Захарова Н. В., учитель математики,
МОУ СОШ №2, г. Нижние Серги
Свердловской области.

Уравнения высших степеней

«Гений состоит из 1 процента вдохновения и 99 процентов потения».
Т. Эдисон.

Готовимся к ГИА

Уравнения, степень которых выше второй, решаются двумя основными методами: ***введением новой переменной и разложением на множители.***

Метод введения новой переменной

Задание 1. Найти корни уравнения $x^4 - 11x^2 - 12 = 0.$

Замечание: уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0,$ где $a \neq 0$ называют ***биквадратными уравнениями.***

Решение.

Данное уравнение можно свести к квадратному с помощью замены $x^2 = a, a \geq 0,$ получим

$$x^4 - 11x^2 - 12 = 0,$$

$$a^2 - 11a - 12 = 0,$$

$$a_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{11 \pm 13}{2}, a_1 = 12, a_2 = -1 - \quad a \geq 0.$$

$$a = 12,$$

$$x^2 = 12, x_{1,2} = \pm\sqrt{12},$$

$$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}.$$

Ответ. $\pm 2\sqrt{3}.$

Не всегда замена переменных так очевидна, как при решении биквадратных уравнений.

Задание 2. Найти наименьший корень уравнения

$$(x+3)^4+3x^2+18x-1=0.$$

Решение.

Рассмотрим первое слагаемое $(x+3)^4$.

Зная, что $(x+3)^2=x^2+6x+9$

$3x^2+18x.$

$3\cdot(x^2+6x).$

$$(x^2+6x+9)^2+3(x^2+6x)-1=0,$$
$$(x^2+6x+9)^2+3(x^2+6x+9)-27-1=0,$$
$$(x+3)^4+3(x+3)^2-28=0,$$

Введем новую переменную

$$(x+3)^2=a, a\geq 0,$$

$$a^2+3a-28=0$$

a

$$a^2+3a-28=0$$

$$a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+112}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{121}}{2}=\frac{-3\pm 11}{2}, a_1=4, a_2=-7-$$

$a\geq 0.$ $a=4,$

$x.$

$$(x+3)^2=4,$$
$$(x+3)=2$$
$$(x+3)=-2.$$
$$x=-1$$
$$x=-5.$$

Прежде чем записать ответ, вспомним, на какой вопрос требуется ответить в задании.

- 5 – наименьший корень уравнения.

Ответ. -5.

Задание 3. Решите уравнение

$$(2x-3)\cdot(2x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)=36.$$

Решение.
Вначале сгруппируем множители следующим образом:

$$((2x-3)\cdot(x+2))\cdot((2x-1)\cdot(x+1))=36,$$

$$(2x^2+x-6)\cdot(2x^2+x-1)=36.$$

$$2x^2+x-1=t,$$

$$t\ (t-5)\cdot t=36, t^2-5t-36=0,$$

$$t^2-5t-36=0 \quad t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{5\pm13}{2}, t_1=9, t_2=-4. \quad t_1=9, t_2=-4$$

$$x. \quad t_1=9, \quad 2x^2+x-1=t,$$

$$2x^2+x-1=9, 2x^2+x-10=0, x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm9}{4}, x_1=-2{,}5, x_2=2.$$

Если $t_1=-4,$ то $2x^2+x-1=t,$ $2x^2+x-1=-4, 2x^2+x+3=0, x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-24}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{-23}}{4},$
уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. -2,5;2.

Задание 4. Решите уравнение

$$\left(\frac{(x^2-5)^2}{4}-3\right)\cdot\left(\frac{(x^2-5)^2}{4}+2\right)-6=0$$

Решение. Введем новую переменную $\frac{(x^2-5)^2}{4}=t, t\geq 0,$ тогда исходное уравнение будет иметь

вид $(t-3)\cdot(t+2)-6=0, t^2-t-6-6=0, t^2-t-12=0, t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}$ $t_2=4, t_2=-3-$ не удовлетворяет условию, т. к. $t\geq 0.$

Если $t=4,$ то $\frac{(x^2-5)^2}{4}=t,$ $\frac{(x^2-5)^2}{4}=4, \frac{x^2-5}{2}=\pm 2$ $\frac{x^2-5}{2}=2$ или $\frac{x^2-5}{2}=-2,$

$\frac{x^2-5}{2}=2$ $x^2=9, x_{1,2}=\pm 3$ или $\frac{x^2-5}{2}=-2,$ $x^2=1, x_{1,2}=\pm 1.$

Ответ. $\pm 3;\pm 1.$

Задание 5. Решите уравнение $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0.$

Решение.

Введем новую переменную $t=\frac{x^2+x-5}{x},$ получили $t+\frac{3}{t}+4=0,\quad \frac{t^2+4t+3}{t}=0,\begin{cases}t^2+4t+3=0,\\ t\neq 0;\end{cases}$

$t^2+4t+3=0, t_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm 1, t_1=-3, t_2=-1$

Если $t=-3,\ t=\frac{x^2+x-5}{x},\quad \frac{x^2+x-5}{x}=-3,\quad \frac{x^2+x-5+3x}{x}=0, \frac{x^2+4x-5}{x}=0,\quad \begin{cases}x^2+4x-5=0,\\ x\neq 0;\end{cases}$

$x^2+4x-5=0, x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+5}=-2\pm 3, x_1=-5, x_2=1.$

Если $t=-1,\quad t=\frac{x^2+x-5}{x},\quad \frac{x^2+x-5}{x}=-1,\quad \frac{x^2+x-5+x}{x}=0, \frac{x^2+2x-5}{x}=0,\quad \begin{cases}x^2+2x-5=0,\\ x\neq 0;\end{cases}$

$x^2+2x-5=0, x_{3,4}=-1\pm\sqrt{1+5}=-1\pm\sqrt{6}.$

Ответ.-5;1; $-1\pm\sqrt{6}.$

Задание 6. Решите уравнение $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5.$

Решение.

В левой части уравнения выделим полный квадрат $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}-2\cdot x\cdot\frac{2x}{x+2}+2\cdot x\cdot\frac{2x}{x+2}=5,$

$$\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}=5, \left(\frac{x\cdot(x+2)-2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}=5, \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4\cdot\frac{x^2}{x+2}-5=0,$$

Введем новую переменную $t=\frac{x^2}{x+2},$ получили квадратное уравнение относительно переменной t

$$t^2+4t-5=0, t_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+5}=-2\pm\sqrt{9}=-2\pm3, t_1=-5, t_2=1.$$

Если $t=-5,$ то $t=\frac{x^2}{x+2},$ $\frac{x^2}{x+2}=-5,$ $\frac{x^2+5x+10}{x+2}=0,\begin{cases}x^2+5x+10=0,\\ x\neq-2;\end{cases}$

$x^2+5x+10=0, x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-40}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{-15}}{2}$ уравнение не имеет действительных корней.

Если $t=1,$ то $t=\frac{x^2}{x+2},$ $\frac{x^2}{x+2}=1,$ $\frac{x^2-x-2}{x+2}=0,\begin{cases}x^2-x-2=0,\\ x\neq-2;\end{cases}$

$$x^2-x-2=0, x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}, x_1=2, x_2=-1.$$

Ответ. 2,-1

Возвратные уравнения

Уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ **называется *возвратным*, если его коэффициенты, стоящие** на симметричных позициях, равны, то есть если $a_{n-k} = a_k$ при $k = 0,1,2,\ldots,n.$

Рассмотрим возвратное уравнение четвертой степени вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 bx + a = 0,$ где

$a, b, c -$ некоторые числа, причём $a \neq 0.$ Уравнение удобно решать с помощью следующего алгоритма:

- разделить левую и правую части уравнения на x. При этом не происходит потери решения, так как

$x = 0$ не является корнем исходного уравнения при $a \neq 0;$

- группировкой привести уравнение к виду

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0;$$

- ввести новую переменную $t = x + \frac{1}{x},$ тогда

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2, t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

то есть $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,$

в новых переменных рассматриваемое уравнение является квадратным $at^2 + bt + c - 2a = 0;$ - решить его относительно $t,$

Задание 7. Решите уравнение $x^4-5x^3+6x^2-5x+1=0.$

Решение.

Разделим обе части уравнения на $x^2,$ получим $x^2-5x+6-5\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}.$

После группировки получаем $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0.$

Введём новую $t=x+\frac{1}{x},$ переменную тогда $t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2, t^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2, t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2},$

то есть $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2,$ то $\left(t^2-2\right)-5t+6=0,$

получили квадратное уравнение относительно переменной t $t^2-5t+4=0, t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{5\pm3}{2}, t_1=4, t_2=1.$
Решим его.

Если $t=4,$ то $t=x+\frac{1}{x},$ $x+\frac{1}{x}=4,$ $x^2-4x+1=0, x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}.$

Если $t=1,$ то, $t=x+\frac{1}{x},$ $x+\frac{1}{x}=1,$ $x^2-x+1=0, x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $2\pm\sqrt{3}.$

Для возвратных уравнений более высоких степеней верны следующие утверждения
Возвратные уравнения чётной степени сводится к уравнению вдвое меньшей степени подстановкой $x+\frac{1}{x}=t.$

Возвратные уравнения нечётной степени обязательно имеет корень $x=-1$ *и после деления многочлена, стоящего в левой части этого уравнения, на двучлен* $x+1,$ *приводится к возвратному уравнению чётной степени.*

Метод разложения на множители

Задание 8. Сколько корней имеет уравнение $x^3-3x^2-32x+96=0.$ (ГИА-2010)

Решение.

В левой части уравнения четыре слагаемых, поэтому применим метод группировки, разложим на множители левую часть уравнения. Получим:

$\left(x^3-3x^2\right)-\left(32x-96\right)=0,$

$x^2\left(x-3\right)-32\left(x-3\right)=0,$

$\left(x-3\right)\cdot\left(x^2-32\right)=0,$

данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x-3=0, \\ x^2-32=0; \end{array}\right.$

1. $x-3=0, x=3;$
2. $x^2-32=0, x^2=32, x_{1,2}=\pm\sqrt{32}, x_{1,2}=\pm4\sqrt{2}.$

Уравнение имеет три корня: 3; $\pm4\sqrt{2}$

Ответ. 3.

Задание 9. Решите уравнение $28x^3+3x^2+3x+1=0.$

Решение.

Решим данное уравнение способом разложения левой части на множители. Получим

$$27x^3+x^3+3x^2+3x+1=0,$$

$$27x^3+\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=0,$$

$$28x^3+3x^2+3x+1=0,$$

$(3x)^3+(x+1)^3=0,$ разложим левую часть уравнения на множители, используя формулу суммы кубов

$(3x+x+1)\cdot\left(9x^2-3x\cdot(x+1)+(x+1)^2\right)=0,$ $(4x+1)\cdot\left(9x^2-3x^2-3x+x^2+2x+1\right)=0,$ $(4x+1)\cdot\left(7x^2-x+1\right)=0,$

данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}4x+1=0,\\7x^2-x+1=0;\end{array}\right.$

1. $4x+1=0, x=-0{,}25;$

2. $7x^2-x+1=0, x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-28}}{14}=\dfrac{1\pm\sqrt{-27}}{14}$ уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $-0{,}25.$

Задание 10. Решите уравнение $x^4+4x-1=0.$

Решение.

Решим данное уравнение способом разложения левой части на множители. Получим $x^4+4x-1=0,$

$$x^4+2x^2-2x^2+4x+1-2=0,$$

$$\left(x^4+2x^2+1\right)-\left(2x^2-4x+2\right)=0,$$

$$\left(x^2+1\right)^2-2\cdot\left(x^2-2x+1\right)=0,$$

$$\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(x-1\right)^2=0,$$

$$\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\cdot(x-1)\right)^2=0,$$

разложим левую часть уравнения на множители, используя формулу разности квадратов

$$\left(x^2+1+\sqrt{2}\cdot(x-1)\right)\cdot\left(x^2+1-\sqrt{2}\cdot(x-1)\right)=0,$$

данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x^2+1+\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2}=0, \\ x^2+1-\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{2}=0; \end{array}\right.$

1. $x^2+\sqrt{2}\cdot x+\left(1-\sqrt{2}\right)=0, x_{1,2}=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4+4\sqrt{2}}}{2}=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$

2. $x^2-\sqrt{2}\cdot x+\left(1+\sqrt{2}\right)=0, x_{1,2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4-4\sqrt{2}}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-4\sqrt{2}-2}}{2}.-$

уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$

Уравнения высших степеней встречаются во второй части ГИА. Выбор рационального метода решения уравнения экономит время и уменьшает количество ошибок. Надеюсь, что навыки решения предлагаемых задач, помогут в будущем успешно сдать экзамен по математике.

Задачи для самостоятельного решения.

Решите уравнения:		
1) $x^3+5x^2-x-5=0;$	13) $2x^4-19x^2+9=0;$	25) $\left(x^2+3x\right)^2-x^2-3x=12;$
2) $x^3+3x^2=4x;$	14) $x^4-7x^2+12=0;$	26) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+4)=24;$
3) $4a^2-3a=3a^2-4;$	15) $2x^4-13x^2+4=0;$	27) $x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)=120;$
4) $-x^3+5x^2+10x-50=0;$	16) $x^4-7x^2+6=0;$	28) $\left(x^2+7\right)^2-13\left(x^2+7\right)+36=0;$
5) $x^3+2x^2-18x-36=0;$	17) $x^4-4x^2+4=1;$	29) $\left(\frac{x^2}{4}-1\right)^2+2\left(\frac{x^2}{4}-1\right)=8;$
6) $x^3-x^2-4x+64=0;$	18) $x^6+9x^3+8=0;$	30) $(x-2)^2\cdot\left(x^2-4x+3\right)=12;$
7) $x^3-x^2-3x+27=0;$	19) $27x^6-215x^3-8=0;$	31) $\left(x^2-6x+9\right)^2+2(x-3)^2=3;$
8) $x^3+3x^2-2x-6=0;$	20) $2x^8+x^4-15=0;$	32) $\left(\frac{\left(x^2-5\right)^2}{4}-3\right)\cdot\left(\frac{\left(x^2-5\right)^2}{4}+2\right)-6=0;$
9) $2x^3-x^2-8x+4=0;$	21) $\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2+3\right)-18=0;$	33) $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8;$
10) $x^3-3x^2-3x+9=0;$	22) $\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2-8\right)=11;$	34) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0;$
11) $2x^3-x^2-8x+4=0;$	23) $\left(x^2+x-2\right)\cdot\left(x^2+x-3\right)=12;$	35) $\left(x^2+\frac{16}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{x}\right)-12=0;$
12) $x^4+2x^2-8=0;$	24) $\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2+x+2\right)-12=0;$	

Спасибо за внимание!