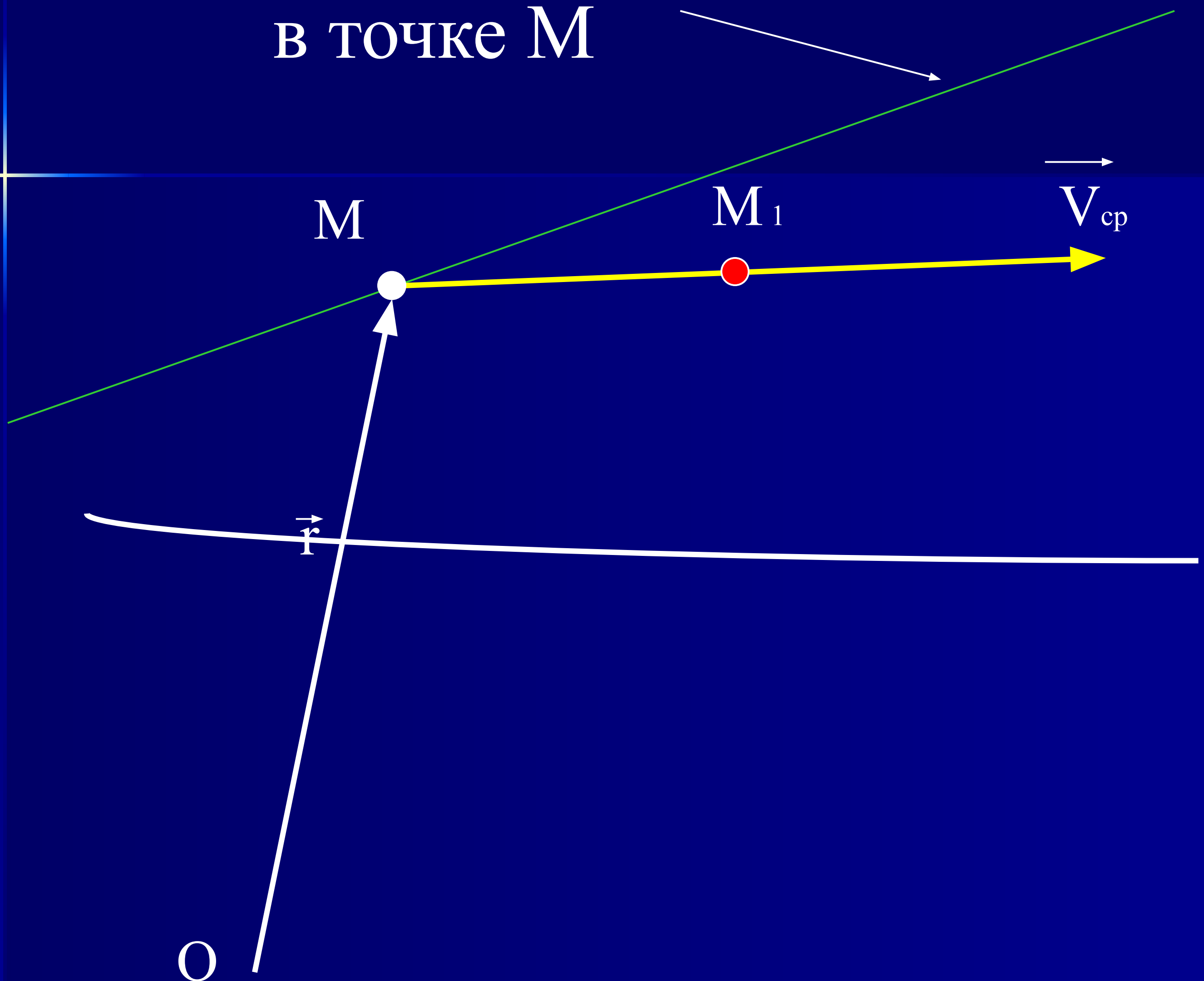
Касательная к траектории в точке М



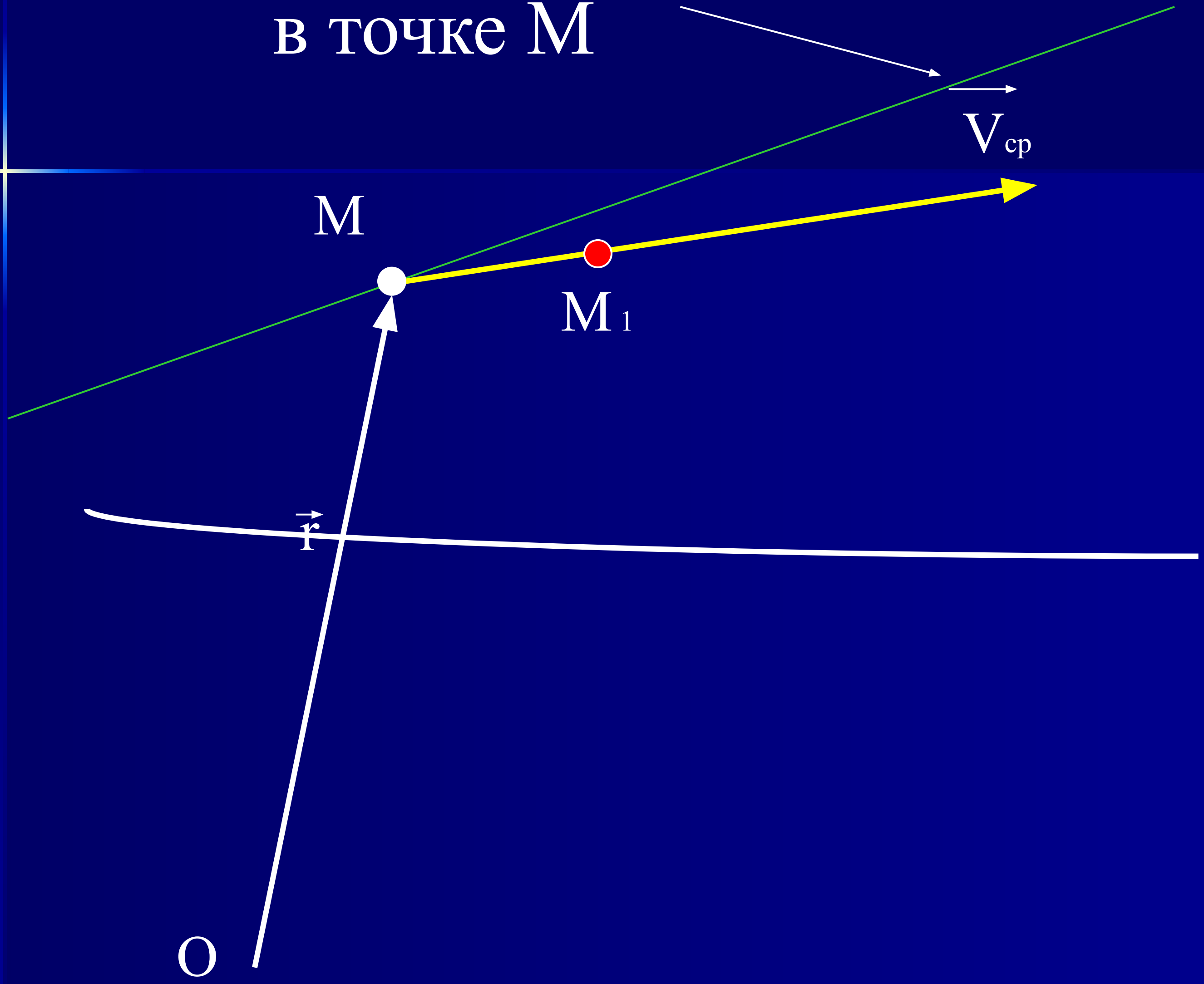
Касательная к траектории в точке М



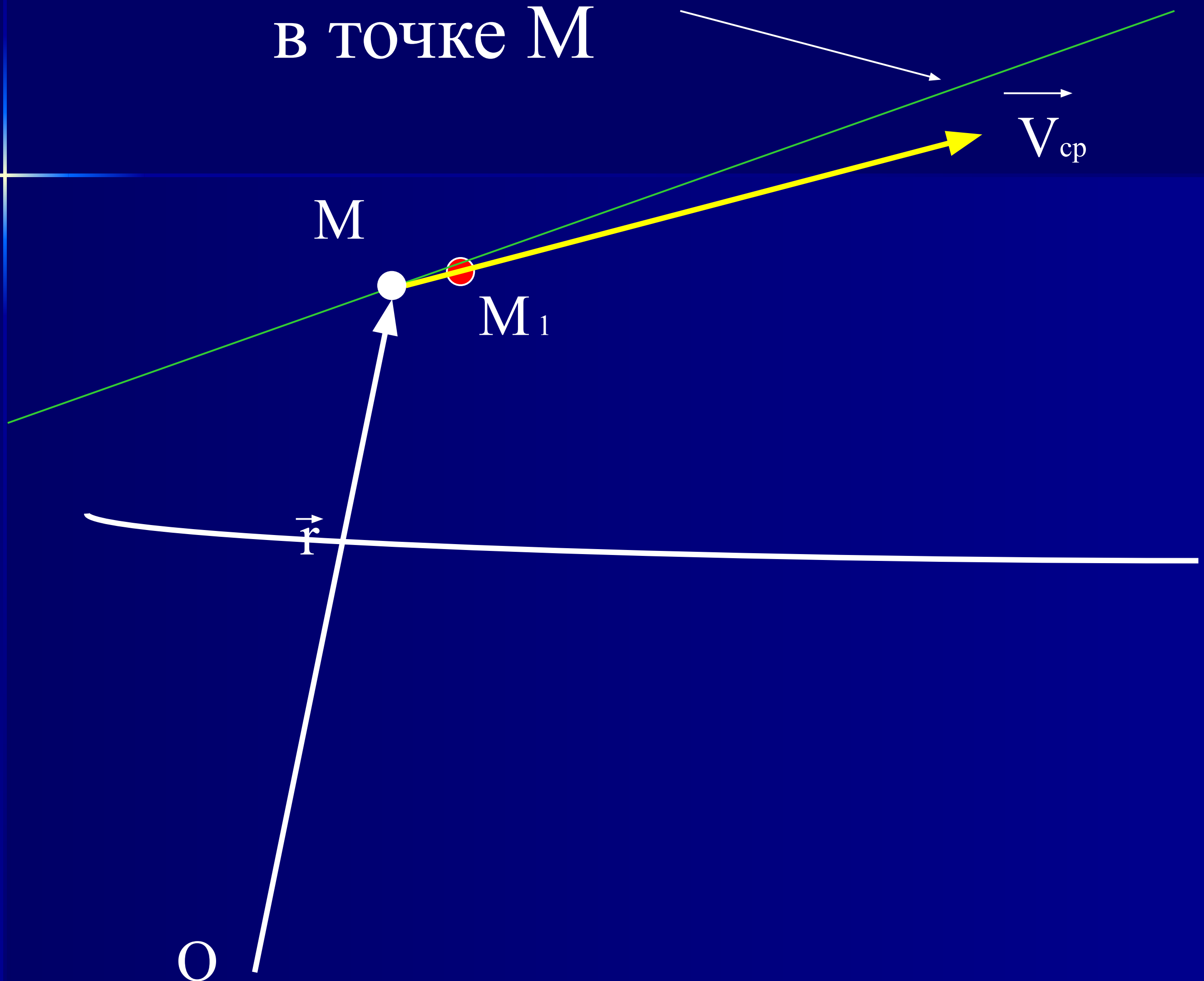
Касательная к траектории в точке М



Касательная к траектории в точке М



Касательная к траектории в точке М



Касательная к траектории
в точке М

Скорость направлена по касательной
к траектории в данной точке

Таким образом,

скорость точки равна первой производной по времени от радиуса-вектора точки

$$\boxed{\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Учитывая, что единичные векторы не зависят от времени

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right),$$

получаем проекции вектора скорости на оси координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

Таким образом, проекции вектора скорости на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки