

Стохастические интервальные подходы в задачах глобальной оптимизации

Интервальный генетический алгоритм

Н. В. Панов, С. П. Шарый

*Институт вычислительных технологий СО РАН
г. Новосибирск*

Глобальная оптимизация функций

Ищем $\min_{x \in X} F(x)$

Поиск глобального минимума
(или максимума)
вещественнозначной функции

$$F : \mathbb{R}^n \supset X \rightarrow \mathbb{R}$$

на прямоугольном брусе X
со сторонами, параллельными
координатным осям.

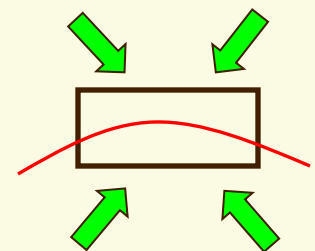
Глобальная оптимизация функций

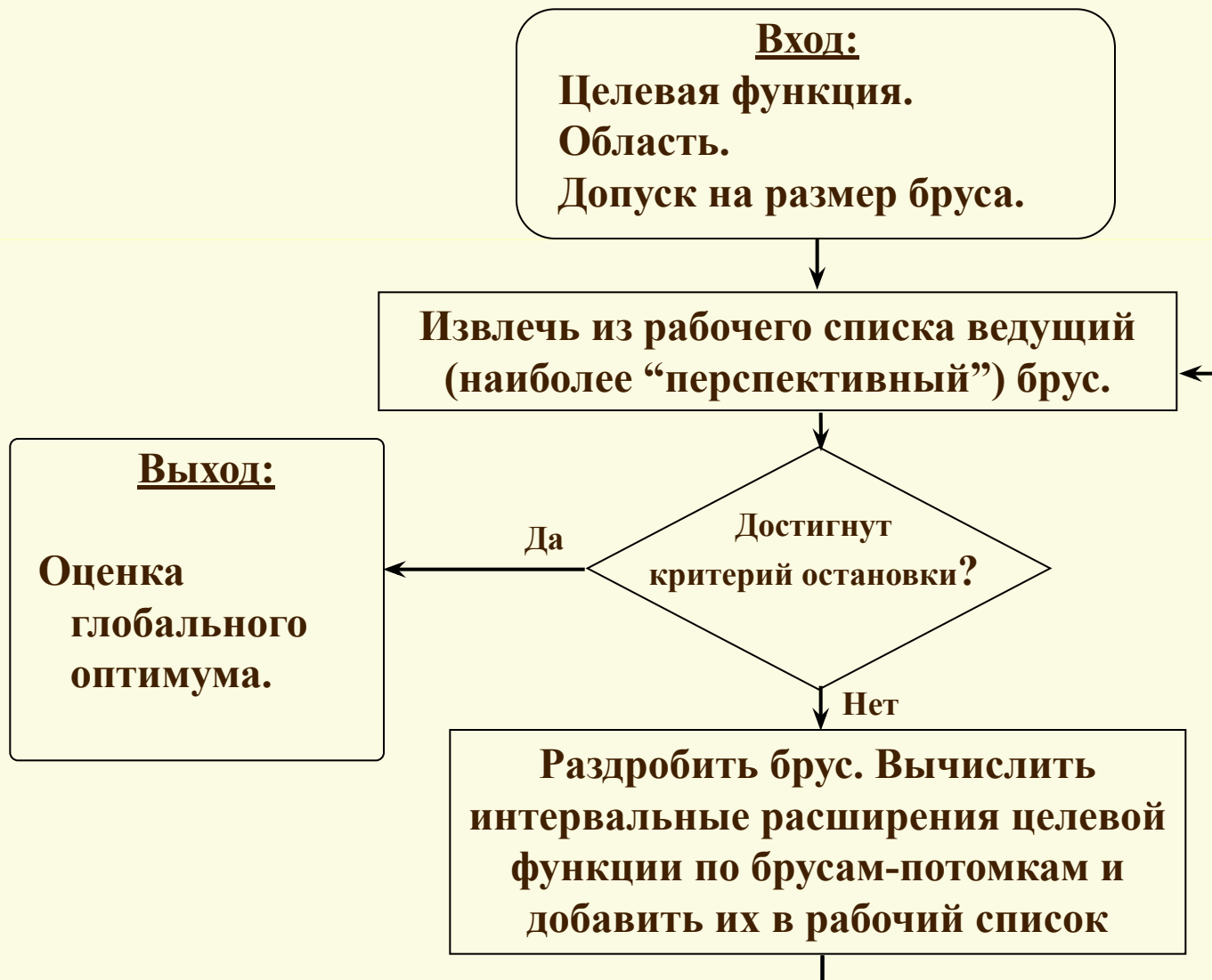
- Удачная область для применения интервальных методов
- В отличие от классических (точечных) методов не требуется знание априорной информации о функции

- ~~Константа Липшица~~
- ~~Производные~~
- Результат гарантируется

- Интервальное расширение функции, фактически, дает верхнюю и нижнюю оценку оптимума.

— Границы могут быть избыточными.





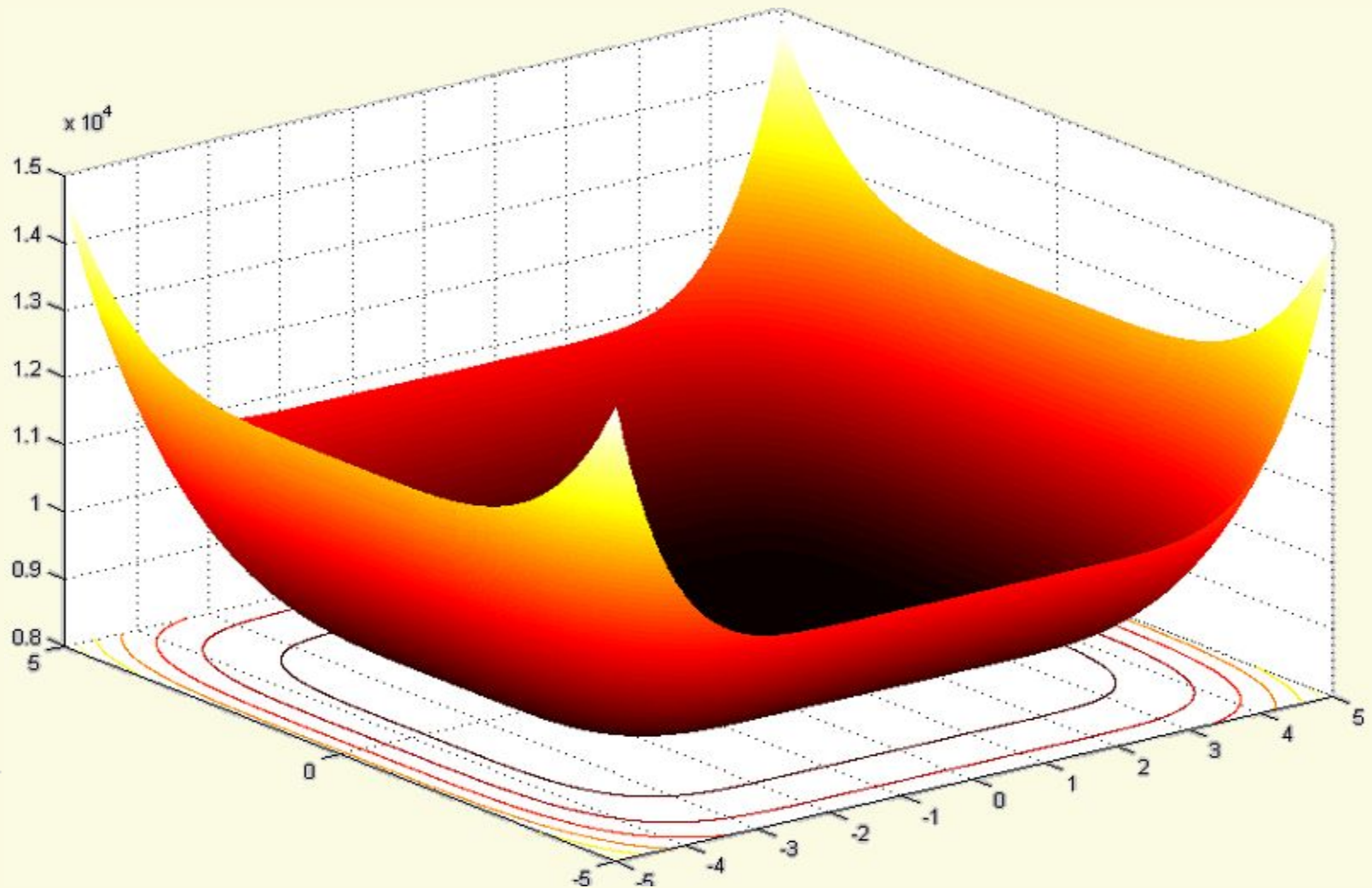
Блок-схема оптимизационного алгоритма адаптивного интервального дробления

Но

Застаивание и избыточность интервальной оценки могут существенно ухудшить производительность метода.

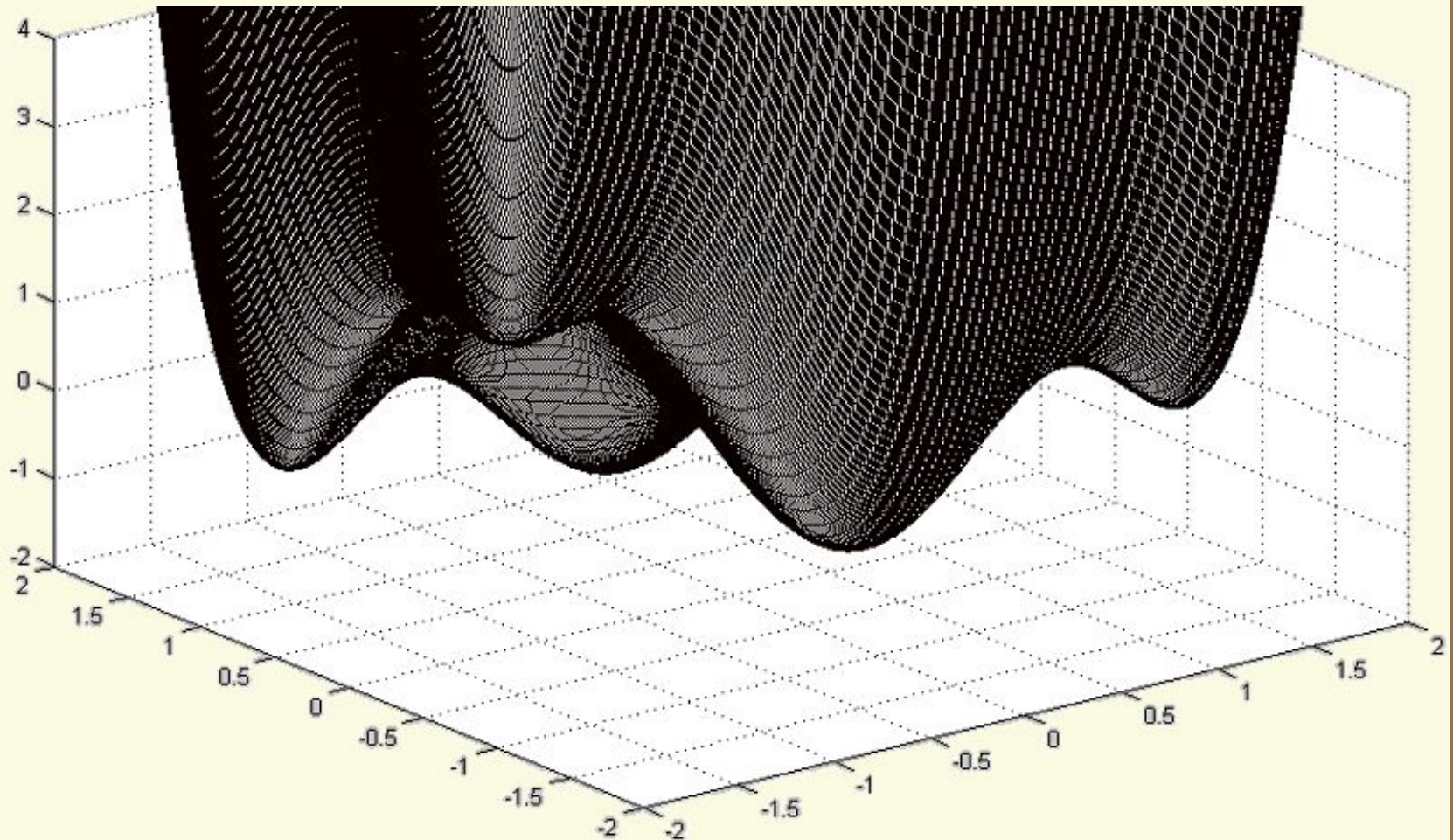
Целевая функция (шестигорбый верблюд)

$$F = 4x^2 + 2.1x^4 + \frac{1}{3}x^6 + xy - 4y^2 + 4y^4$$



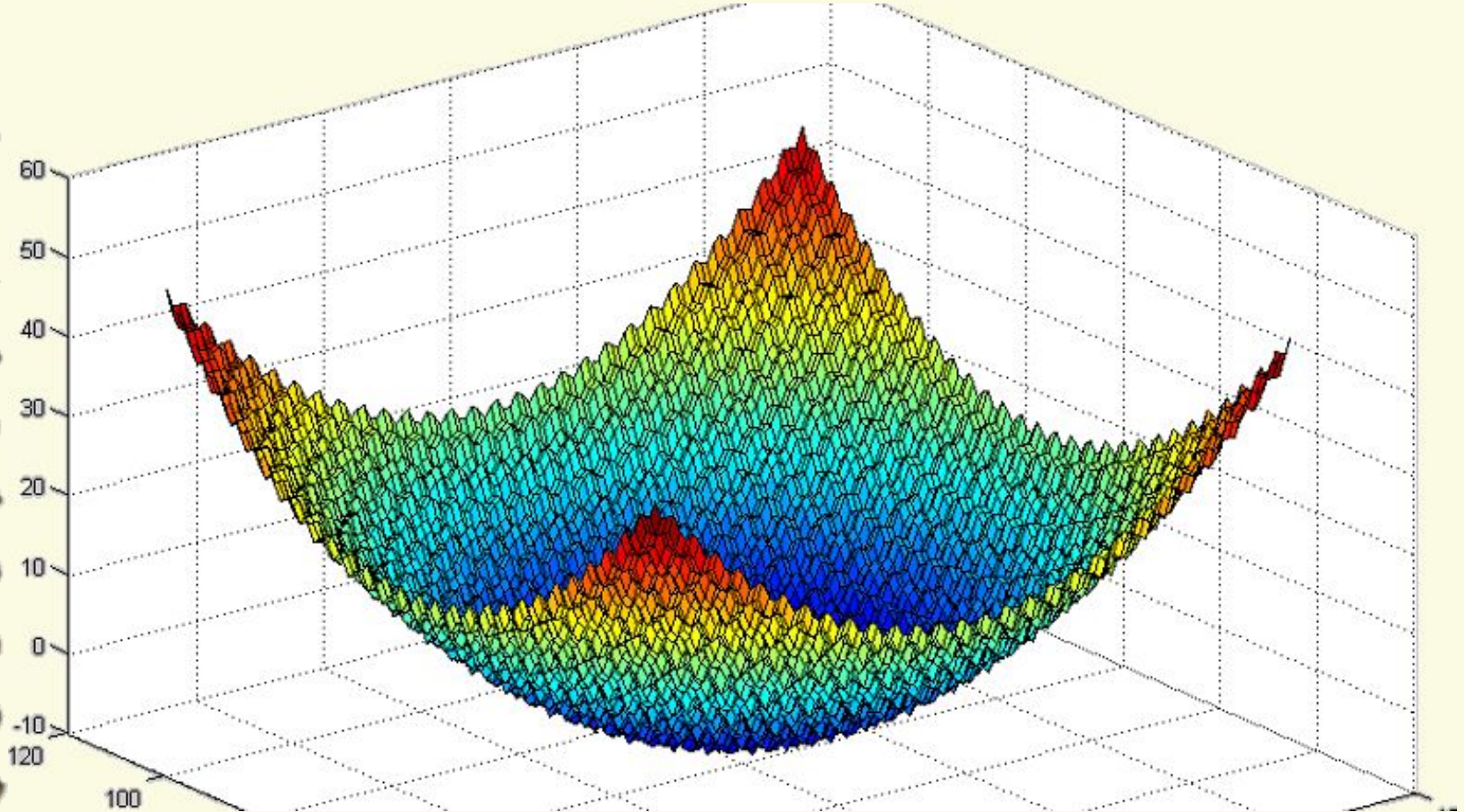
Целевая функция (шестьгорбый верблюд)

$$F = 4x^2 + 2.1x^4 + \frac{1}{3}x^6 + xy - 4y^2 + 4y^4$$



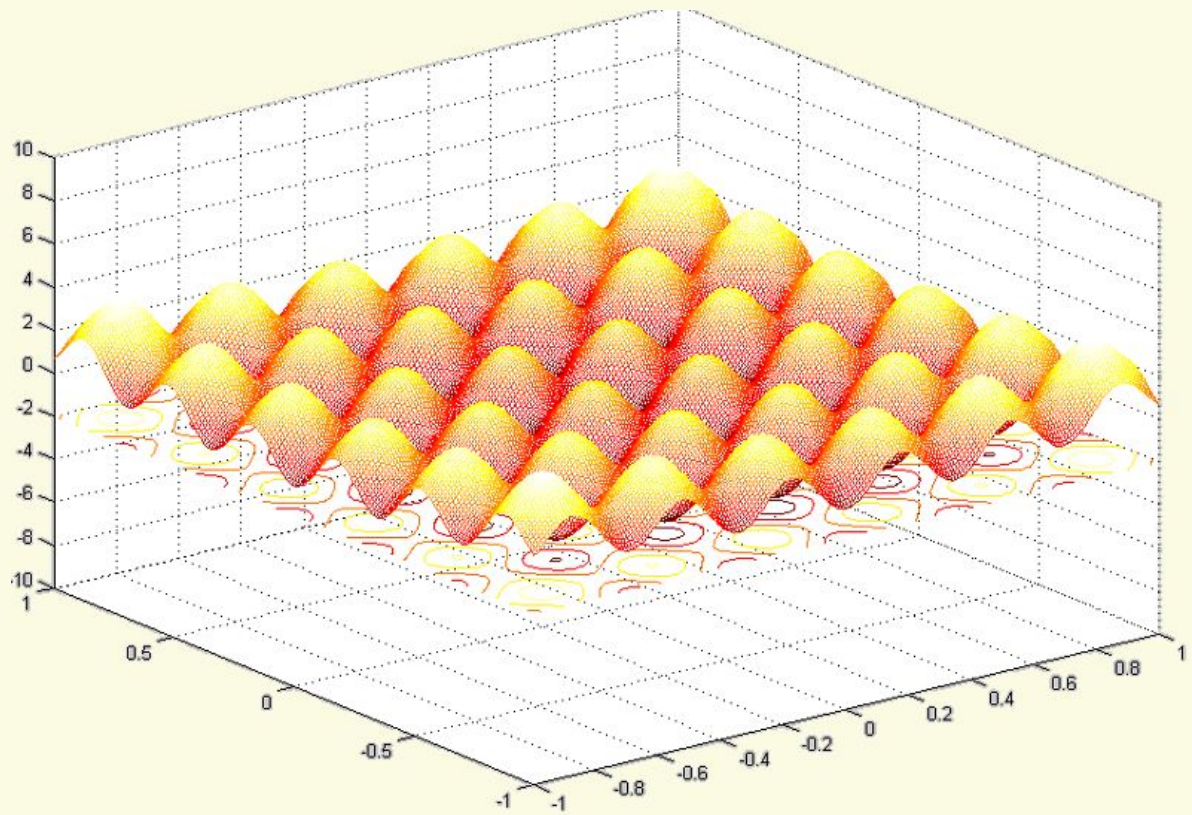
Целевая функция Растригина (10^{ая})

$$F = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y)$$

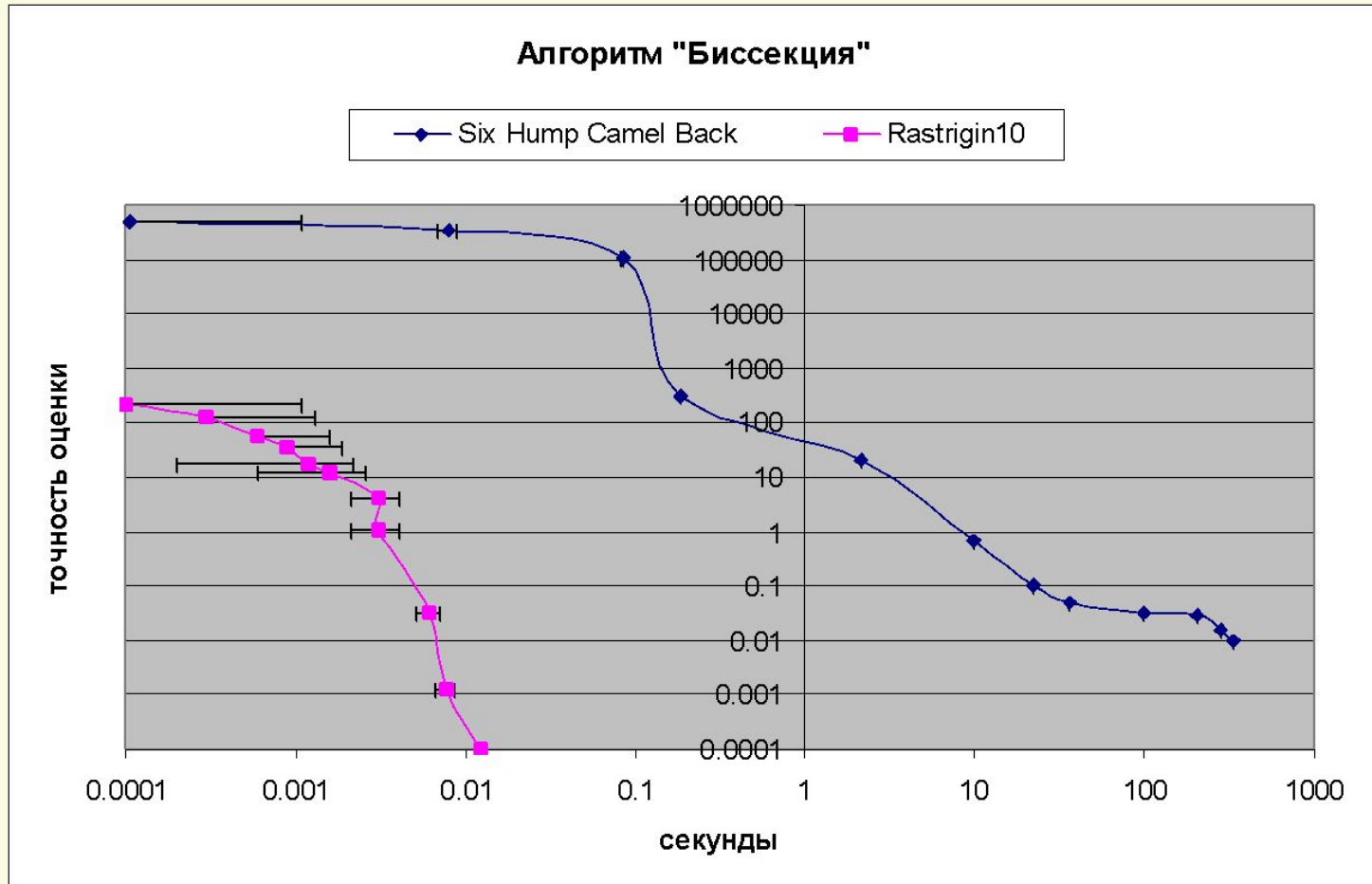


Целевая функция Растригина (10^{ая})

$$F = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y)$$

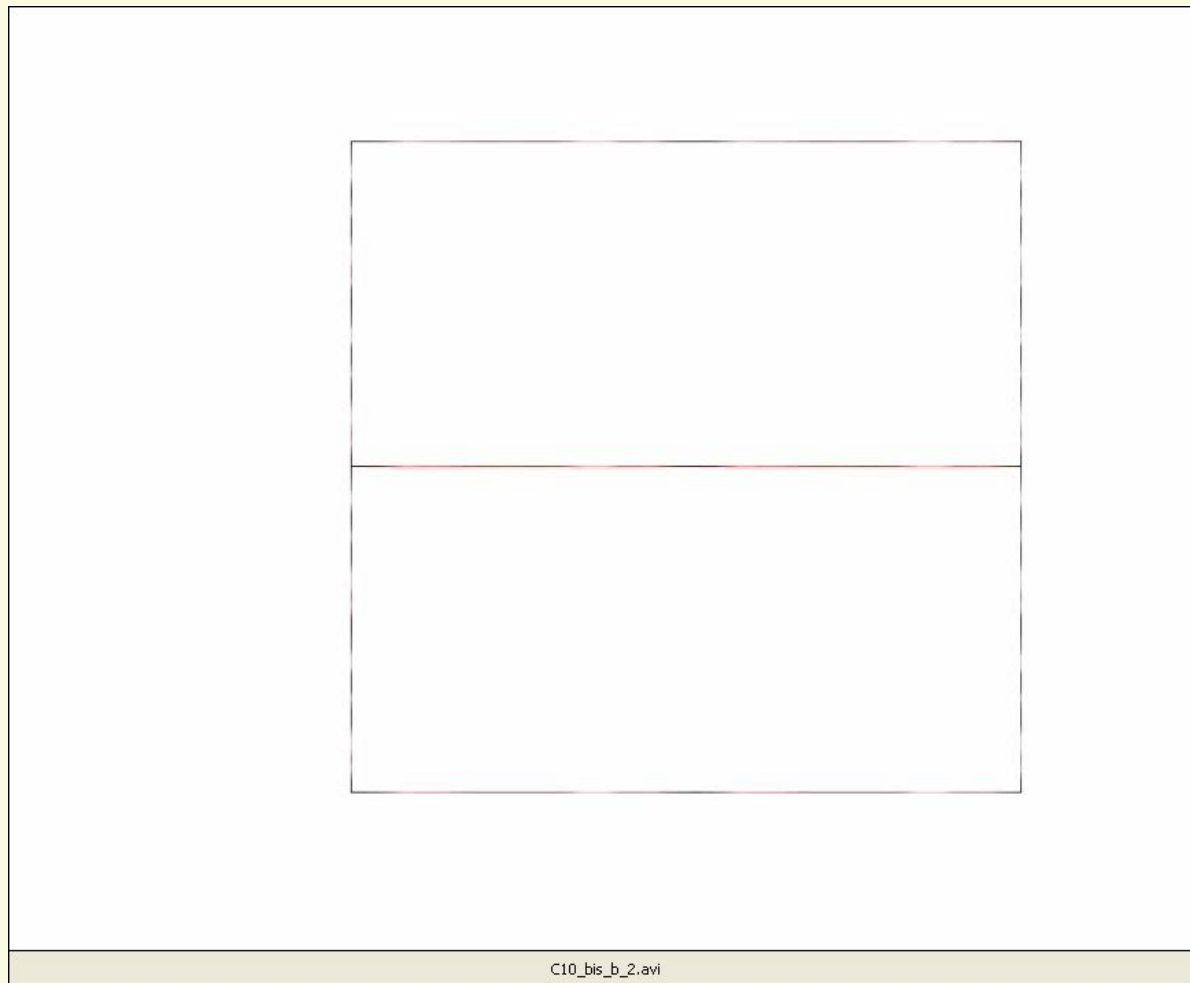


Застаивание и избыточность интервальной оценки могут существенно ухудшить производительность метода.



Процесс работы алгоритма

[«неудобная» функция «Шестигорбый верблюд»]



Маленький промежуточный итог

Интервальный анализ удобен для задач глобальной оптимизации.

Существующий алгоритм бывает недостаточно эффективен.

Причины неуспешности алгоритма

Алгоритмы этого типа запрограммированы на неудачу в задачах такого рода. В соответствии со своей внутренней логикой они будут последовательно мельчить ложные ведущие брусы, лишь незначительно улучшая точность интервальной оценки.

Пути улучшения

Процедуры отбраковки

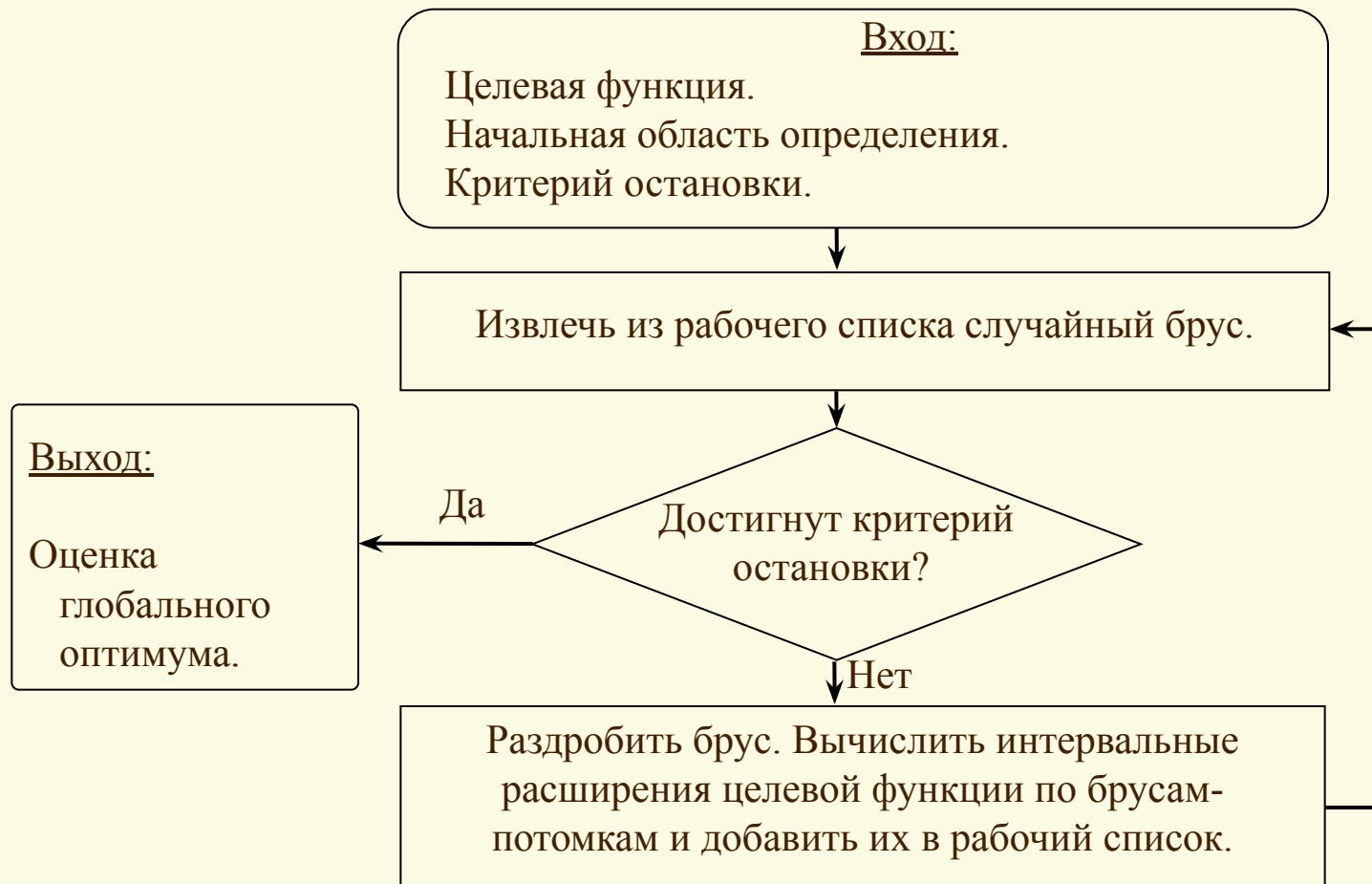
- Отбраковка по значению
- Тест на монотонность
- Тест на выпуклость-вогнутость
- Метод Ньютона

Пути улучшения

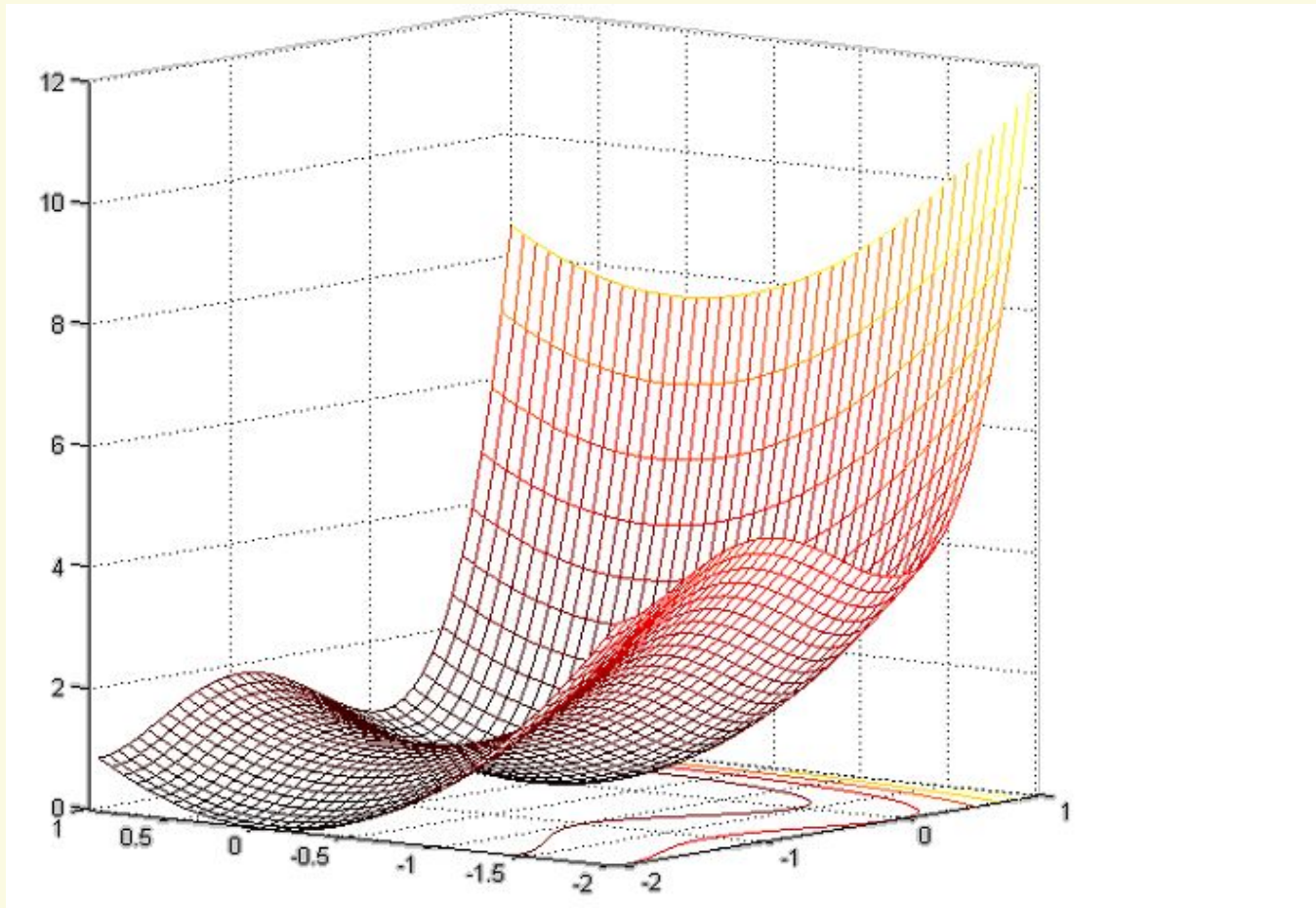
Смена алгоритма [Отказ от детерминизма]

Отказываемся от жесткого детерминизма метода и допускаем некоторые статистические переходы.

Случайный интервальный поиск

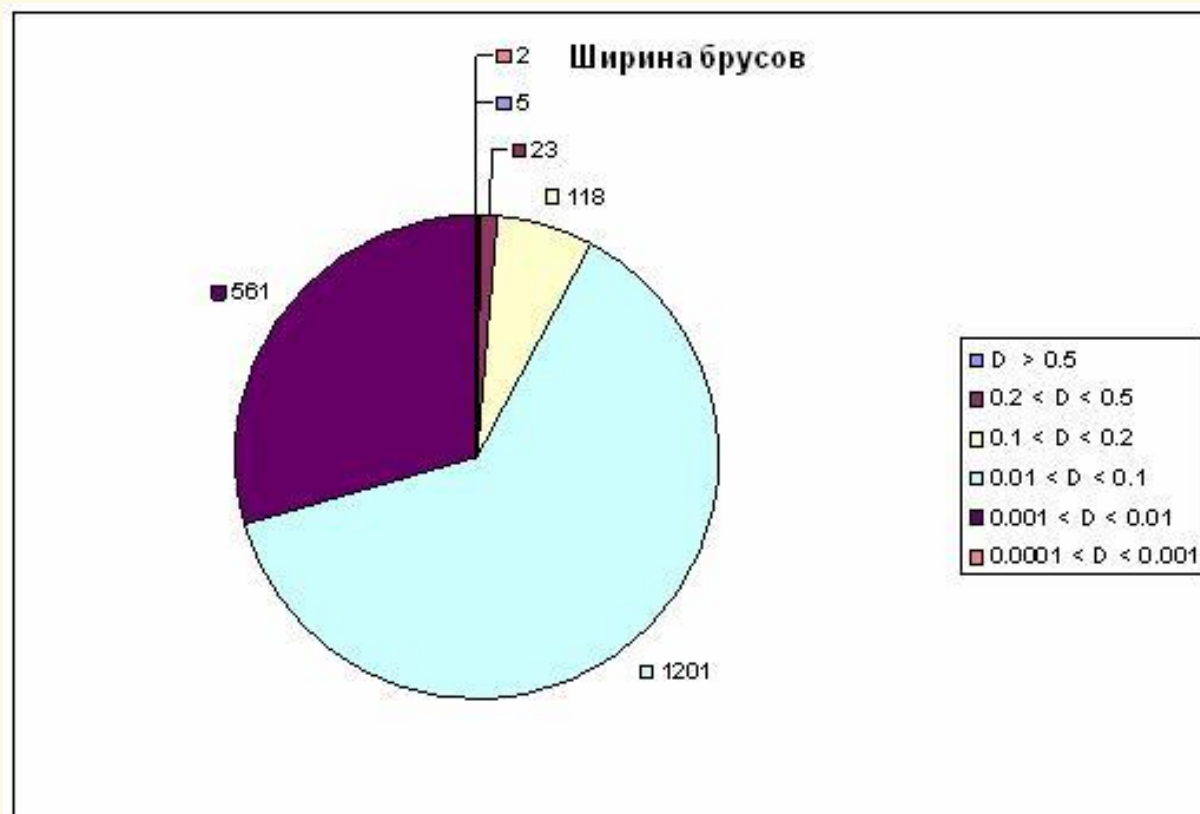


Тестовая функция Трекани



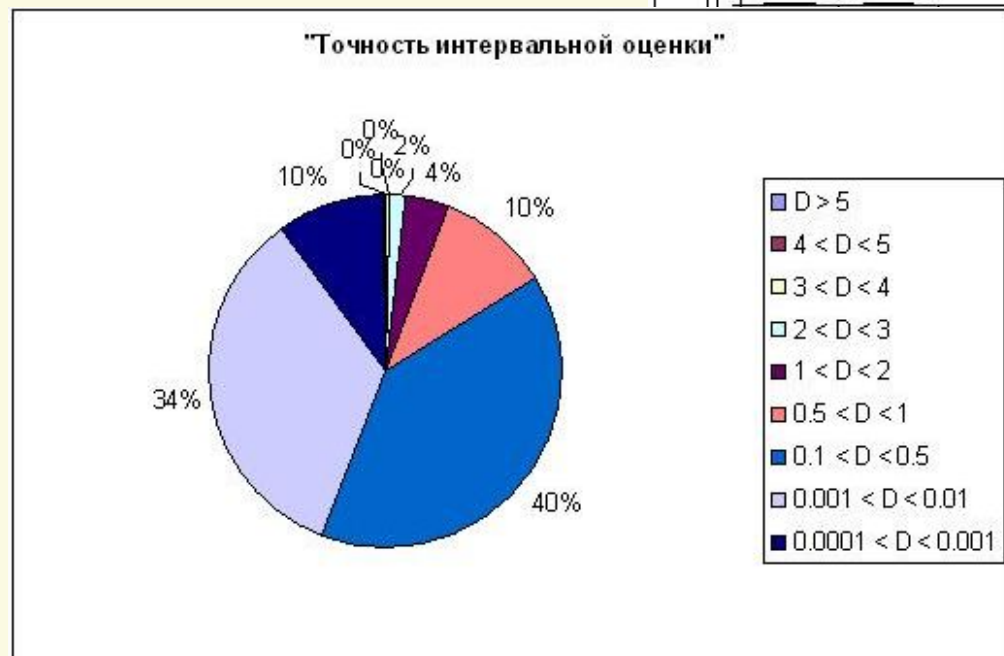
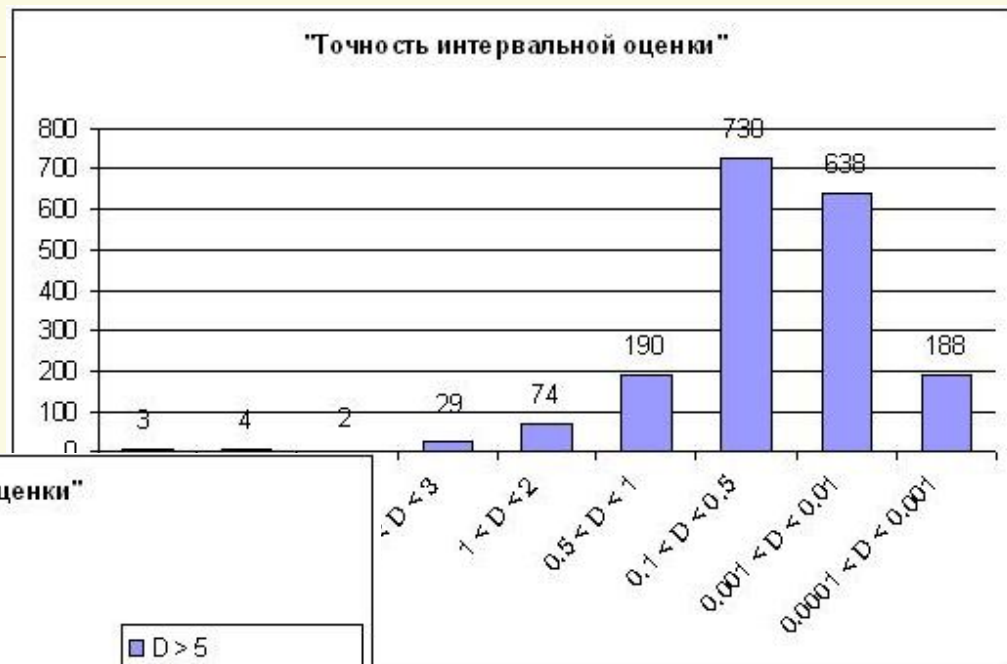
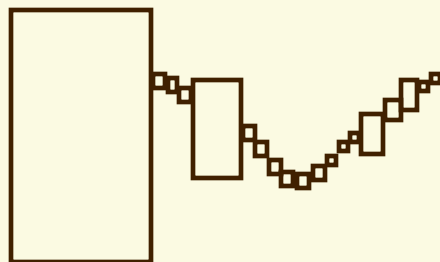
$$F = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + y^2$$

Случайный интервальный поиск



Распределение ширины брусов

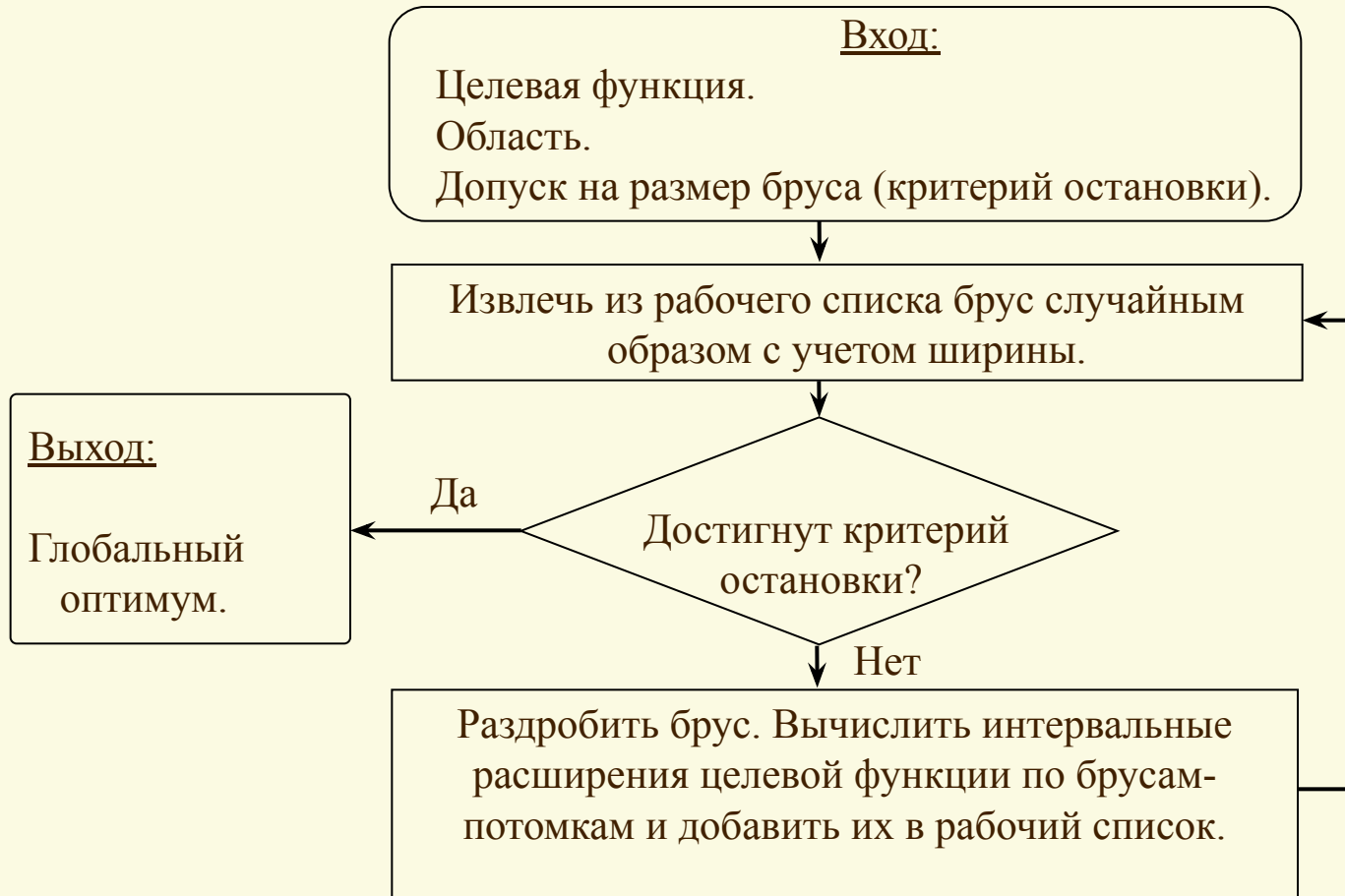
Случайный интервальный поиск



Повышение эффективности метода

- Отбраковка бесперспективных
- Локальные оптимизирующие процедуры
- И т.д.

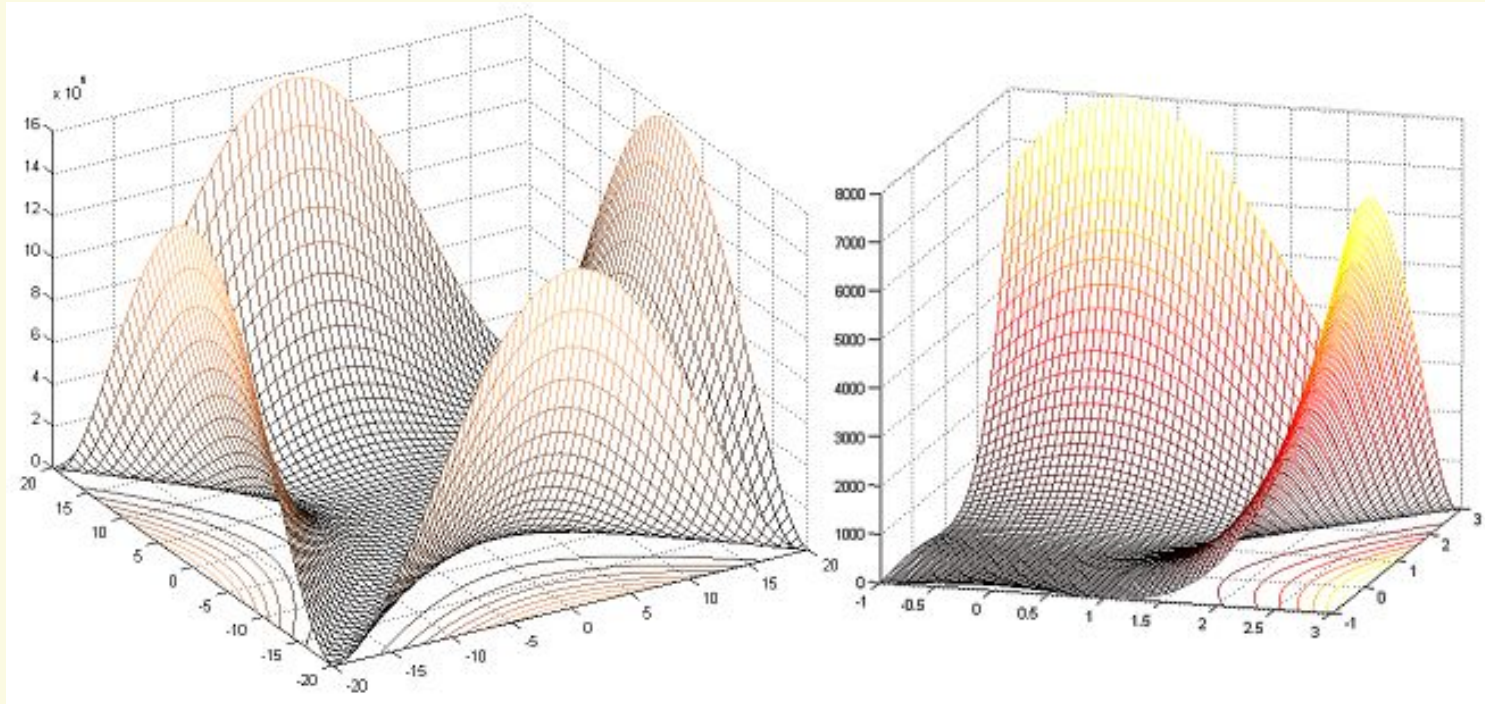
Случайный интервальный поиск с приоритетом



Параметры исследования

- Приоритет по ширине интервала
- Приоритет по ширине интервальной оценки

Функция «Розенброк4» (RV4)



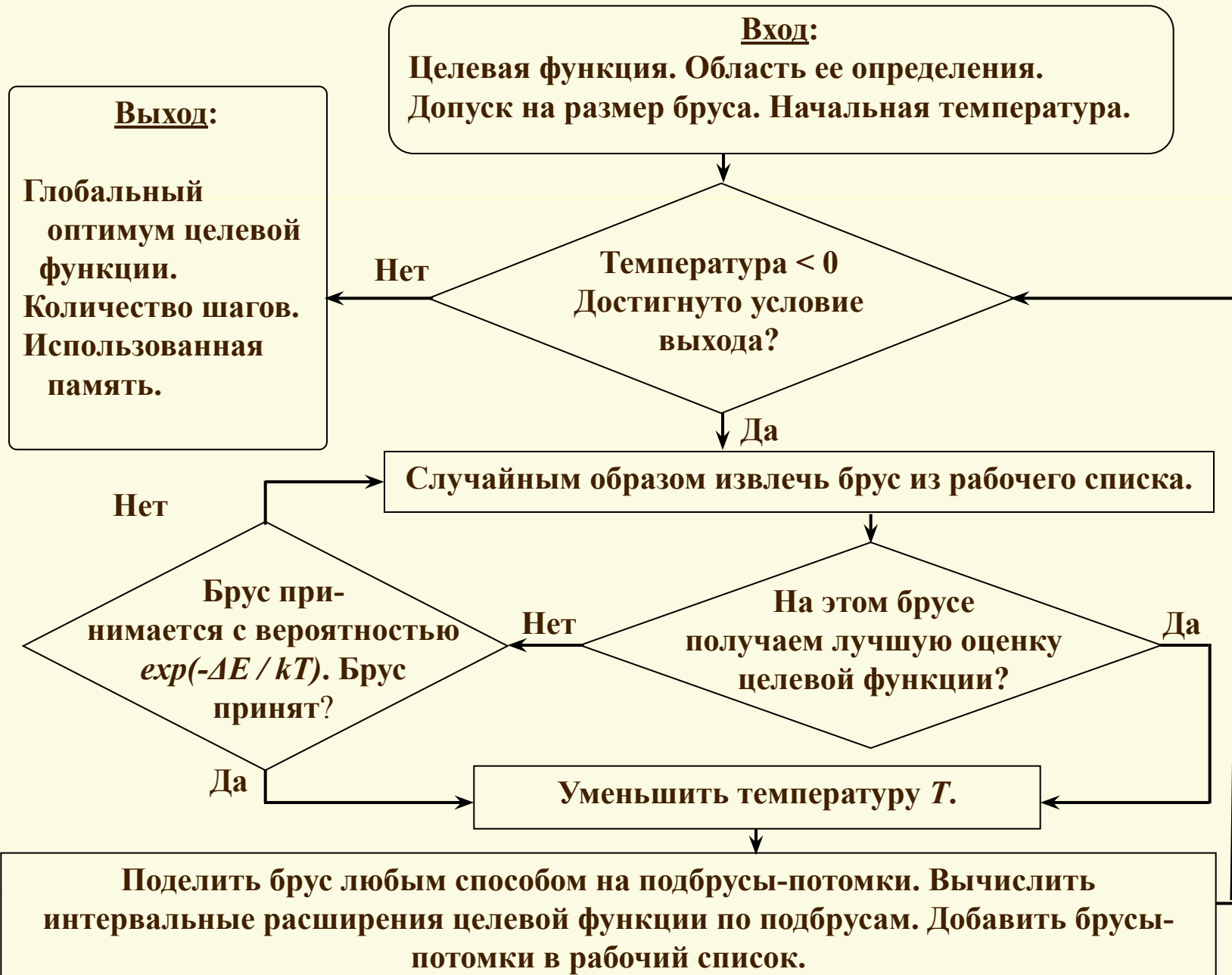
Общий вид (слева) и поведение вблизи точки глобального минимума (справа).

Результаты экспериментов

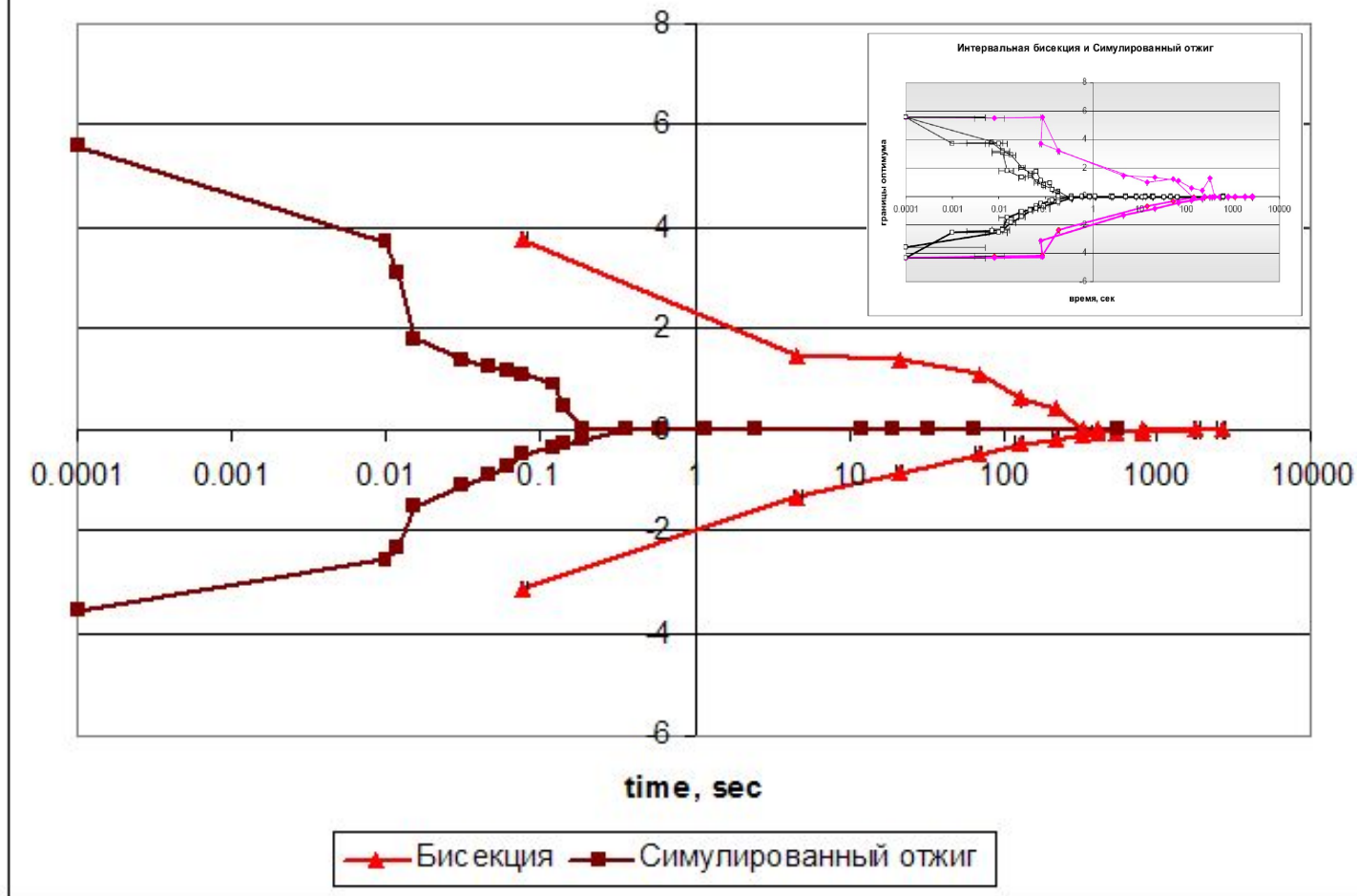
Метод	Время работы
Адаптивное интервальное дробление	100 / 100
Случайный интервальный поиск	∞ / 350
Случайный интервальный поиск с приоритетом (вариант 1)	67 / 272
Случайный интервальный поиск с приоритетом (вариант 2)	20 / 99
Случайный интервальный поиск с приоритетом (вариант 3)	138 / 73

Интервальный симулированный отжиг

- Алгоритм Метрополиса
- Метод $M(RT)^2$
- Алгоритм «Отпуска»
- Симулированный отжиг.



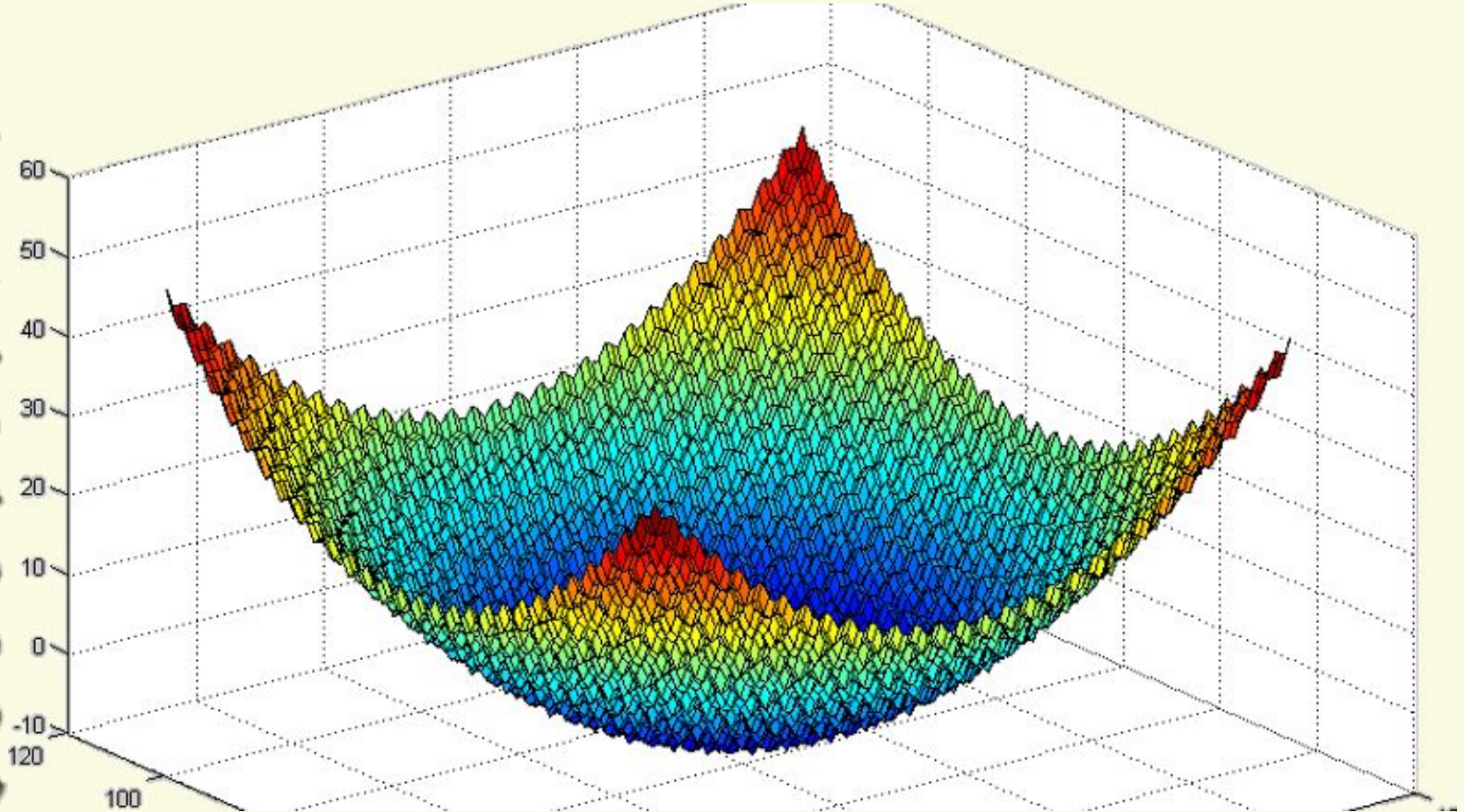
Бисекция и Симулированный отжиг



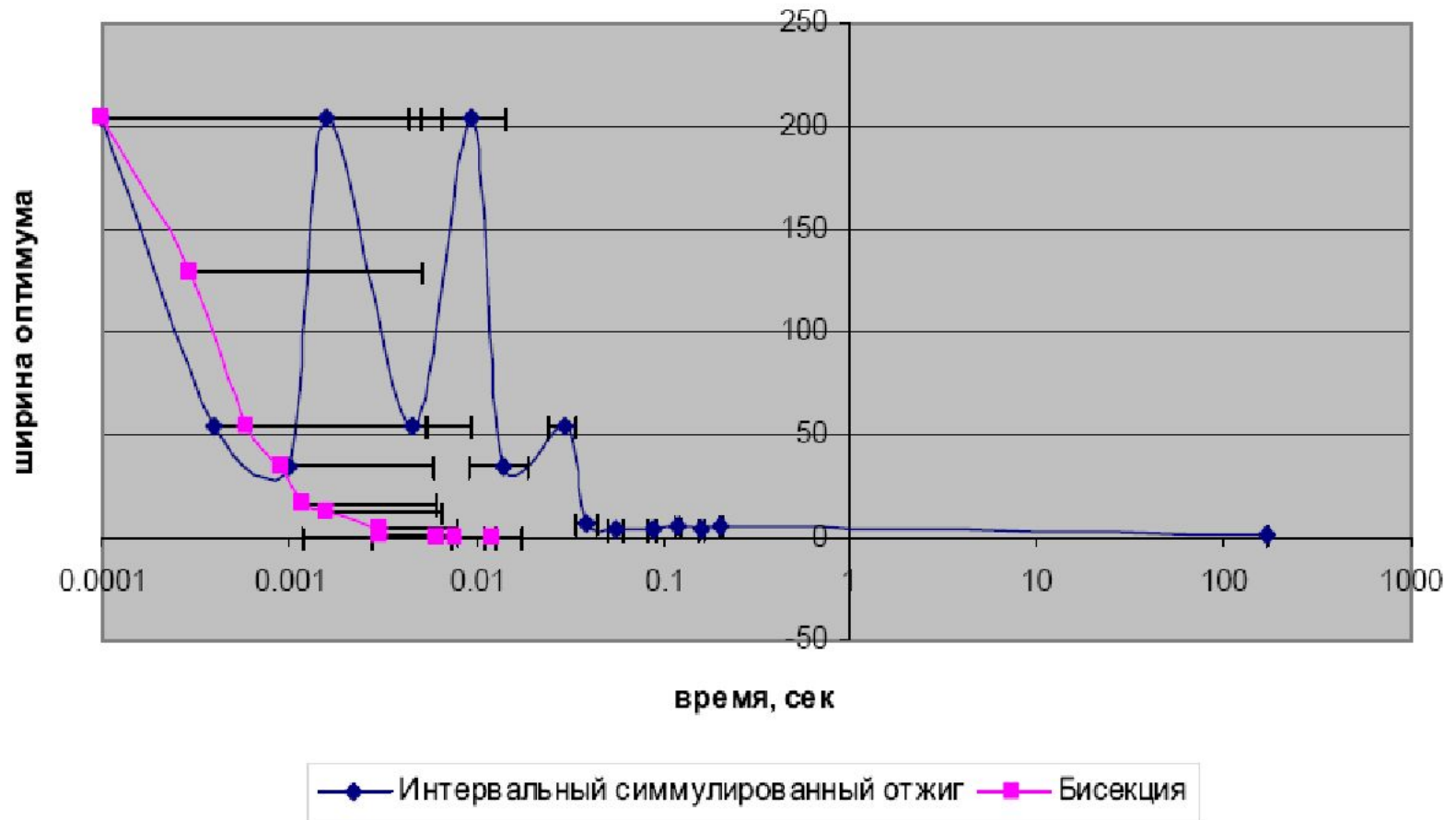
Сравнение адаптивного интервального дробления (бисекции) и интервального симулированного отжига на «шестигорбом верблюде»

Целевая функция Растригина (10^{ая})

$$F = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y)$$

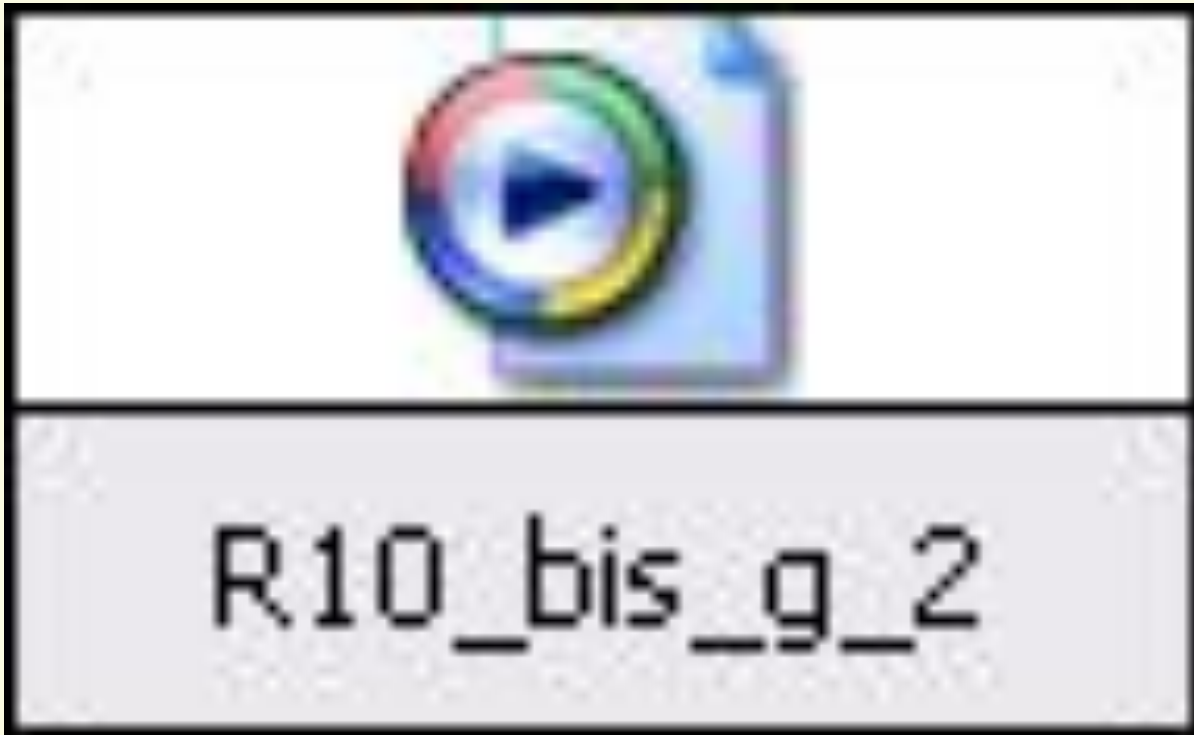


Бисекция и Интервальный симмулированный отжиг



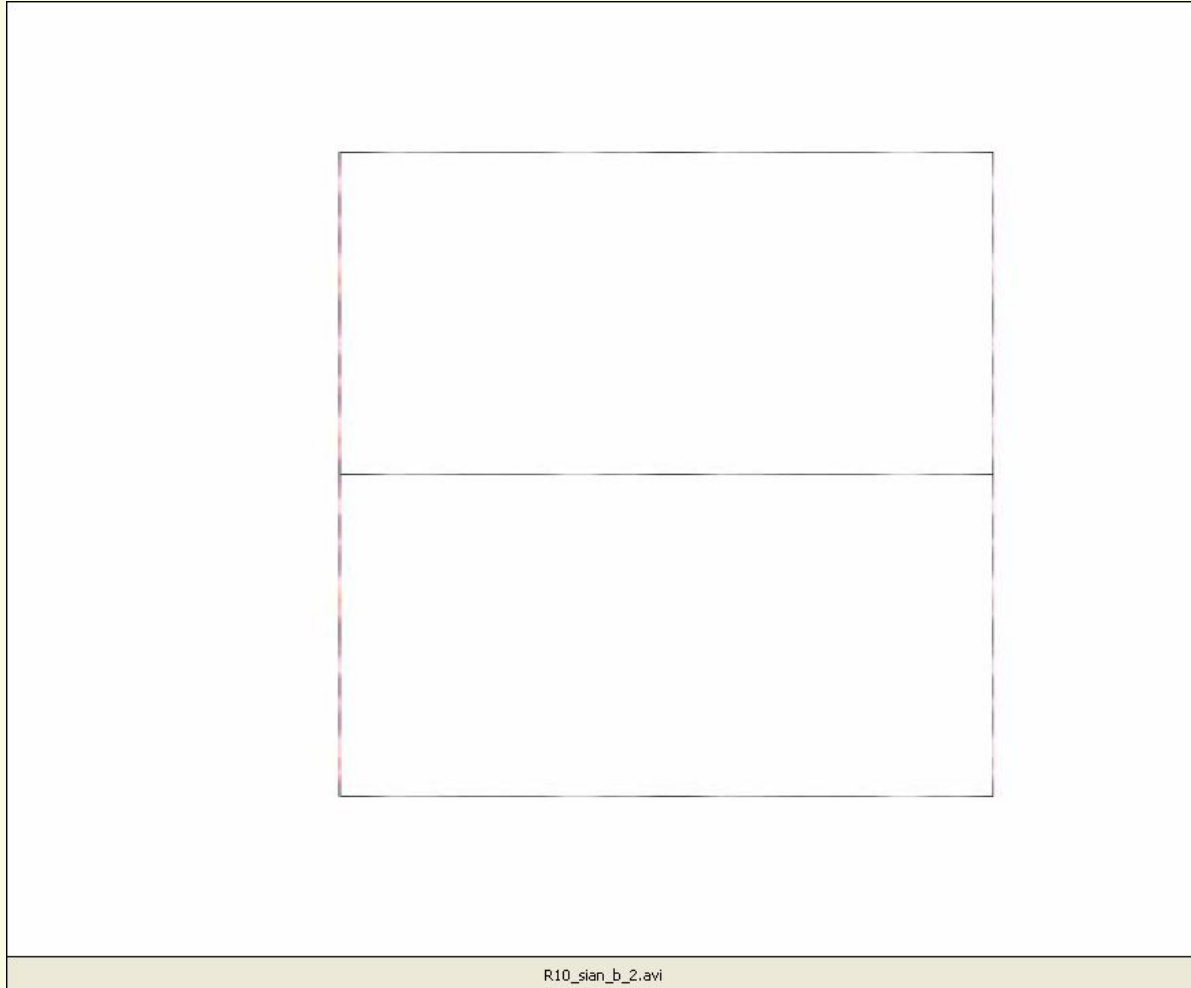
Сравнение адаптивного интервального дробления (бисекции) и интервального симмулированного отжига на функции $F = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y)$


Алгоритм интервального адаптивного дробления



Интервальный алгоритм симулированного отжига

[неоптимальные настройки]



A spiral-bound notebook with a cream-colored page and a brown cover. The spiral binding is on the left side. A horizontal line is drawn across the page, just above the text.

Интервальный генетический алгоритм

Интервальный генетический алгоритм

- Популяция – список брусов
- Благоприятные условия:
 - среда обитания – оценка значения функции на брусе
 - способность к воспроизводству – ширина бруса

Интервальный генетический алгоритм

Вариативность:

- Максимальное количество потомков
- Минимальное количество потомков
- Сколько объектов, начиная с самого приспособленного, могут оставить потомство.
- Брусы бьются на равные части, либо же в некой пропорции, «разновесные» дети.

Приспособленность:

- Нижняя оценка функции на брусе.
- Ширина интервальной оценки на брусе.
- Размер бруса.

Интервальный генетический алгоритм

Объединенная функция
приспособленности:

$$F(\mathbf{b}) = \sum_i^n \left(\alpha_i \cdot \text{wid}(b_i) \right) + \beta \cdot \underline{f(\mathbf{b})} + \gamma \cdot \text{wid}(f(\mathbf{b}))$$

$f(\mathbf{b})$ – интервальная оценка целевой функции f на брусе \mathbf{b}

$\underline{f(\mathbf{b})}$ – нижняя граница интервальной оценки
(оценка минимума снизу)

$\text{wid}(f(\mathbf{b}))$ – ширина (точность) интервальной оценки.

Интервальный генетический алгоритм глобальной оптимизации

0. Создать начальную популяцию (произвести несколько дроблений).
1. Вычислить функцию приспособленности по новым подбрусам.
2. N из наиболее приспособленных брусов с вероятностью P_n оставляют от L_n до U_n потомков.
3. M из неприспособленных брусов с вероятностью P_m оставят от L_m до U_m потомков.
- 4.* Подбрусы проверяются на жизнеспособность (применяются критерии отбраковки)
- 5.* Если критерий отбраковки был улучшен, случается Эпидемия (улучшенные критерии применяются ко всему списку брусов)

Результаты работы

Метод	Время работы
Адаптивное интервальное дробление	100 / 100
Генетический алгоритм, постоянные коэффициенты	32 - 422 / 72 - 397
Генетический алгоритм, случайные коэффициенты	68 - 112 / ~120
Генетический алгоритм, случайно-адаптивные коэффициенты	~36 / ~100

Вывод

- 1) Отказ от чистого детерминизма традиционных интервальных методов глобальной оптимизации может привести к созданию численных алгоритмов с качественно новыми свойствами, в частности, с улучшенной эффективностью.
- 2) Применение стохастических подходов в интервальных методах глобальной оптимизации оправдано.



Дополнительная информация

Точность интервальных оценок

