



# Асимптоты

**Презентация  
по математике  
ученицы 11б класса  
Сапронкиной Дианы.**



# Содержание

- Вертикальная асимптота
- Горизонтальная асимптота
- Наклонная асимптота
- Связь между наклонной и горизонтальной асимптотами
- Порядок нахождения асимптот
- Нахождение вертикальных асимптот
- Нахождение горизонтальных асимптот
- Нахождение двух пределов
- Нахождение наклонных асимптот
- Выделение целой части у наклонных асимптот
- Использованные сайты

# Вертикальная асимптота

- Это прямая вида  $x = a$  при условии существования предела  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$
- Как правило, при определении вертикальной асимптоты ищут не один предел, а два односторонних (левый и правый). Это делается с целью определить, как функция ведёт себя по мере приближения к вертикальной асимптоте с разных сторон. Например:

$$1.) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$$

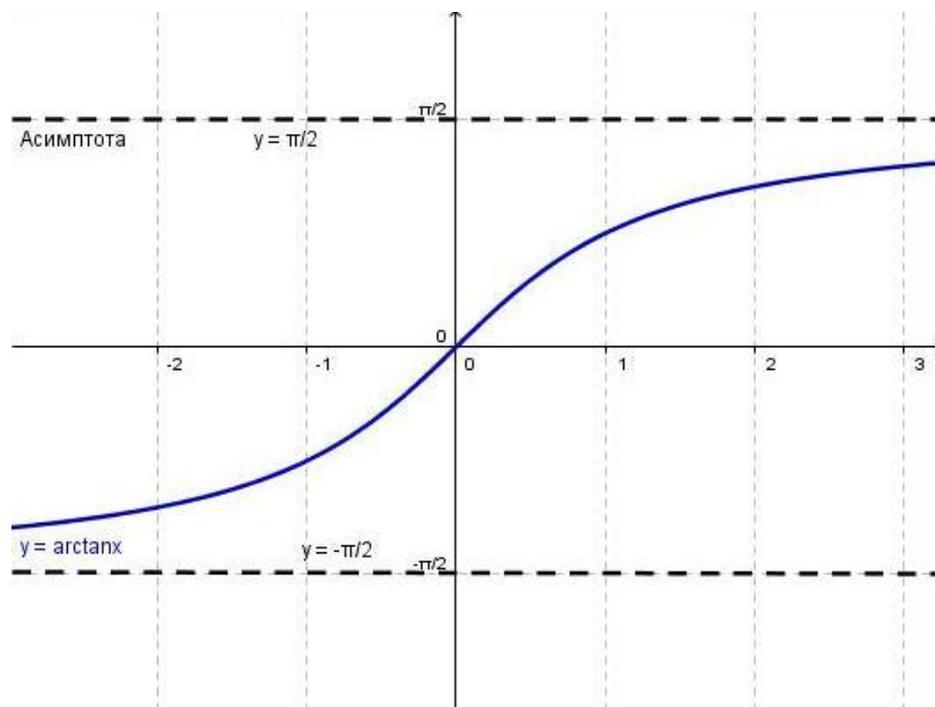
$$2.) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$$

**Замечание:** обратите внимание на знаки бесконечностей в этих равенствах.



# Горизонтальная асимптота

Это прямая вида  $y = a$  при условии существования предела  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$



# Наклонная асимптота

Это прямая вида  $y = kx + b$  при условии существования пределов:

$$1.) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$2.) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

**Замечание:** функция может иметь не более двух наклонных (горизонтальных) асимптот!

**Замечание:** Если хотя бы один из двух упомянутых выше пределов не существует (т.е. равен  $\infty$ ), то наклонной асимптоты при  $x \rightarrow +\infty$  (или  $x \rightarrow -\infty$ ) не существует!

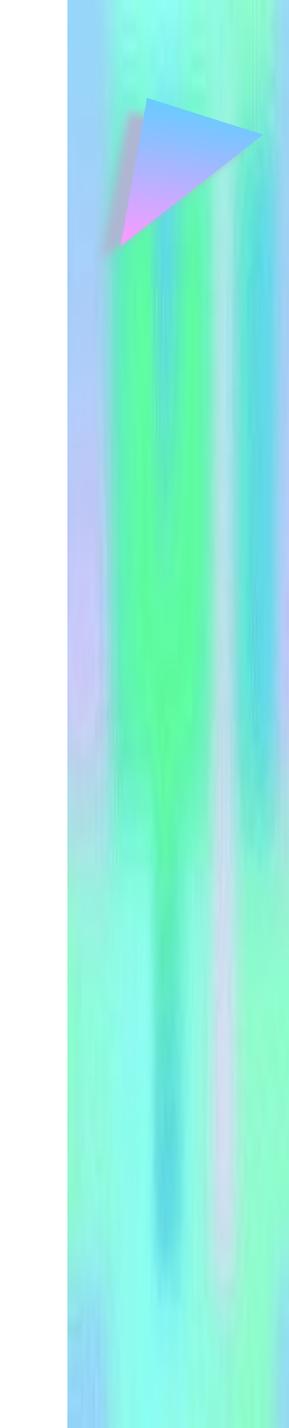




# Связь между наклонной и горизонтальной асимптотами

В случае, если наклонная асимптота расположена горизонтально, то есть при  $k = 0$ , она называется горизонтальной асимптотой. Таким образом, горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты при  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$



- 
- Из выше указанных замечаний **следует**, что
1. функция имеет или только одну наклонную асимптоту, или одну горизонтальную асимптоту, или одну наклонную и одну горизонтальную, или две наклонных, или две горизонтальных, либо же вовсе не имеет асимптот;
  2. существование указанных в первом пункте асимптот напрямую связано с существованием соответствующих пределов.



# Порядок нахождения асимптот

1. Нахождение вертикальных асимптот;
2. Нахождение горизонтальных асимптот;

3. Нахождение двух пределов

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

4. Нахождение двух пределов

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$$



# Нахождение вертикальных асимптот

Из определения асимптоты следует, что прямая  $x = a$  – асимптота кривой  $y = f(x)$ .

- Например, для функции  $f(x) = 2/(x - 5)$  прямая  $x = 5$  является вертикальной асимптотой.
- У функции  $y = \frac{9x}{9 - x^2}$  прямые  $x = 3$  и  $x = -3$  являются вертикальными асимптотами кривой.

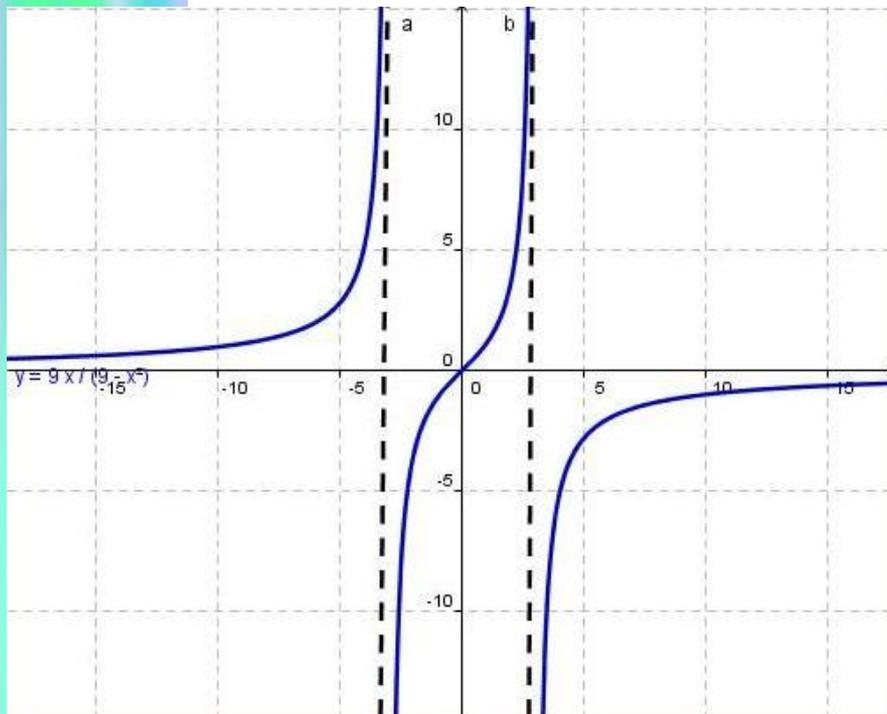
Вертикальных асимптот график не имеет, если область определения не имеет граничных точек. (У графиков многочленов не бывает вертикальных асимптот.)

- Например,  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$  не имеет вертикальных асимптот.

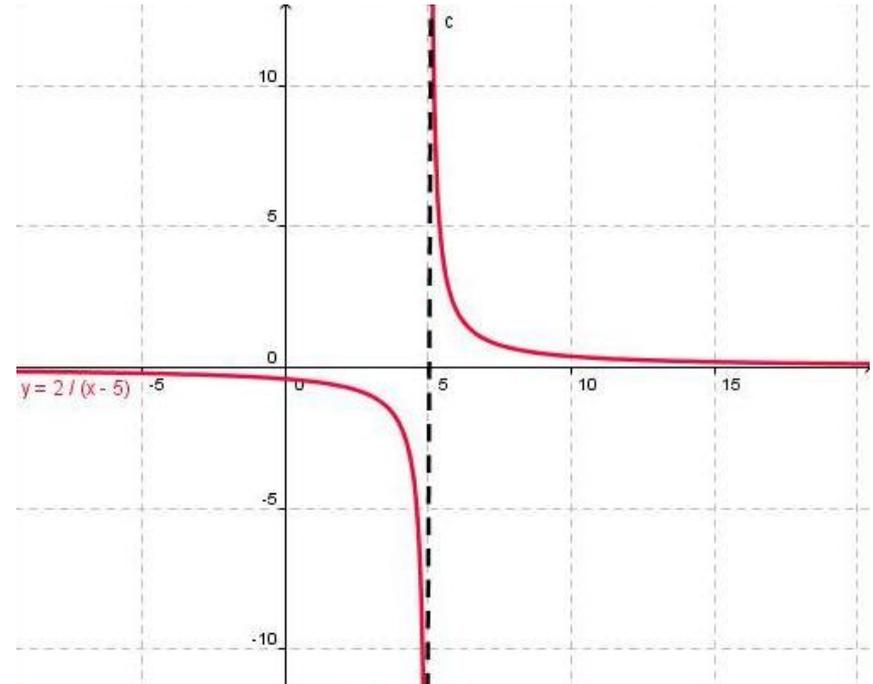


# Вертикальные асимптоты

$$y = f(x) = \frac{9x}{9-x^2} = -\frac{9x}{(x-3)(x+3)}$$



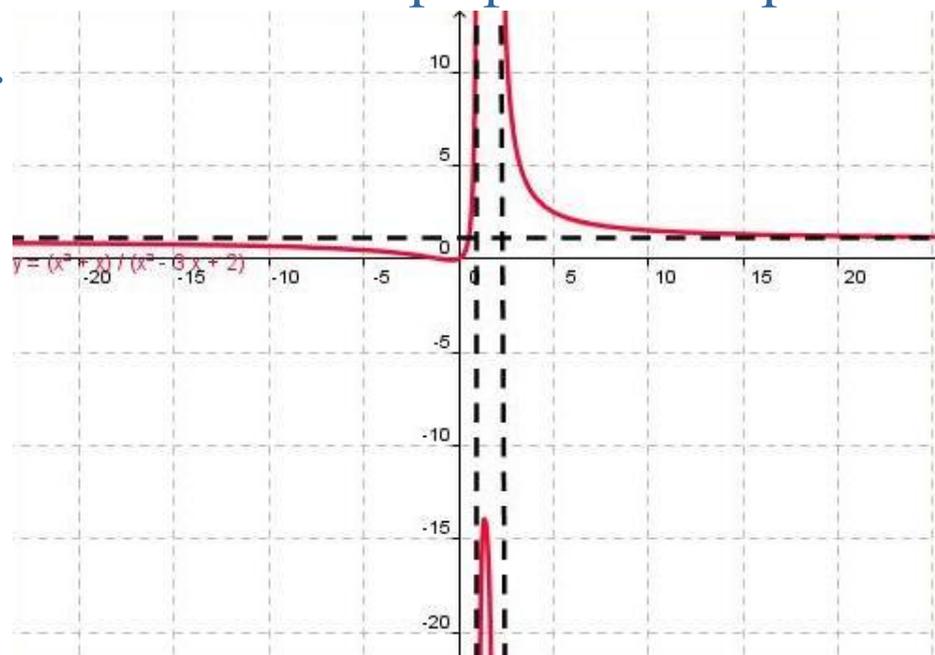
$$y = f(x) = \frac{2}{x-5}$$



# Нахождение горизонтальных асимптот

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 - 0 + 0} = 1.$$

Следовательно, горизонтальная прямая  $y = 1$  служит горизонтальной асимптотой графика как при  $x \rightarrow -\infty$ , так и при  $x \rightarrow +\infty$ .



## Нахождение двух пределов

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$
- Если  $k = 0$  в предыдущем пункте нахождения двух пределов, то  $kx = 0$ , и предел  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$  ищется по формуле горизонтальной асимптоты,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$



# Нахождение наклонных асимптот

- Находятся по формуле:

$$y = kx + b \Leftrightarrow k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x},$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$$

- Также наклонную асимптоту можно найти, **выделив целую часть**.



# Выделение целой части у наклонных асимптот

- Например, дана функция  $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 1}{x^2 + 1}$

Разделив нацело числитель на знаменатель, получим:

$$f(x) = 2x + 5 + \frac{-2x - 4}{x^2 + 1} = 2x + 5 + (-2) * \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

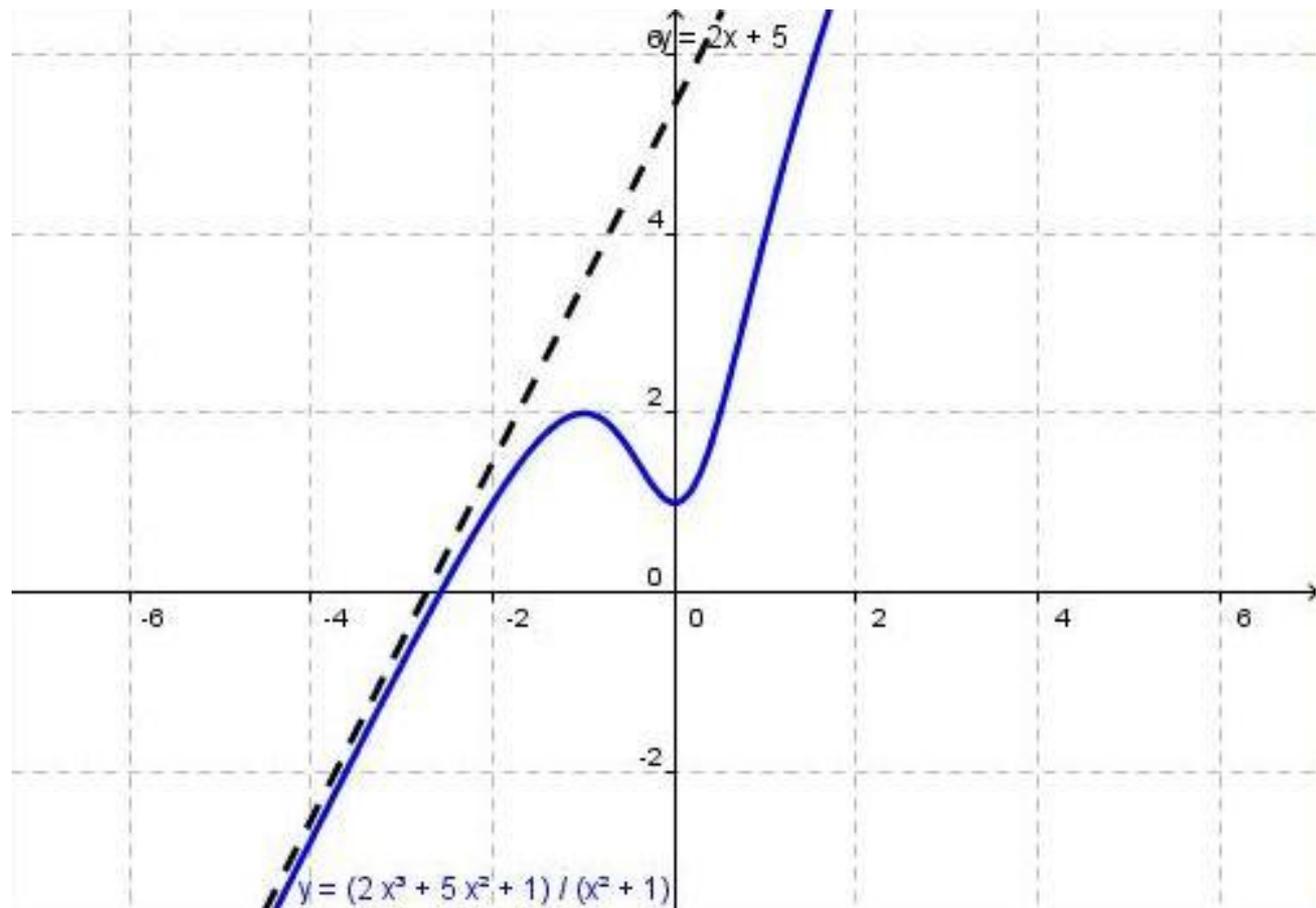
При  $x \rightarrow \infty$ ,  $\frac{x + 2}{x^2 + 1} \rightarrow 0$  ГВ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x + 5) = \pm\infty$$

$y = 2x + 5$  является искомым уравнением асимптоты



# Наклонная асимптоты предыдущего примера



## Использованные сайты

- <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BF%D1%82%D0%BE%D1%82%D1%8B>
- <http://sesia5.ru/vmat/gl2/r15.htm>
- <http://elib.ispu.ru/library/math/sem1/kiselev1/node63.html>
- <http://webmath.exponenta.ru/dnu/lc/kiselev1/node69.htm>
- <http://mathserfer.com/theory/kiselev1/node68.htm>  
!

