

©:МУФ→П<sup>2010</sup>



P.N. Lebedev Physical  
Institute of the Russian  
Academy of Science

# Вероятностное представление и томография спиновых состояний

Владимир Иванович Манько (ФИАН, МФТИ)

Филиппов Сергей Николаевич (асп. МФТИ)

# План доклада

- Что такое и для чего нужна томография квантовых состояний?
- Варианты решения проблемы реконструкции.
- Вероятностное представление спиновых состояний.
- Применения вероятностного представления

# Как описать состояние спина?

- Спин  $j$ , собственные вектор  $|jm\rangle$  оператор  $\hat{J}_z$  и  $\hat{J}^2$
- Чистые состояния:

$$|\psi\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \hat{\rho}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \rightarrow$$

- Смешанные состояния

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$



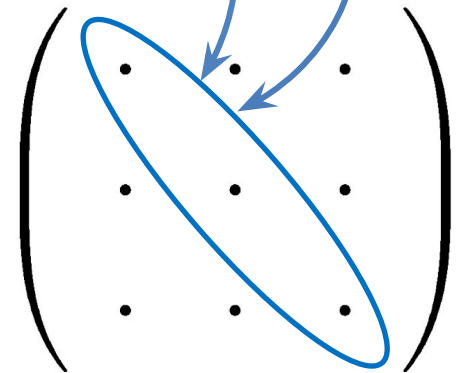
# Как восстановить оператор плотности, используя результаты наблюдений?

- Наблюдаемая  $A$ , среднее значение  $\text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$  - измеримо

$$\hat{A} = |jm\rangle\langle jm|$$

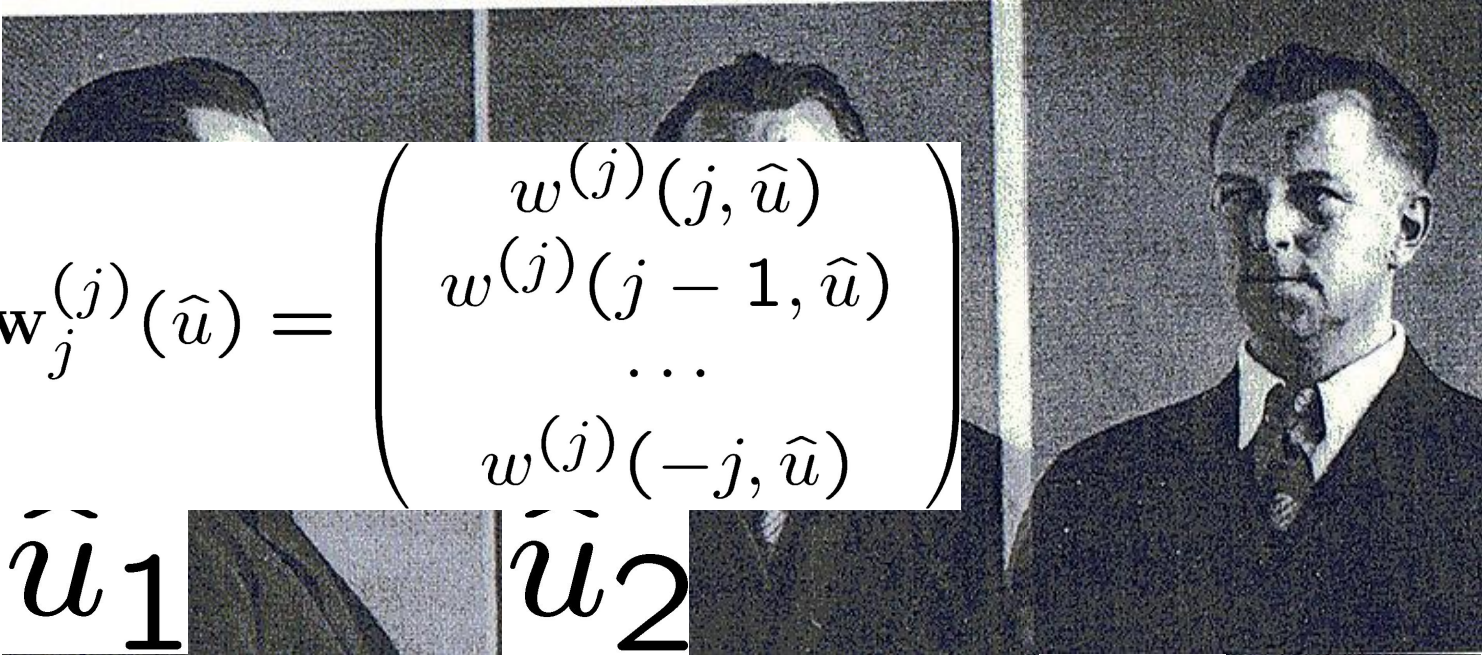
- Пример: проекторы
- Матрица плотности в базисе векторов

$$\hat{\rho} \rightarrow \langle jm|\hat{\rho}|jm'\rangle = \rho_{mm'} \rightarrow$$



# Томография состояния спина

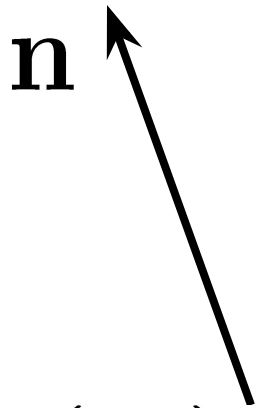
$$w^{(j)}(m, \hat{u}) = \langle jm | \hat{u}^\dagger \hat{\rho} \hat{u} | jm \rangle$$



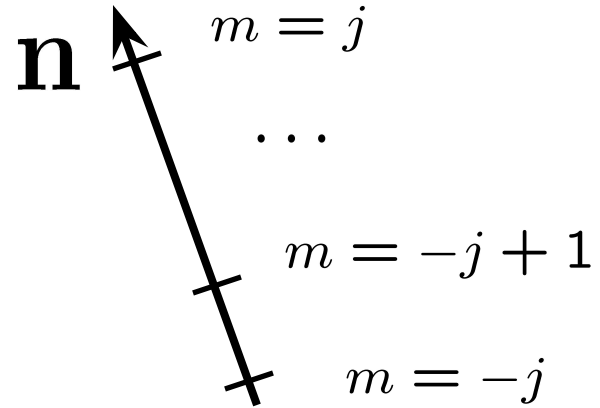
$$\mathbf{w}_j^{(j)}(\hat{u}) = \begin{pmatrix} w^{(j)}(j, \hat{u}) \\ w^{(j)}(j-1, \hat{u}) \\ \dots \\ w^{(j)}(-j, \hat{u}) \end{pmatrix}$$

$\hat{u}_1$        $\hat{u}_2$

- Опыт Штерна-Герлаха (1922)



$$\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}(\theta, \phi) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$$

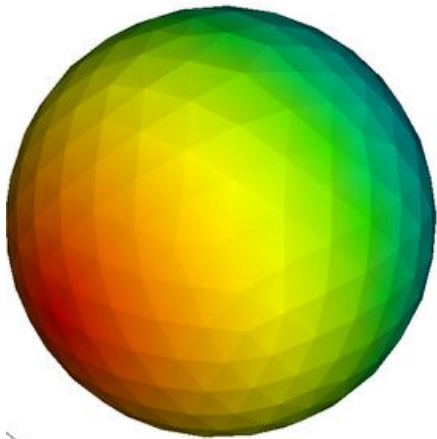


- Вероятность  $w^{(j)}(m, \mathbf{n}) = \langle jm | \hat{u}^\dagger \hat{\rho} \hat{u} | jm \rangle$

$$\hat{u} \rightarrow \hat{R}(\mathbf{n}) = e^{-i(\mathbf{n}_\perp \cdot \hat{\mathbf{J}})\theta}, \quad \mathbf{n}_\perp = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

$$\sum_{m=-j}^j w^{(j)}(m, \mathbf{n}) = 1$$

- Предельный случай бесконечного числа направлений  $n$  – интегрирование по сфере
- V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, Phys. Lett. A, 229, 335 (1997).  
V. I. Man'ko and O. V. Man'ko, J. Exp. Theor. Phys., 85, 430 (1997).



$$\hat{\rho} = \sum_{m=-j}^j \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta w^{(j)}(m, \mathbf{n}(\theta, \phi)) \hat{D}^{(j)}(m, \mathbf{n}(\theta, \phi))$$

- Нахождение матрицы плотности с помощью псевдообратной матрицы

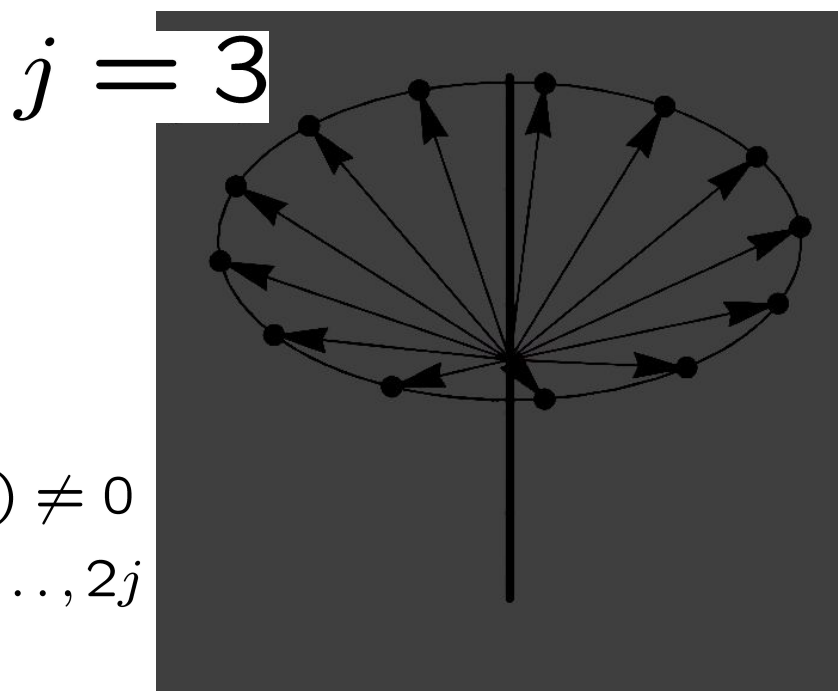
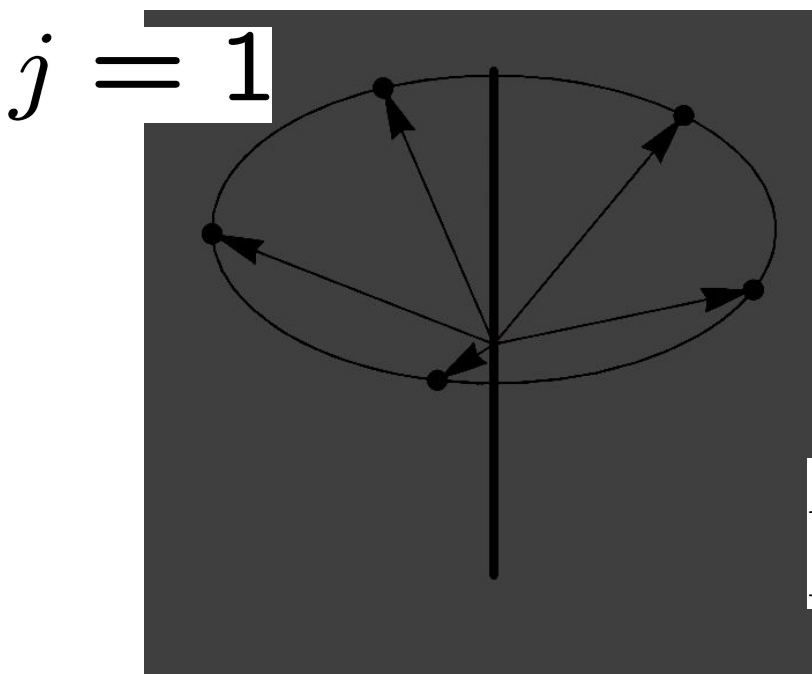
$$\rho = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \longrightarrow \rho = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P} = \|R\| \rho$$

$$\rho = \|R^\dagger\| \mathcal{P} = \left( \|R^\dagger\| \|R\| \right)^{-1} \|R^\dagger\| \mathcal{P}$$

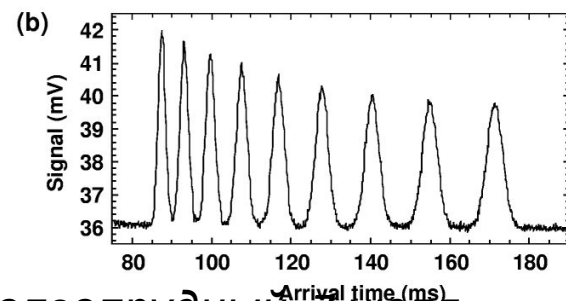
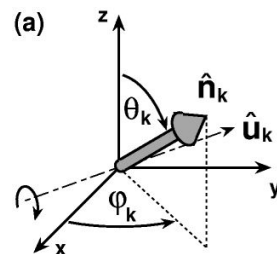


- R.G. Newton and B. Young, "Measurability of the Spin Density Matrix," *Annals of Physics*, 49, 393 (1968)
- $N=(4j+1)$  направления  $\mathbf{n}$



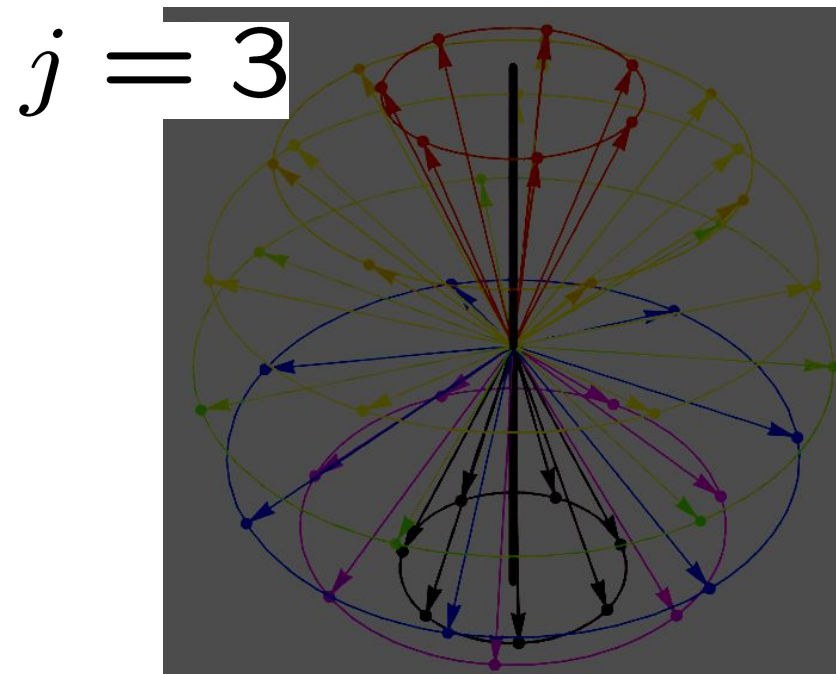
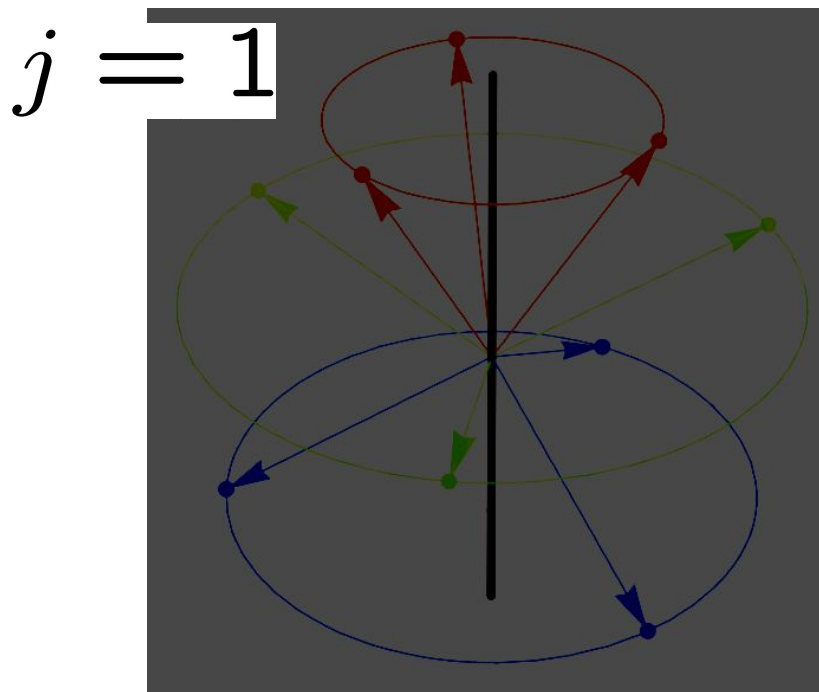
- ~ Experiment: G. Klose, G. Smith, and P. S. Jessen, *Phys. Rev. Lett.*, 86, 4721 (2001)

$j = 4$



- J.-P. Amiet and S. Weigert, J. Phys. A: Math. Gen., 32, L269 (1999)
- Использование  $(2j+1)^2$  спин-1/2 портретов вида

$$w_{1/2}^{(j)}(u) = \begin{pmatrix} w^{(j)}(j, u) \\ \sum_{m=-j}^{j-1} w^{(j)}(m, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{(j)}(j, u) \\ 1 - w^{(j)}(j, u) \end{pmatrix}$$



# Спиновая томограмма с конечным числом «вращений»

- Спин  $j$ , число направлений =  $4j+1$
- Вероятностное представление

$$P_{eq}(m, \mathbf{n}_k) = \frac{1}{4j+1} w^{(j)}(m, \mathbf{n}_k) = \frac{1}{4j+1} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{U}^{(j)}(m, \mathbf{n}_k))$$

- Реконструкция

$$\hat{\rho} = \sum_{k=1}^{4j+1} \sum_{m=-j}^j P_{eq}(m, \mathbf{n}_k) \hat{D}^{(j)}(m, k)$$

- «Квантаизер»

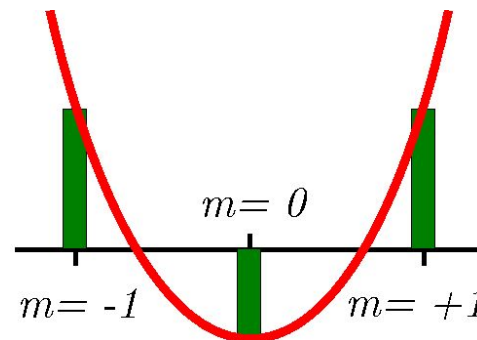
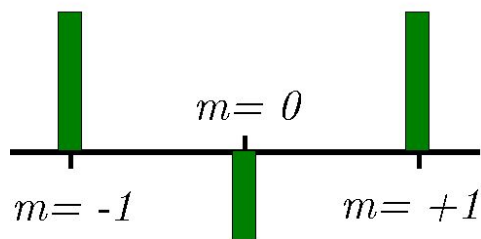
$$\hat{D}^{(j)}(m, k) = (4j+1) \sum_{L: (k-1)/2 \leq L \leq 2j} f_L^{(j)}(m) \sum_{k'=1}^{2L+1} \|\mathcal{M}^{-1}(L)\|_{kk'} \hat{S}_L^{(j)}(\mathbf{n}_{k'})$$

S. N. Filippov and V. I. Man'ko, "Inverse spin-s portrait and representation of qudit states by single probability vectors," J. Russ. Laser Res., 31, 32 (2010)

Секция «Теоретическая и математическая физика», Долгопрудный, 7 июля 2010 г.

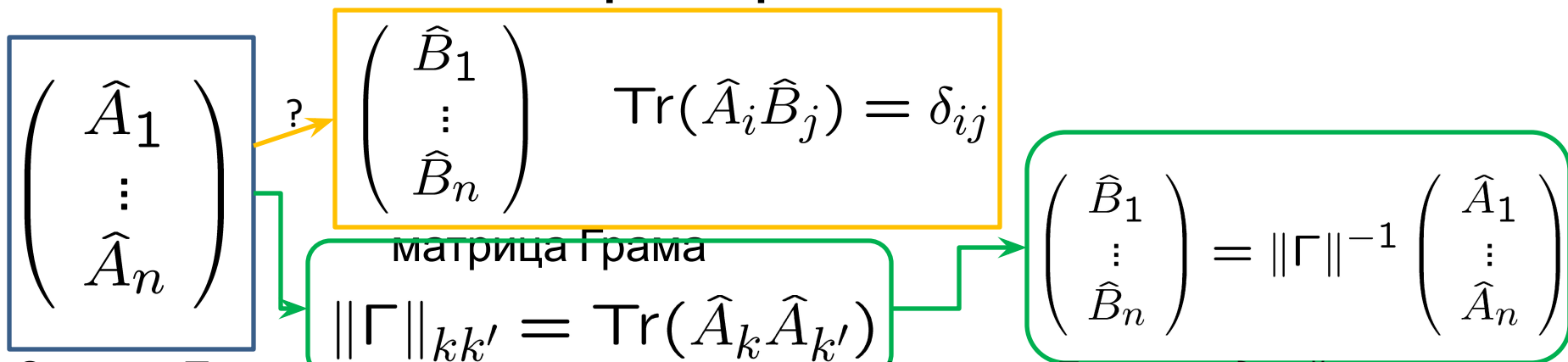
# • Математический аппарат

$$f_L^{(j)}(m) = \frac{1}{d_L} t_L(j+m, 2j+1), \quad \hat{S}_L^{(j)}(\mathbf{n}) = f_L^{(j)}(m) \Big|_{m \rightarrow (\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n})}$$



$$\|\mathcal{M}(L)\|_{kk'} = \text{Tr} \left( \hat{S}_L^{(j)}(\mathbf{n}_k) \hat{S}_L^{(j)}(\mathbf{n}_{k'}) \right) = \left( \mathbf{S}_L^{(j)}(\mathbf{n}_k) \cdot \mathbf{S}_L^{(j)}(\mathbf{n}_{k'}) \right) = P_L(\mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_{k'})$$

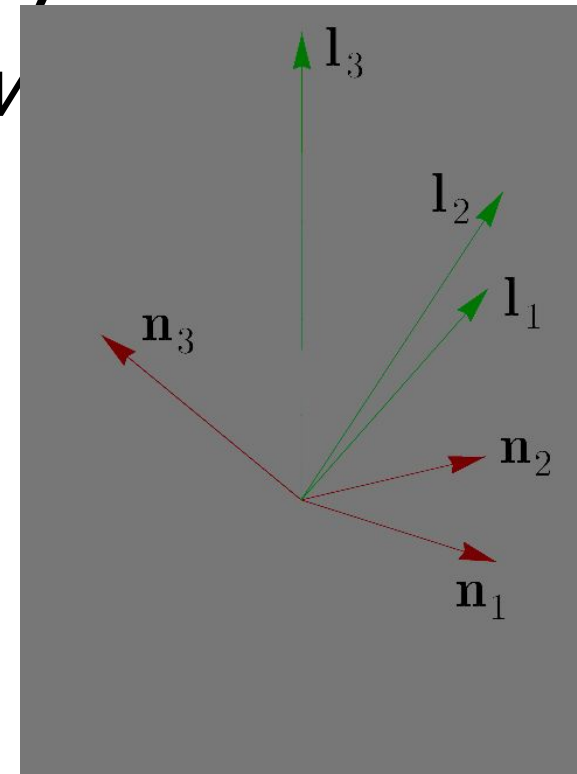
# • Задача на операторы



# Кубит (спин 1/2)

- Вероятностное представление

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P(+1/2, \vec{n}_1) \\ P(-1/2, \vec{n}_1) \\ P(+1/2, \vec{n}_2) \\ P(-1/2, \vec{n}_2) \\ P(+1/2, \vec{n}_3) \\ P(-1/2, \vec{n}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(+1/2, \vec{n}_1) \\ 1/3 - P(+1/2, \vec{n}_1) \\ P(+1/2, \vec{n}_2) \\ 1/3 - P(+1/2, \vec{n}_2) \\ P(+1/2, \vec{n}_3) \\ 1/3 - P(+1/2, \vec{n}_3) \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} P(+1/2, \vec{n}_1) \\ P(+1/2, \vec{n}_2) \\ P(+1/2, \vec{n}_3) \end{pmatrix} \in C$$



- Реконструкция

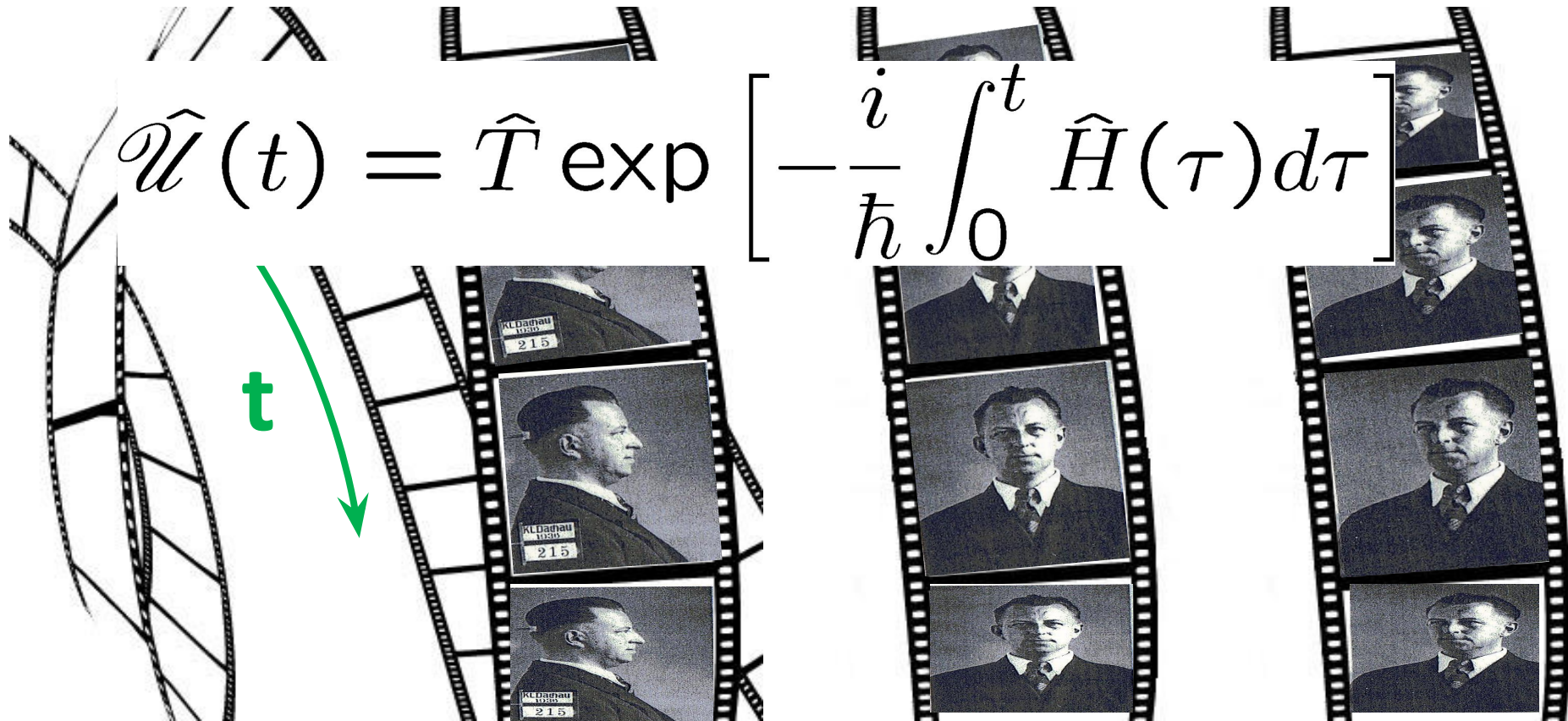
$$\frac{1}{3}\hat{\rho} = \frac{1}{2} [P_{eq}(+1/2, \mathbf{n}_1) + P_{eq}(-1/2, \mathbf{n}_1)] \hat{I} + \sum_{k=1}^3 [P_{eq}(+1/2, \mathbf{n}_k) - P_{eq}(-1/2, \mathbf{n}_k)] (\hat{\sigma} \cdot \mathbf{l}_k)$$

$$\mathbf{l}_1 = \frac{[\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3]}{(\mathbf{n}_1 \cdot [\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3])}, \quad \mathbf{l}_2 = \frac{[\mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1]}{(\mathbf{n}_1 \cdot [\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3])}, \quad \mathbf{l}_3 = \frac{[\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2]}{(\mathbf{n}_1 \cdot [\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3])}$$

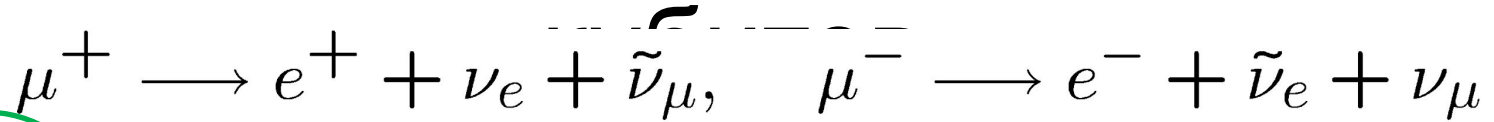
# Уравнение эволюции

$$i\hbar \frac{\partial w(m, \hat{u}, t)}{\partial t} = [f_H * w - w * f_H](m, \hat{u}, t), \quad w(m, \hat{u}, t = 0) = w_0(m, \hat{u})$$

$$w(m, \hat{u}, t) = w_0(m, \hat{u}) \hat{\mathcal{U}}(t)$$

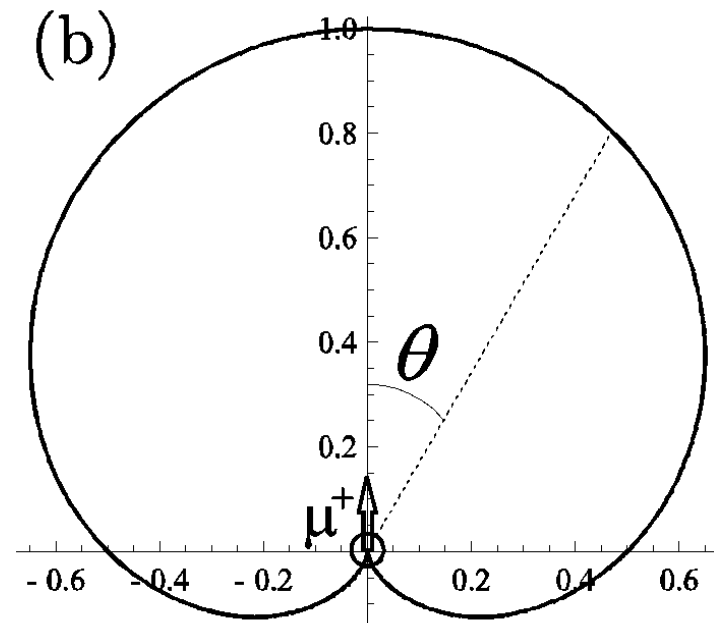
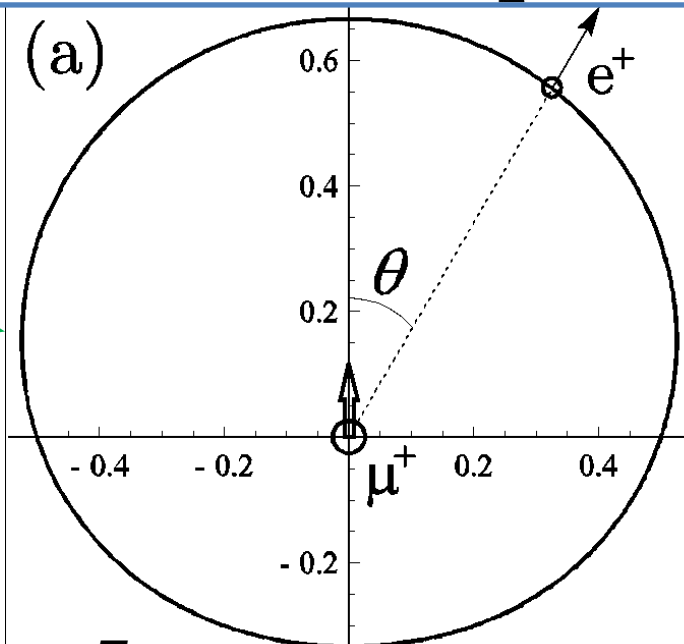


# Диаграмма направленности распада мюона и томограмма



$$\Gamma(\mathbf{n}) \frac{d\mathbf{n}}{4\pi} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \cos \theta \right) \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}$$

$$w_{\uparrow}^{(\mu)}(+1/2, \mathbf{n}(\theta, \varphi)) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \quad w_{\uparrow}^{(\mu)}(-1/2, \mathbf{n}(\theta, \varphi)) = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$$



# Диаграмма направленности распада мюона и томограмма кубитов

$$w^{(\mu)}(m^{(\mu)} = +1/2, \mathbf{n}) = 3\Gamma(\mathbf{n}) - 1$$
$$w^{(\mu)}(m^{(\mu)} = -1/2, \mathbf{n}) = 2 - 3\Gamma(\mathbf{n})$$





# Выводы

- Рассмотрены варианты решения задачи реконструкции квантового состояния и предложен новый метод, основанный на конечном числе вращений.
- Вероятностное томографическое представление применено к спиновым состояниям.
- Обозначены возможные применения.

**Спасибо за  
внимание!**

<http://filippovsn.fizteh.ru/>