

Захарова Н. В., учитель математики,
МОУ СОШ №2, г. Нижние Серги
Свердловской области.

Уравнения высших степеней

*«Гений состоит из 1 процента вдохновения
и 99 процентов потения».*
Т. Эдисон.

ГОТОВИМСЯ К
ГИА



Уравнения, степень которых выше второй, решаются двумя основными методами: **введением новой переменной и разложением на множители.**

Метод введения новой переменной

Задание 1. Найти корни уравнения $x^4 - 11x^2 - 12 = 0$.

Замечание: уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$ называют **биквадратными уравнениями.**

Решение.

Данное уравнение можно свести к квадратному с помощью замены

$$x^2 = a, a \geq 0, \quad \text{получим}$$

$$x^4 - 11x^2 - 12 = 0,$$

$$a^2 - 11a - 12 = 0,$$

$$a_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{11 \pm 13}{2}, a_1 = 12, a_2 = -1 -$$

$$a \geq 0.$$

$$a = 12,$$

$$x^2 = 12, x_{1,2} = \pm\sqrt{12},$$

$$x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}.$$

Ответ. $\pm 2\sqrt{3}$.

Не всегда замена переменных так очевидна, как при решении биквадратных уравнений.

Задание 2. Найти наименьший корень уравнения

$$(x+3)^4 + 3x^2 + 18x - 1 = 0.$$

Решение.

Рассмотрим первое

$$(x+3)^4.$$

слагаемое

Зная, что $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$$3x^2 + 18x.$$

$$3 \cdot (x^2 + 6x).$$

$$(x^2 + 6x + 9)^2 + 3(x^2 + 6x) - 1 = 0,$$

$$(x^2 + 6x + 9)^2 + 3(x^2 + 6x + 9) - 27 - 1 = 0,$$

$$(x+3)^4 + 3(x+3)^2 - 28 = 0,$$

Введем новую переменную

$$(x+3)^2 = a, a \geq 0,$$

$$a^2 + 3a - 28 = 0$$

a

$$a^2 + 3a - 28 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+112}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2}, a_1 = 4, a_2 = -7 -$$

$a \geq 0. \quad a = 4,$

x.

$$(x+3)^2 = 4,$$

$$(x+3) = 2$$

$$(x+3) = -2.$$

$$x = -1$$

$$x = -5.$$

Прежде чем записать ответ, вспомним, на какой вопрос требуется ответить в задании.

- 5 – наименьший корень уравнения.

Ответ. -5.

Задание 3. Решите уравнение

$$(2x-3) \cdot (2x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2) = 36.$$

Решение.

Вначале сгруппируем множители следующим образом:

$$((2x-3) \cdot (x+2)) \cdot ((2x-1) \cdot (x+1)) = 36,$$

$$(2x^2 + x - 6) \cdot (2x^2 + x - 1) = 36.$$

$$2x^2 + x - 1 = t,$$

$$t(t-5) \cdot t = 36, t^2 - 5t - 36 = 0,$$

$$t^2 - 5t - 36 = 0 \quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}, t_1 = 9, t_2 = -4. \quad t_1 = 9, t_2 = -4$$

$x.$ $t_1 = 9,$ $2x^2 + x - 1 = t,$

$$2x^2 + x - 1 = 9, 2x^2 + x - 10 = 0, x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 9}{4}, x_1 = -2,5, x_2 = 2.$$

Есл $t_1 = -4,$ т $2x^2 + x - 1 = t,$ $2x^2 + x - 1 = -4, 2x^2 + x + 3 = 0, x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{4},$
и 0

уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. -2,5;2.

Задание 4. Решите уравнение

$$\left(\frac{(x^2-5)^2}{4}-3\right) \cdot \left(\frac{(x^2-5)^2}{4}+2\right) - 6 = 0$$

Решение. Введем новую переменную

$$\frac{(x^2-5)^2}{4} = t, t \geq 0,$$

тогда исходное уравнение будет иметь

вид $(t-3) \cdot (t+2) - 6 = 0, t^2 - t - 6 - 6 = 0, t^2 - t - 12 = 0, t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \quad t_2 = 4, t_2 = -3$ – не удовлетворяет условию, т. $t \geq 0$.

Если $t = 4$, то $\frac{(x^2-5)^2}{4} = t, \quad \frac{(x^2-5)^2}{4} = 4, \quad \frac{x^2-5}{2} = \pm 2 \quad \frac{x^2-5}{2} = 2$ или $\frac{x^2-5}{2} = -2$,
и $\frac{x^2-5}{2} = 2 \quad x^2 = 9, x_{1,2} = \pm 3$ или $\frac{x^2-5}{2} = -2, \quad x^2 = 1, x_{1,2} = \pm 1$.

Ответ. $\pm 3; \pm 1$.

Задание 5. Решите

уравнение

Решение.

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0.$$

Введем новую

переменную

$$t^2 + 4t + 3 = 0, t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 3} = -2 \pm 1, t_1 = -3, t_2 = -1$$

$$t = \frac{x^2 + x - 5}{x}, \text{ получил } t + \frac{3}{t} + 4 = 0, \frac{t^2 + 4t + 3}{t} = 0, \begin{cases} t^2 + 4t + 3 = 0, \\ t \neq 0; \end{cases}$$

$$\text{Есл } t = -3, t = \frac{x^2 + x - 5}{x}, \frac{x^2 + x - 5}{x} = -3, \frac{x^2 + x - 5 + 3x}{x} = 0, \frac{x^2 + 4x - 5}{x} = 0, \begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\text{и, } x^2 + 4x - 5 = 0, x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 5} = -2 \pm 3, x_1 = -5, x_2 = 1.$$

$$\text{Есл } t = -1, t = \frac{x^2 + x - 5}{x}, \frac{x^2 + x - 5}{x} = -1, \frac{x^2 + x - 5 + x}{x} = 0, \frac{x^2 + 2x - 5}{x} = 0, \begin{cases} x^2 + 2x - 5 = 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\text{и } x^2 + 2x - 5 = 0, x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1 + 5} = -1 \pm \sqrt{6}.$$

Ответ. -5; 1; $-1 \pm \sqrt{6}$.

Задание 6. Решите уравнение

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5.$$

Решени

В левой части уравнения выделим полный квадрат $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} - 2 \cdot x \cdot \frac{2x}{x+2} + 2 \cdot x \cdot \frac{2x}{x+2} = 5,$

$$\left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} = 5, \left(\frac{x \cdot (x+2) - 2x}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} = 5, \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{x^2}{x+2} - 5 = 0,$$

Введем новую переменную $t = \frac{x^2}{x+2},$ получили квадратное уравнение относительно переменной t

$$t^2 + 4t - 5 = 0, t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3, t_1 = -5, t_2 = 1.$$

$$\begin{array}{l} \text{Есл } t = -5, \text{ Т } t = \frac{x^2}{x+2}, \frac{x^2}{x+2} = -5, \frac{x^2 + 5x + 10}{x+2} = 0, \begin{cases} x^2 + 5x + 10 = 0, \\ x \neq -2; \end{cases} \\ \text{и } \quad \quad \quad \text{О} \end{array}$$

$$x^2 + 5x + 10 = 0, x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 40}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{2} \quad \text{уравнение не имеет действительных корней.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Если } t = 1, \text{ Т } t = \frac{x^2}{x+2}, \frac{x^2}{x+2} = 1, \frac{x^2 - x - 2}{x+2} = 0, \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x \neq -2; \end{cases} \\ \quad \quad \quad \text{О} \end{array}$$

$$x^2 - x - 2 = 0, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, x_1 = 2, x_2 = -1.$$

Ответ.

2,-1

Возвратные уравнения

Уравнение $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ называется *возвратным*, если его коэффициенты, стоящие на симметричных позициях, равны, то есть если $a_{n-k} = a_k$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим возвратное уравнение четвертой степени вида $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, где

a, b, c – некоторые числа, $a \neq 0$. Уравнение удобно решать с помощью следующего алгоритма: причём

- разделить левую и правую части уравнения на x^2 . При этом не происходит потери решения, так как

$x = 0$ не является корнем исходного уравнения при $a \neq 0$;

- группировкой привести уравнение к виду

$$a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0;$$

- ввести новую переменную

$$t = x + \frac{1}{x}, \text{ тогда}$$

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2, t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x} \right)^2, t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

то
есть

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2,$$

в новых переменных рассматриваемое уравнение

является квадратным $at^2 + bt + c - 2a = 0$; - решить его относительно t ,

Задание 7. Решите уравнение $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на x^2 , получим $x^2 - 5x + 6 - 5 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

После группировки получаем $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$.

Введём новую $t = x + \frac{1}{x}$, переменную тогда $t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, $t^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2$, $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$,

то есть $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, то $(t^2 - 2) - 5t + 6 = 0$,

получили квадратное уравнение относительно переменной t $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$, $t_1 = 4$, $t_2 = 1$.
Решим его.

Если $t = 4$, то $t = x + \frac{1}{x}$, $x + \frac{1}{x} = 4$, $x^2 - 4x + 1 = 0$, $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 1} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Если $t = 1$, то, $t = x + \frac{1}{x}$, $x + \frac{1}{x} = 1$, $x^2 - x + 1 = 0$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $2 \pm \sqrt{3}$.

Для возвратных уравнений более высоких степеней верны следующие утверждения
*Возвратные уравнения чётной степени сводится к уравнению вдвое меньшей степени
подстановкой $x + \frac{1}{x} = t$.*

*Возвратные уравнения нечётной степени обязательно имеет корень $x = 1$ и после деления
многочлена, стоящего в левой части этого уравнения на двучлен $x - 1$,
уравнению чётной степени.*

Метод разложения на множители

Задание 8. Сколько корней имеет уравнение $x^3 - 3x^2 - 32x + 96 = 0$.

(ГИА-2010)

Решение.

В левой части уравнения четыре слагаемых, поэтому применим метод группировки, разложим на множители левую часть уравнения. Получим:

$$(x^3 - 3x^2) - (32x - 96) = 0,$$

$$x^2(x - 3) - 32(x - 3) = 0,$$

$$(x - 3) \cdot (x^2 - 32) = 0,$$

данное уравнение равносильно совокупности $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ x^2 - 32 = 0; \end{cases}$

1. $x - 3 = 0, x = 3;$

2. $x^2 - 32 = 0, x^2 = 32, x_{1,2} = \pm\sqrt{32}, x_{1,2} = \pm 4\sqrt{2}.$

Уравнение имеет три корня: $3 \pm 4\sqrt{2}$

Ответ. 3.

Задание 9. Решите уравнение $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решение.

Решим данное уравнение способом разложения левой части на множители.

Получим

$$27x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$

$$27x^3 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 0,$$

$$28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$

$(3x)^3 + (x+1)^3 = 0$, разложим левую часть уравнения на множители, используя формулу суммы

кубов
 $(3x+x+1) \cdot (9x^2 - 3x \cdot (x+1) + (x+1)^2) = 0, (4x+1) \cdot (9x^2 - 3x^2 - 3x + x^2 + 2x + 1) = 0, (4x+1) \cdot (7x^2 - x + 1) = 0,$

данное уравнение равносильно совокупности
$$\begin{cases} 4x+1=0, \\ 7x^2-x+1=0; \end{cases}$$

$$4x+1=0, x=-0,25;$$

1.

$$7x^2 - x + 1 = 0, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-28}}{14} = \frac{1 \pm \sqrt{-27}}{14}$$

2. уравнение не имеет действительных корней.

-0,25.

Ответ.

Задание 10. Решите уравнение

$$x^4 + 4x - 1 = 0.$$

Решение.

Решим данное уравнение способом разложения левой части на множители. Получим $x - 1 = 0$,

$$x^4 + 2x^2 - 2x^2 + 4x + 1 - 2 = 0,$$

$$(x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^2 - 4x + 2) = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2})^2 \cdot (x - 1)^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2} \cdot (x - 1))^2 = 0,$$

разложим левую часть уравнения на множители, используя формулу разности квадратов

$$(x^2 + 1 + \sqrt{2} \cdot (x - 1)) \cdot (x^2 + 1 - \sqrt{2} \cdot (x - 1)) = 0,$$

данное уравнение равносильно совокупности $\begin{cases} x^2 + 1 + \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2} = 0, \\ x^2 + 1 - \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} = 0; \end{cases}$

$$1. \quad x^2 + \sqrt{2} \cdot x + (1 - \sqrt{2}) = 0, x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 \cdot (1 - \sqrt{2})}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 + 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

$$2. \quad x^2 - \sqrt{2} \cdot x + (1 + \sqrt{2}) = 0, x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 \cdot (1 + \sqrt{2})}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-4\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$

Уравнения высших степеней встречаются во второй части ГИА. Выбор рационального метода решения уравнения экономит время и уменьшает количество ошибок. Надеюсь, что навыки решения предлагаемых задач, помогут в будущем успешно сдать экзамен по математике.

Задачи для самостоятельного решения.

Решите уравнения:		
1) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0;$	13) $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0;$	25) $(x^2 + 3x)^2 - x^2 - 3x = 12;$
2) $x^3 + 3x^2 = 4x;$	14) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0;$	26) $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4) = 24;$
3) $4a^2 - 3a = 3a^2 - 4;$	15) $2x^4 - 13x^2 + 4 = 0;$	27) $x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) = 120;$
4) $-x^3 + 5x^2 + 10x - 50 = 0;$	16) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0;$	28) $(x^2 + 7)^2 - 13(x^2 + 7) + 36 = 0;$
5) $x^3 + 2x^2 - 18x - 36 = 0;$	17) $x^4 - 4x^2 + 4 = 1;$	29) $\left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) = 8;$
6) $x^3 - x^2 - 4x + 64 = 0;$	18) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0;$	30) $(x-2)^2 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 12;$
7) $x^3 - x^2 - 3x + 27 = 0;$	19) $27x^6 - 215x^3 - 8 = 0;$	31) $(x^2 - 6x + 9)^2 + 2(x-3)^2 = 3;$
8) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0;$	20) $2x^8 + x^4 - 15 = 0;$	32) $\left(\frac{(x^2 - 5)^2}{4} - 3\right) \cdot \left(\frac{(x^2 - 5)^2}{4} + 2\right) - 6 = 0;$
9) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0;$	21) $(x^2 - 4) \cdot (x^2 + 3) - 18 = 0;$	33) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8;$
10) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0;$	22) $(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 8) = 11;$	34) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0;$
11) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0;$	23) $(x^2 + x - 2) \cdot (x^2 + x - 3) = 12;$	35) $\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) - \left(x + \frac{4}{x}\right) - 12 = 0;$
12) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0;$	24) $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) - 12 = 0;$	

**Спасибо за
внимание!**