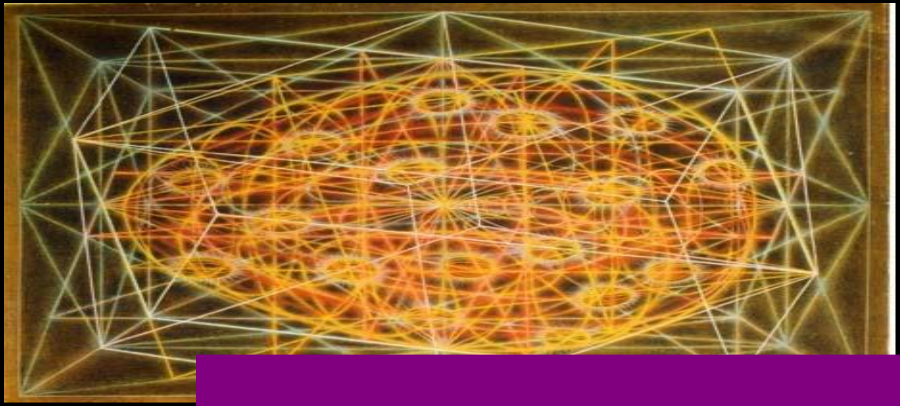
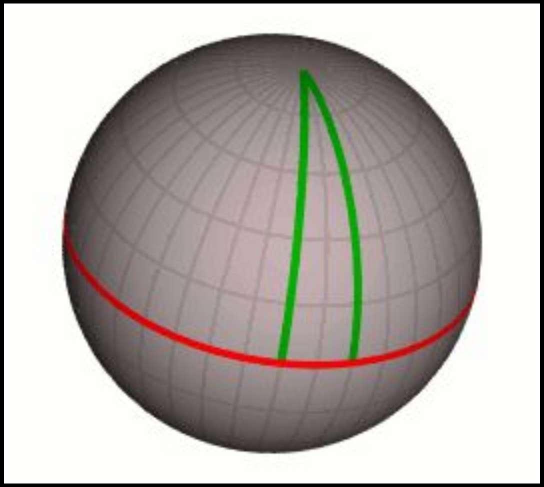


НеЕвклидова геометрия

НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ, геометрия, сходная с геометрией Евклида в том, что в ней определено движение фигур, но отличающаяся от евклидовой геометрии тем, что один из пяти ее постулатов (второй или пятый) заменен его отрицанием.

Отрицание одного из евклидовых постулатов (1825) явилось значительным событием в истории мысли, ибо послужило первым шагом на пути к теории относительности.



- Второй постулат Евклида утверждает, что любой отрезок прямой можно неограниченно продолжить. Евклид, по-видимому, считал, что этот постулат содержит в себе и утверждение, что прямая имеет бесконечную длину. Однако в «эллиптической» геометрии любая прямая конечна и, подобно окружности, замкнута.
- Пятый постулат утверждает, что если прямая пересекает две данные прямые так, что два внутренних угла по одну сторону от нее в сумме меньше двух прямых углов, то эти две прямые, если продолжить их неограниченно, пересекутся с той стороны, где сумма этих углов меньше суммы двух прямых.

Но в «гиперболической» геометрии может существовать прямая *CB* (рис. 1), перпендикулярная в точке *C* к заданной прямой *r* и пересекающая другую прямую *s* под острым углом в точке *B*, но, тем не менее бесконечные прямые *r* и *s* никогда не пересекутся.

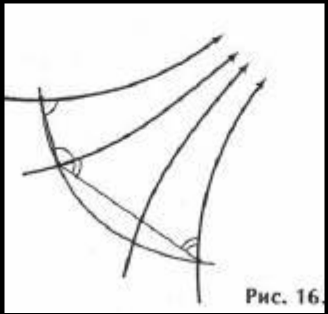
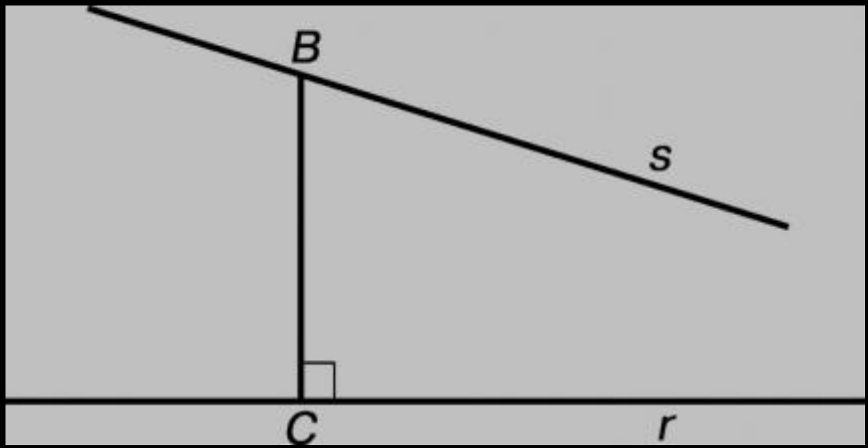


Рис. 16.

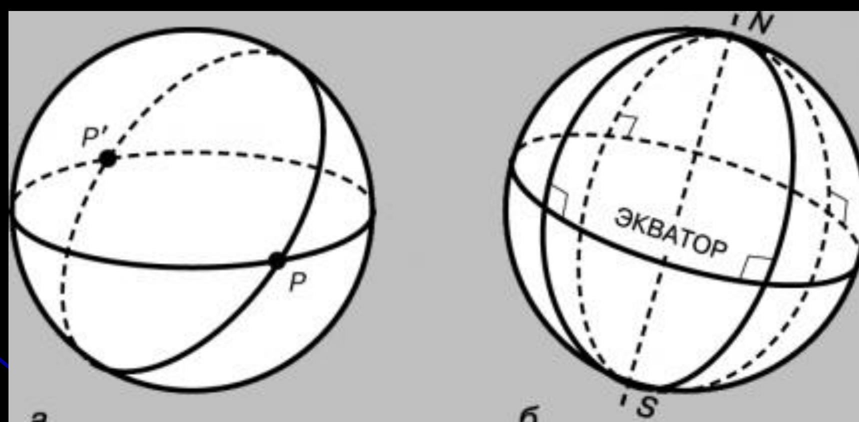
- В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ может существовать прямая CB, перпендикулярная данной прямой r и пересекающая другую данную прямую s под острым углом в точке B так, что бесконечный луч s не пересекает прямую r.
- Из этих пересмотренных постулатов следовало, что сумма углов треугольника, равная 180° в евклидовой геометрии, больше 180° в эллиптической геометрии и меньше 180° в гиперболической геометрии.



- САККЕРИ – четырехугольник BCED с BC = ED и прямыми углами при вершинах C и E. Евклидова геометрия требует, чтобы углы B и D также были прямыми. В эллиптической геометрии эти углы – тупые, а в гиперболической – острые.

на эллиптической плоскости «точка» представлена двумя точками-
антиподами на сфере, например, точками Р и Р ў. б— диаметр,
соединяющий северный и южный полюсы сферы, на эллиптической

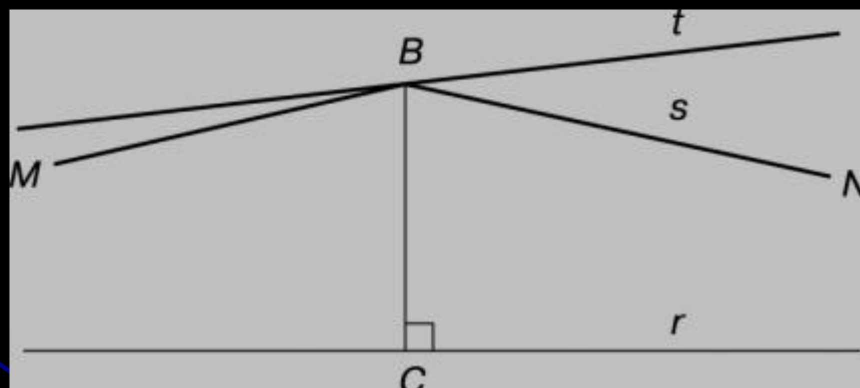
- **Эллиптическая плоскость.** Ф.Клейн (1849–1925) первым увидел, как избавить сферическую геометрию от одного из ее недостатков – того, что две лежащие в одной плоскости «прямые» (два больших круга на сфере) имеют не одну общую точку, а две (рис. 3,*а*). Так как для каждой точки существует одна-единственная точка-антипод (диаметрально противоположная точка), а для любой фигуры существует ее дубликат из точек-антиподов, мы можем, ничем не жертвуя, но многое приобретая, абстрактно отождествить обе точки такой пары, объединив их в одну.



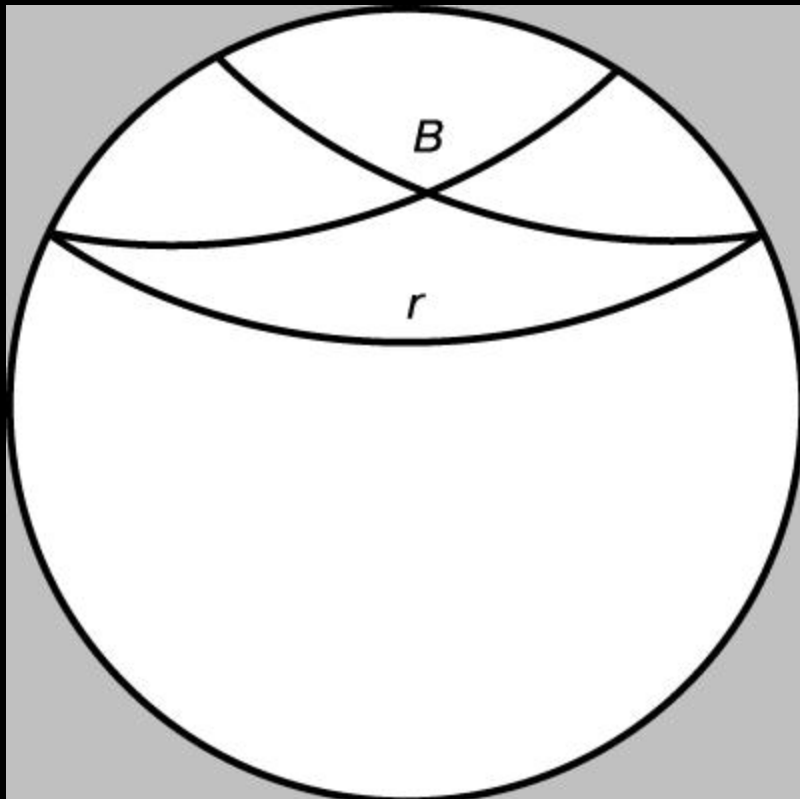
на эллиптической плоскости «точка» представлена двумя точками-антиподами на сфере, например, точками Р и Р ў. б – диаметр, соединяющий северный и южный полюсы сферы, на эллиптической плоскости является «полюсом» экватора.

ЛЮБАЯ ПОЛУПРЯМАЯ, например t, являющаяся продолжением стороны угла NBM, образует с r пару «гиперпараллельных», т.е. две прямые, которые не пересекаются и не параллельны.

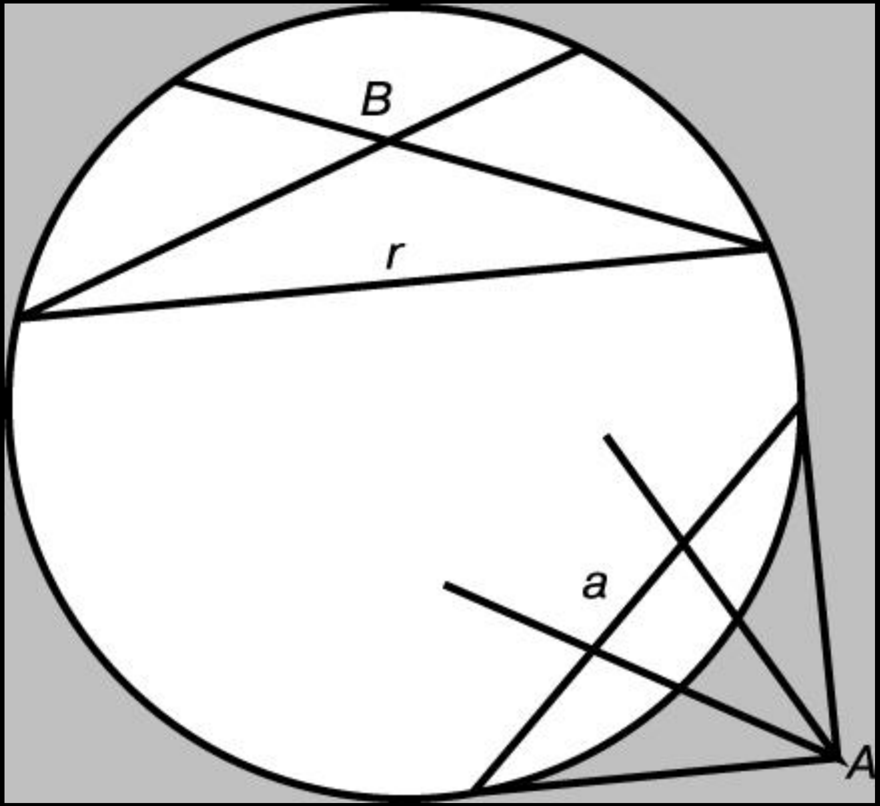
- **Гиперболическая плоскость.** Из абсолютной геометрии Бойяи можно вывести евклидову геометрию, добавив евклидову (или аффинную) аксиому: через точку *B*, не лежащую на данной прямой *r*, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.
- Множество прямых, перпендикулярных данной прямой *a*, называются «пучком гиперпараллельных» с «осью» *a*.



ЛЮБАЯ ПОЛУПРЯМАЯ, например t, являющаяся продолжением стороны угла NBM, образует с r пару «гиперпараллельных», т.е. две прямые, которые не пересекаются и не параллельны.



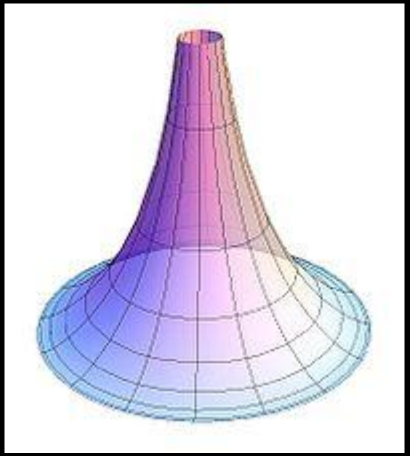
- ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВС и BD к r, проходящие через точку В, – это просто две дуги, проходящие через точку В так, что они касаются r в ее концах. Эта модель «конформна», так как углы сохраняются, хотя расстояния неизбежно искажаются.



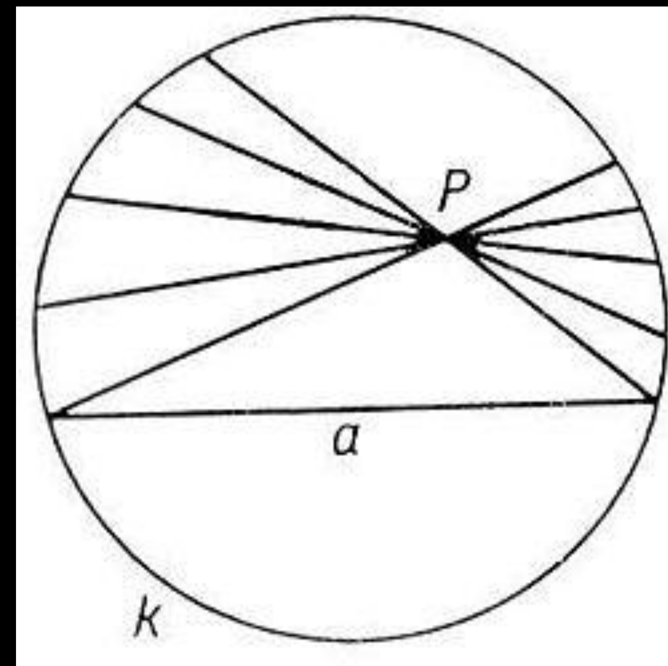
- В ЭТОЙ КОНФОРМНОЙ МОДЕЛИ, если мы согласимся, что углы также искажаются, дуги, изображенные на рис. 5, можно заменить их хордами. В нижней части рисунка ось пучка параллельных – «поляра» точки А, соединяющая точки касания двух касательных, проведенных из А.

псевдосфера

- Итальянский математик Э. Бельтрами в 1868 годуИтальянский математик Э. Бельтрами в 1868 году заметил, что геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, простейший пример которых представляет псевдосфераИтальянский математик Э. Бельтрами в 1868 году заметил, что геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, простейший пример которых представляет псевдосфера. Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставлять точки и кратчайшие линии (геодезические) на псевдосфере и движению в плоскости Лобачевского сопоставлять перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, то есть деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме геометрии Лобачевского будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере. При этом длины, углы, площади понимаются в смысле естественного измерения их на псевдосфере.

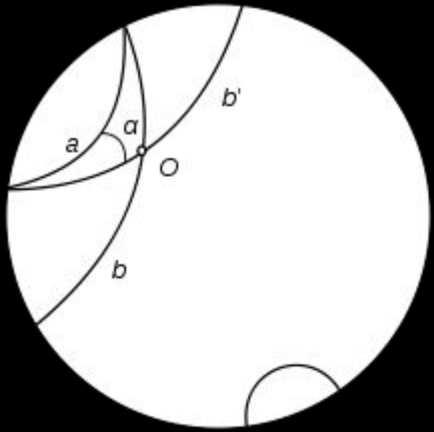


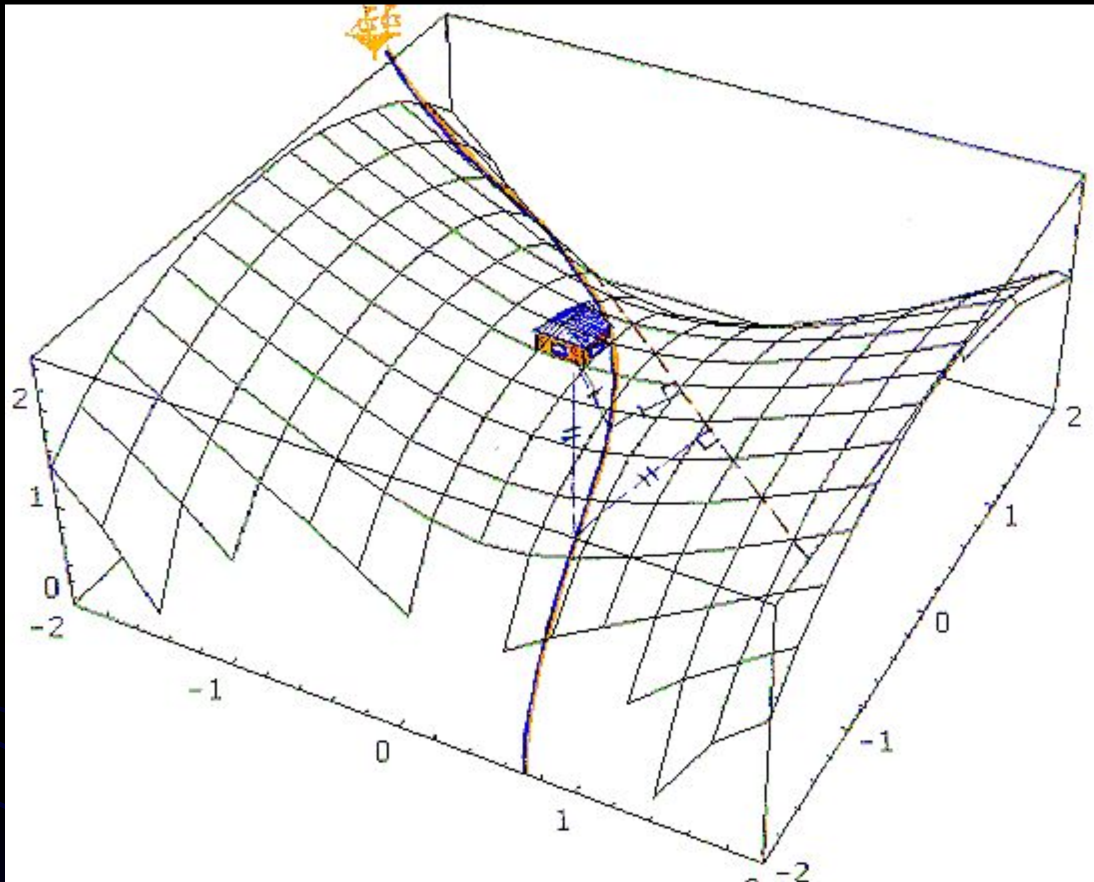
- В 1871 году Клейн предложил первую полноценную модель плоскости Лобачевского.
- Плоскостью служит внутренность круга, прямой — хорда круга без концов, а точкой — точка внутри круга. «Движением» назовём любое преобразование круга в самого себя, которое переводит хорды в хорды. Соответственно, равными называются фигуры внутри круга, переводящиеся одна в другую такими преобразованиями. Тогда оказывается, что любой геометрический факт, описанный на таком языке, представляет теорему или аксиому геометрии Лобачевского. Иными словами, всякое утверждение геометрии Лобачевского на плоскости есть не что иное, как утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга, лишь пересказанное в указанных терминах. Евклидова аксиома о параллельных здесь явно не выполняется, так как через точку *O*, не лежащую на данной хорде a (то есть «прямой»), проходит сколько угодно не пересекающих её хорд («прямых») (например, *b*, *b*').

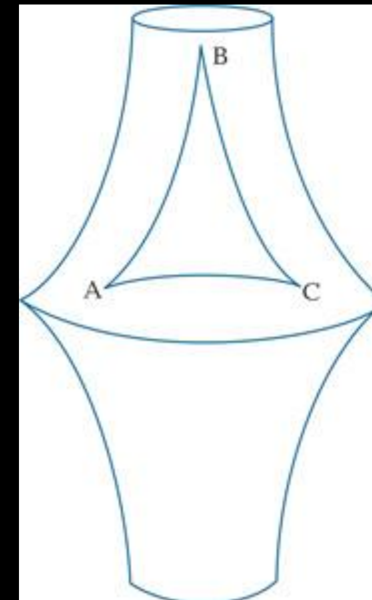


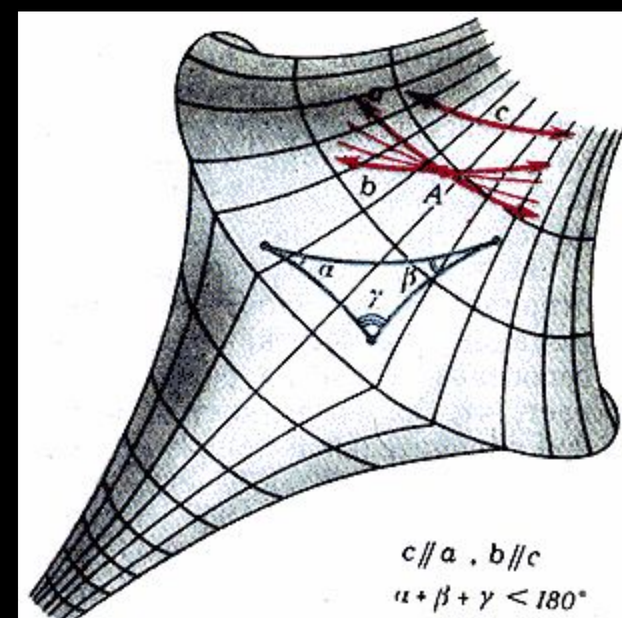
$$\ln\left(\frac{AN}{AM}\frac{BN}{BM}\right)$$

За плоскость Лобачевского принимается внутренность круга, прямыми считаются дуги окружностей, перпендикулярных окружности данного круга, и его диаметры, движениями — преобразования, получаемые комбинациями инверсий относительно окружностей, дуги которых служат прямыми.



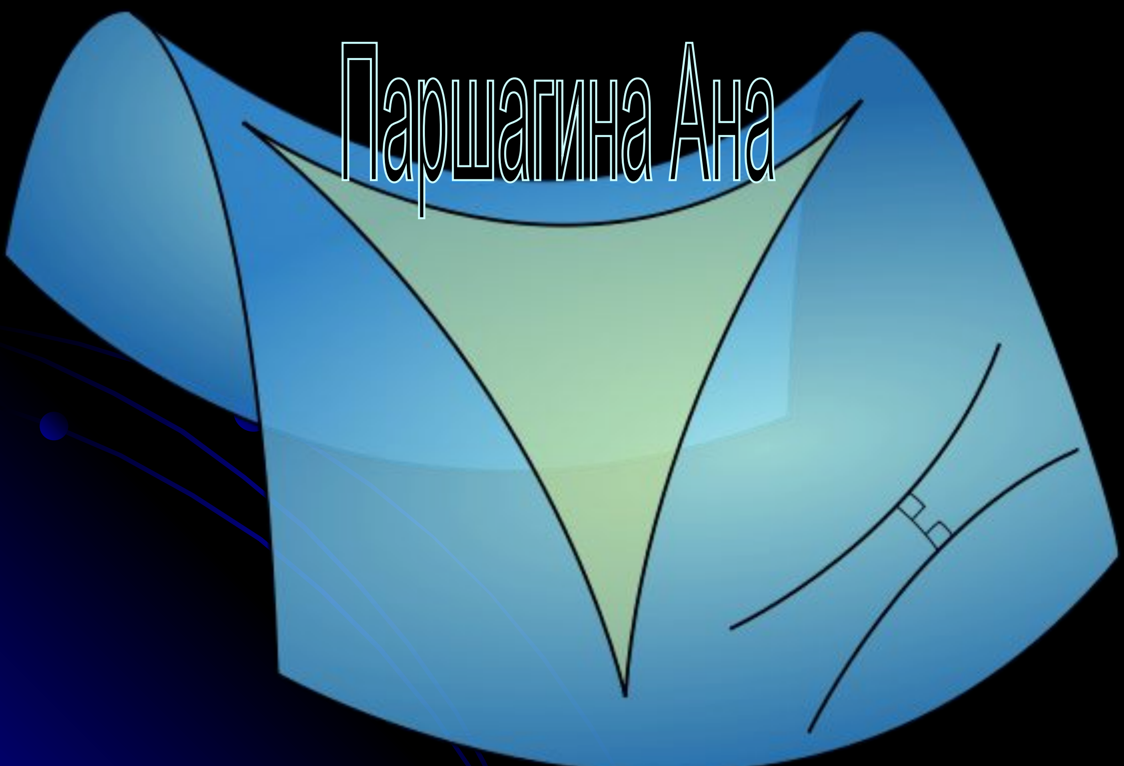






Плоскости Лобачевского

Паршагина Ана



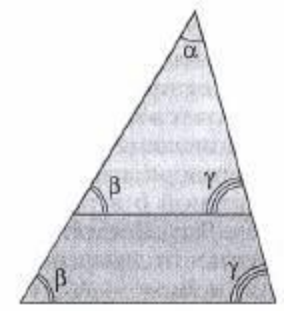
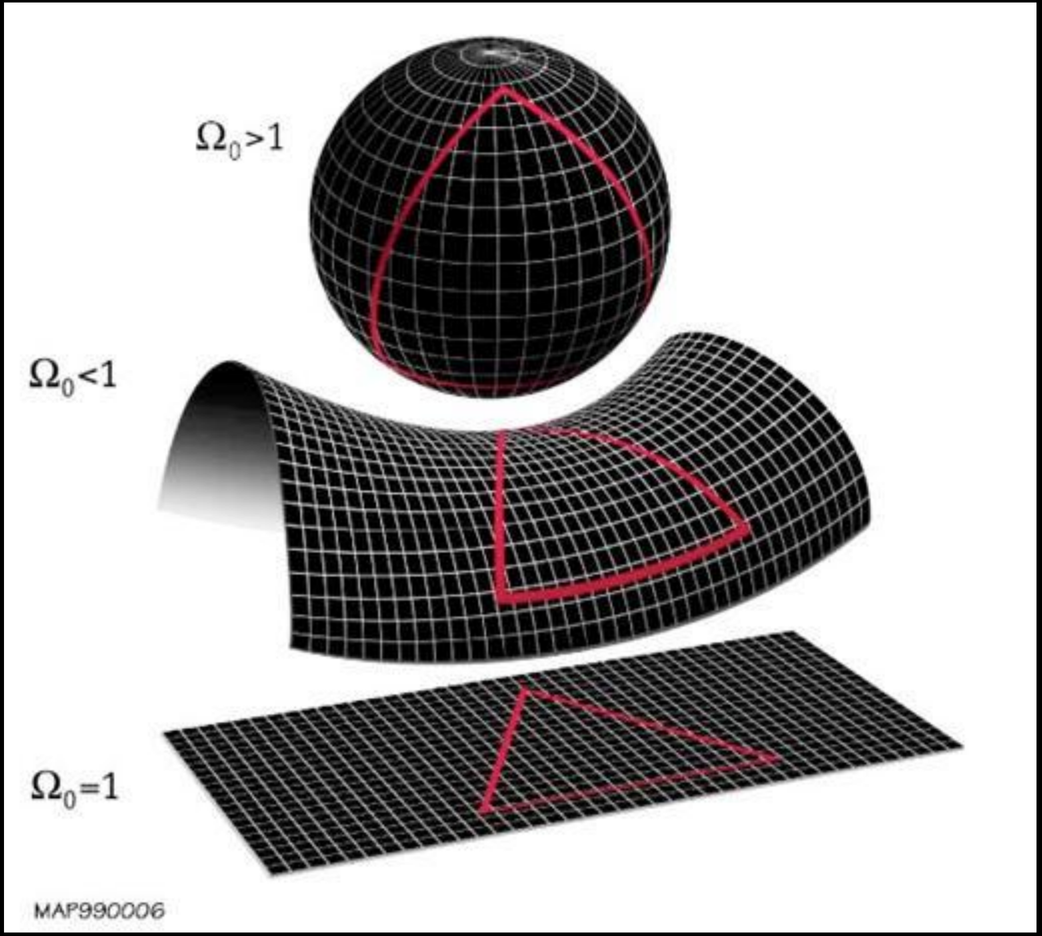


Рис. 12.

11А



Чебоксары,2009,гимназия№5.