

# Стохастические интервальные подходы в задачах глобальной оптимизации

## Интервальный генетический алгоритм

**Н. В. Панов, С. П. Шарый**

*Институт вычислительных технологий СО РАН  
г. Новосибирск*

# Глобальная оптимизация функций

---

Ищем  $\min_{x \in X} F(x)$

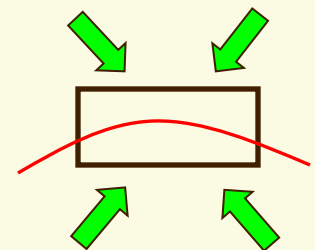
Поиск глобального минимума  
( или максимума )  
вещественнозначной функции

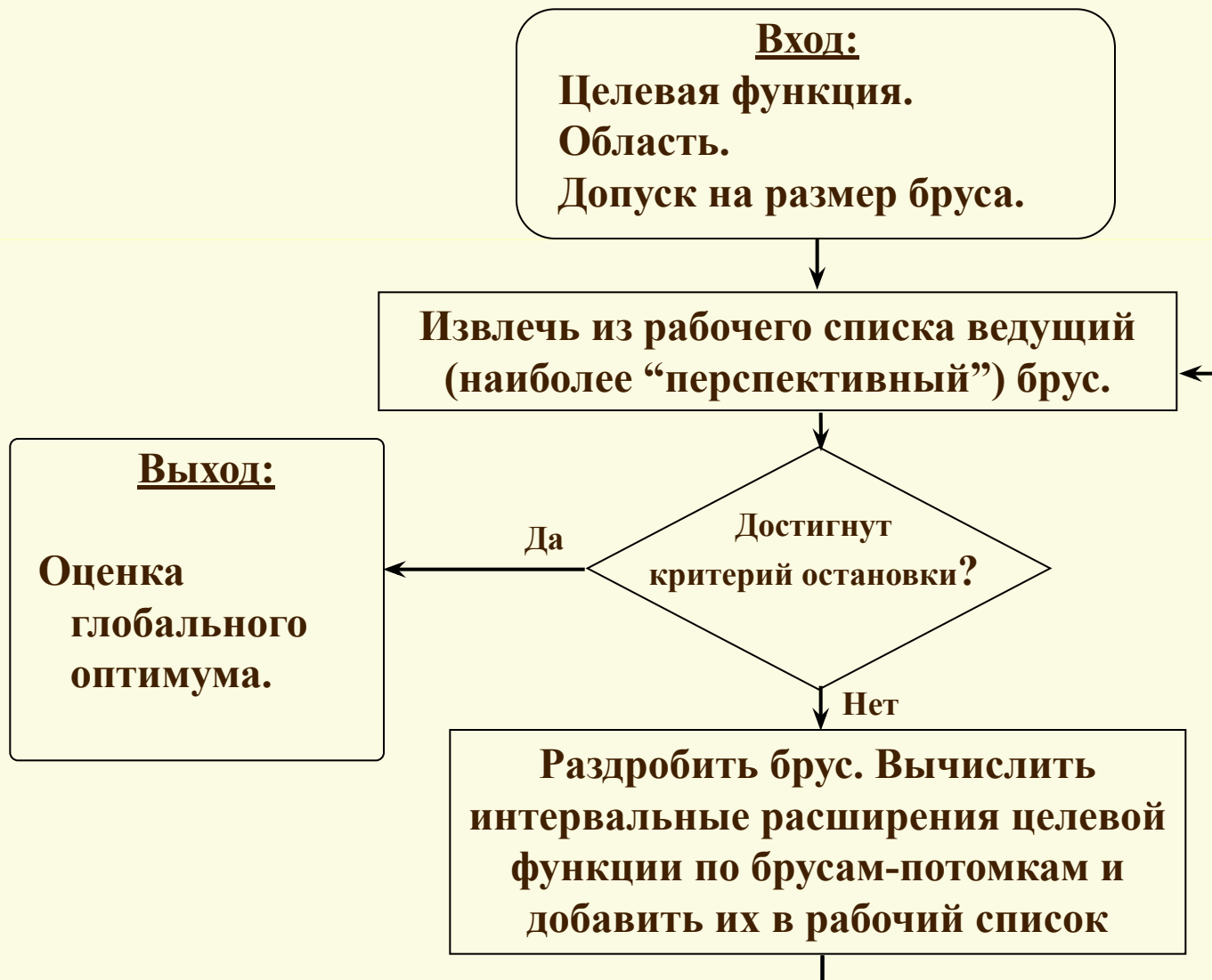
$$F : \mathbb{R}^n \supset X \rightarrow \mathbb{R}$$

на прямоугольном брусе  $X$   
со сторонами, параллельными  
координатным осям.

# Глобальная оптимизация функций

- Удачная область для применения интервальных методов
- В отличие от классических (точечных) методов не требуется знание априорной информации о функции
  - ~~Константа Липшица~~
  - ~~Производные~~
  - Результат гарантируется
- Интервальное расширение функции, фактически, дает верхнюю и нижнюю оценку оптимума.
  - Границы могут быть избыточными.





**Блок-схема оптимизационного алгоритма адаптивного интервального дробления**

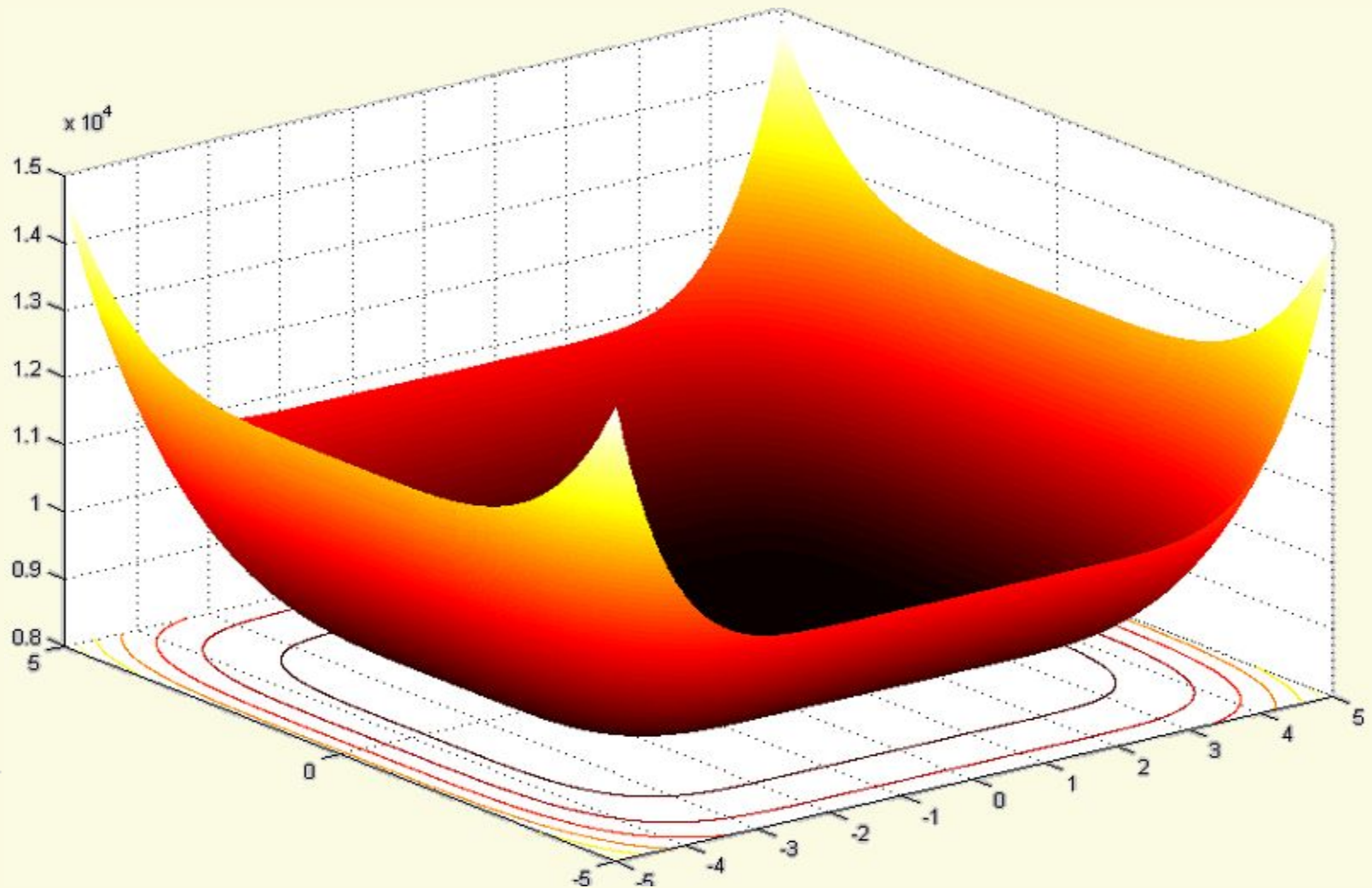
# Но

---

Застаивание и избыточность интервальной оценки могут существенно ухудшить производительность метода.

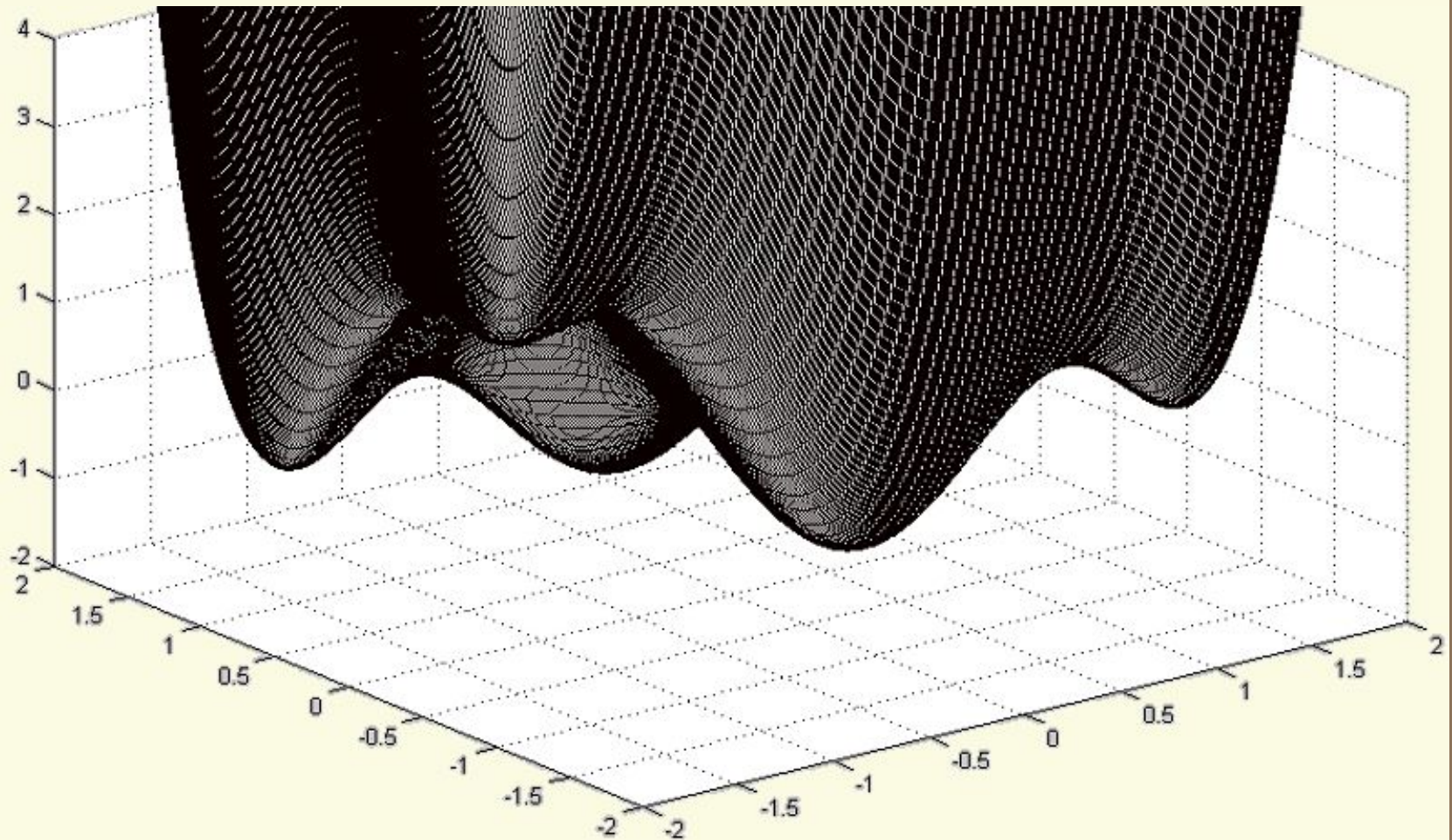
Целевая функция (шестигорбый верблюд)

$$F = 4x^2 + 2.1x^4 + \frac{1}{3}x^6 + xy - 4y^2 + 4y^4$$



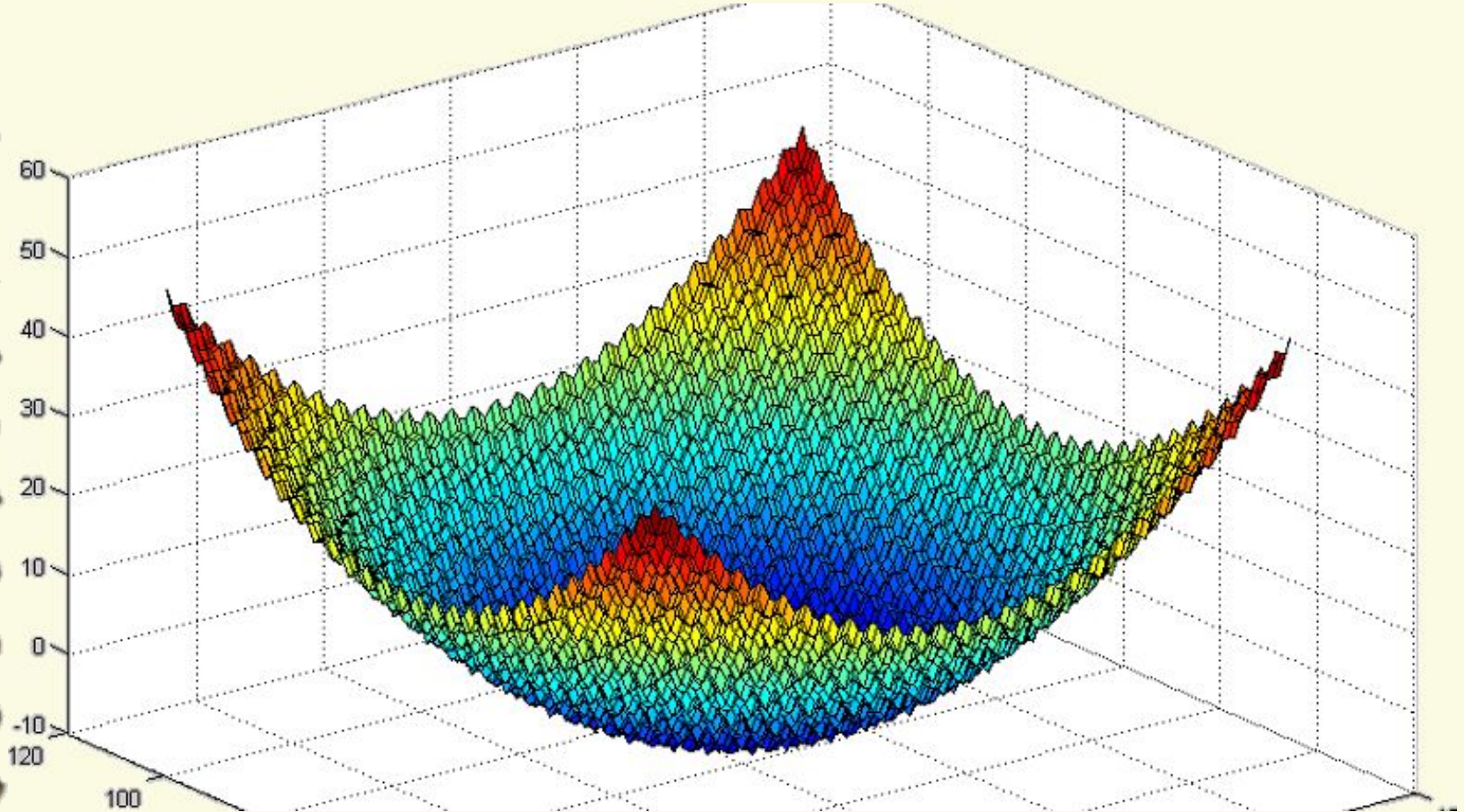
Целевая функция (шестьгорбый верблюд)

$$F = 4x^2 + 2.1x^4 + \frac{1}{3}x^6 + xy - 4y^2 + 4y^4$$



Целевая функция Растригина (10<sup>ая</sup>)

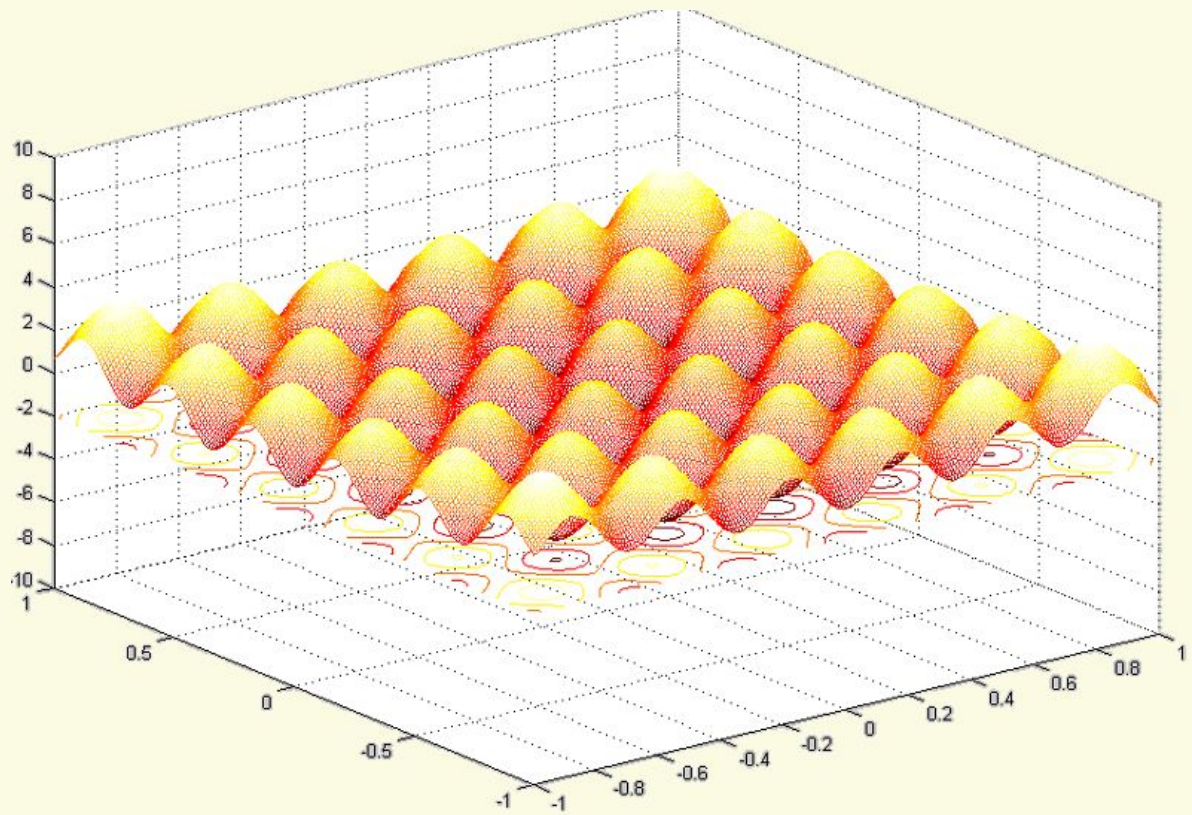
$$F = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y)$$



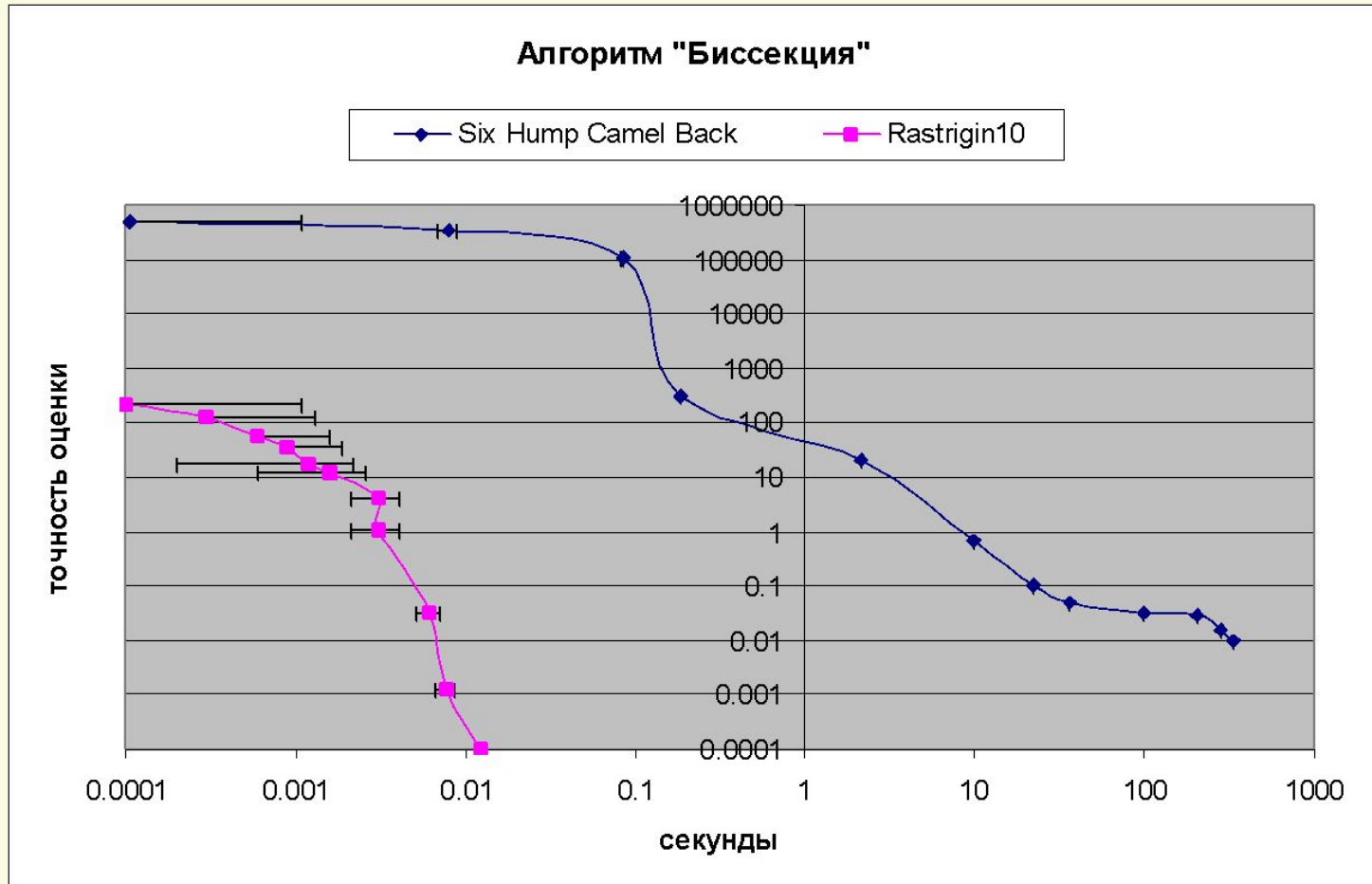


Целевая функция Растригина (10<sup>ая</sup>)

$$F = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y)$$

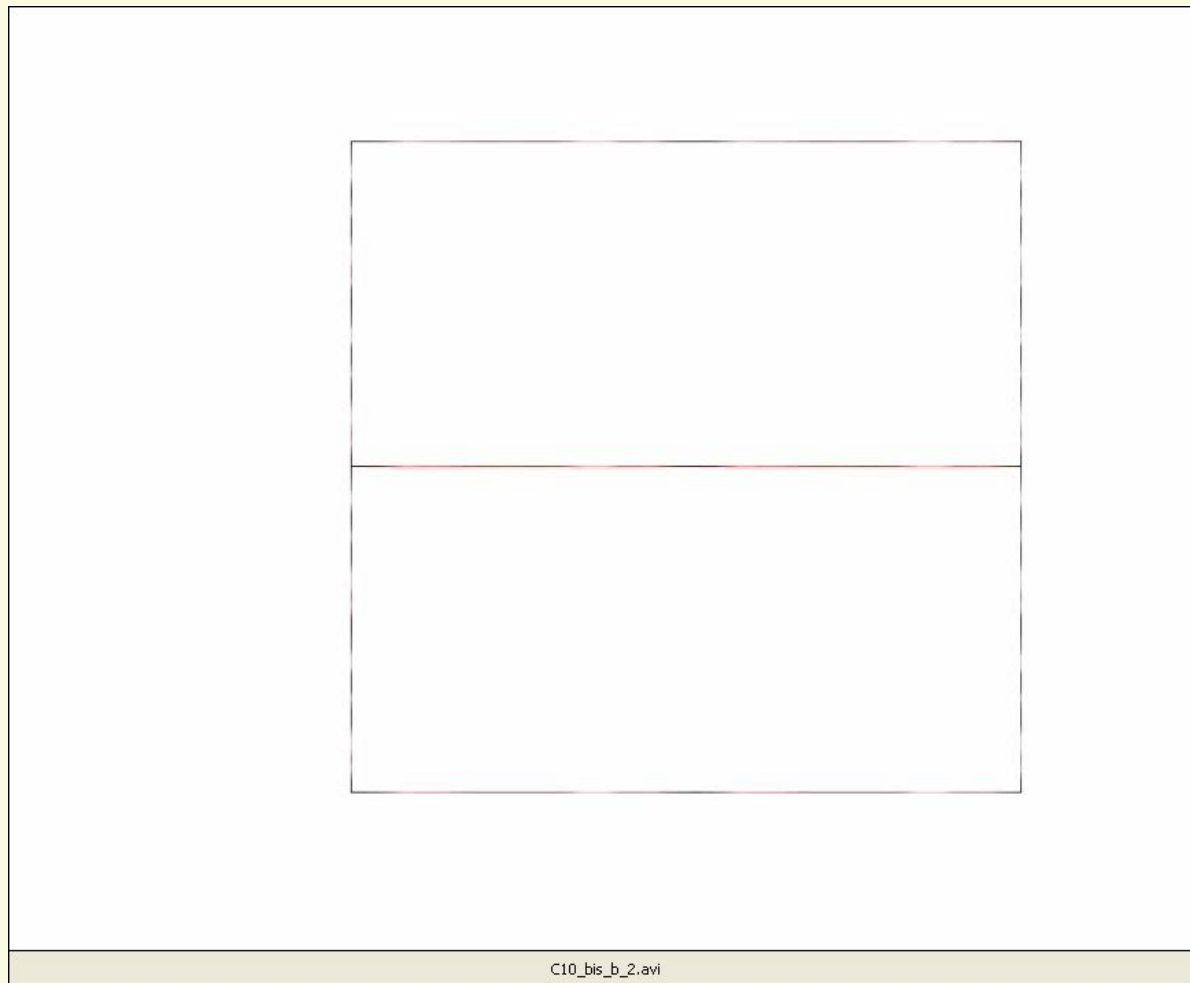


Застаивание и избыточность интервальной оценки могут существенно ухудшить производительность метода.



# Процесс работы алгоритма

[ «неудобная» функция «Шестигорбый верблюд» ]



## Маленький промежуточный итог

---

Интервальный анализ удобен для задач глобальной оптимизации.

Существующий алгоритм бывает недостаточно эффективен.

# Причины неуспешности алгоритма

---

Алгоритмы этого типа запрограммированы на неудачу в задачах такого рода. В соответствии со своей внутренней логикой они будут последовательно мельчить ложные ведущие брусы, лишь незначительно улучшая точность интервальной оценки.

Пути улучшения

## Процедуры отбраковки

---

- Отбраковка по значению
- Тест на монотонность
- Тест на выпуклость-вогнутость
- Метод Ньютона

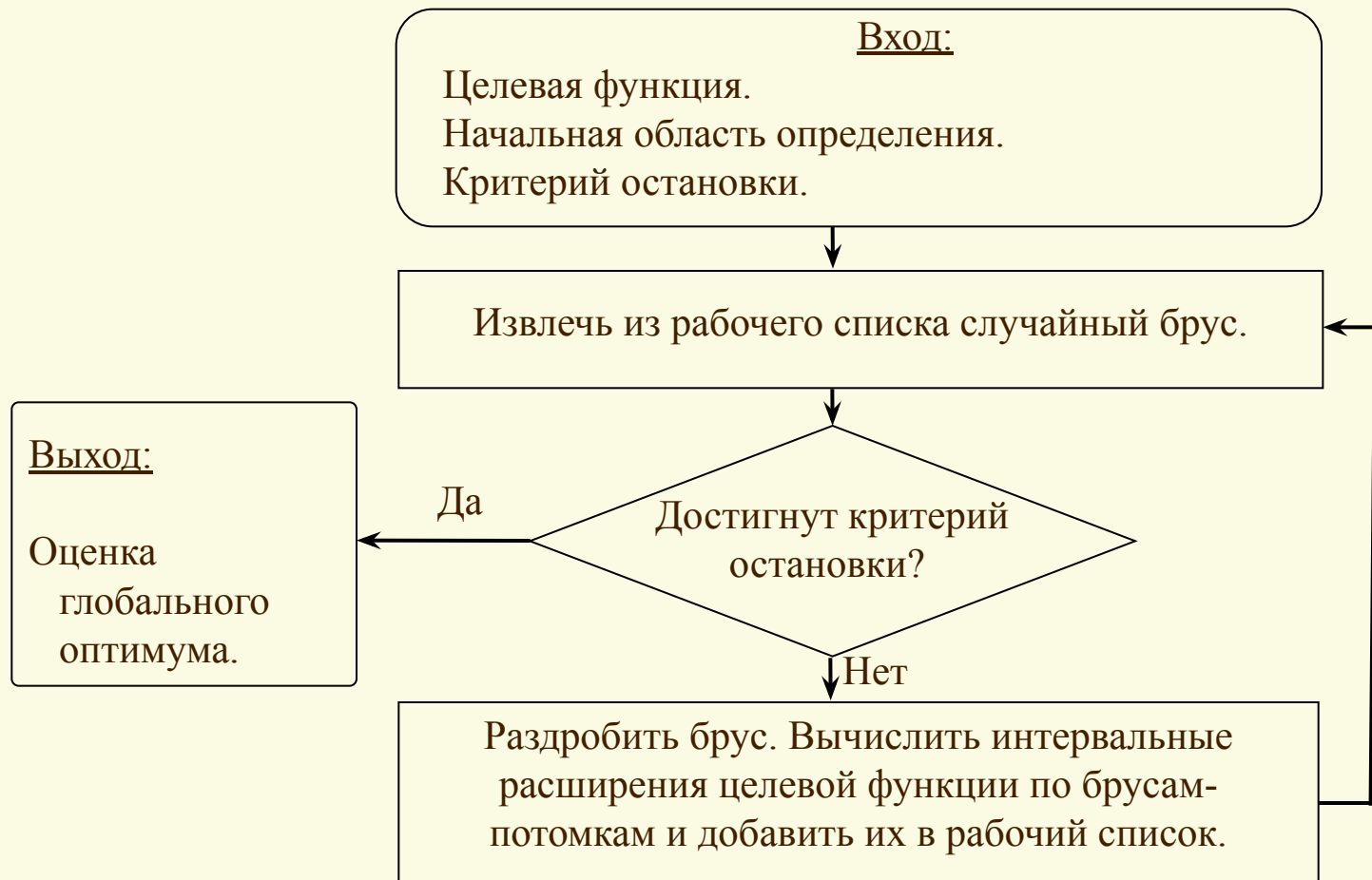
Пути улучшения

# Смена алгоритма [ Отказ от детерминизма ]

---

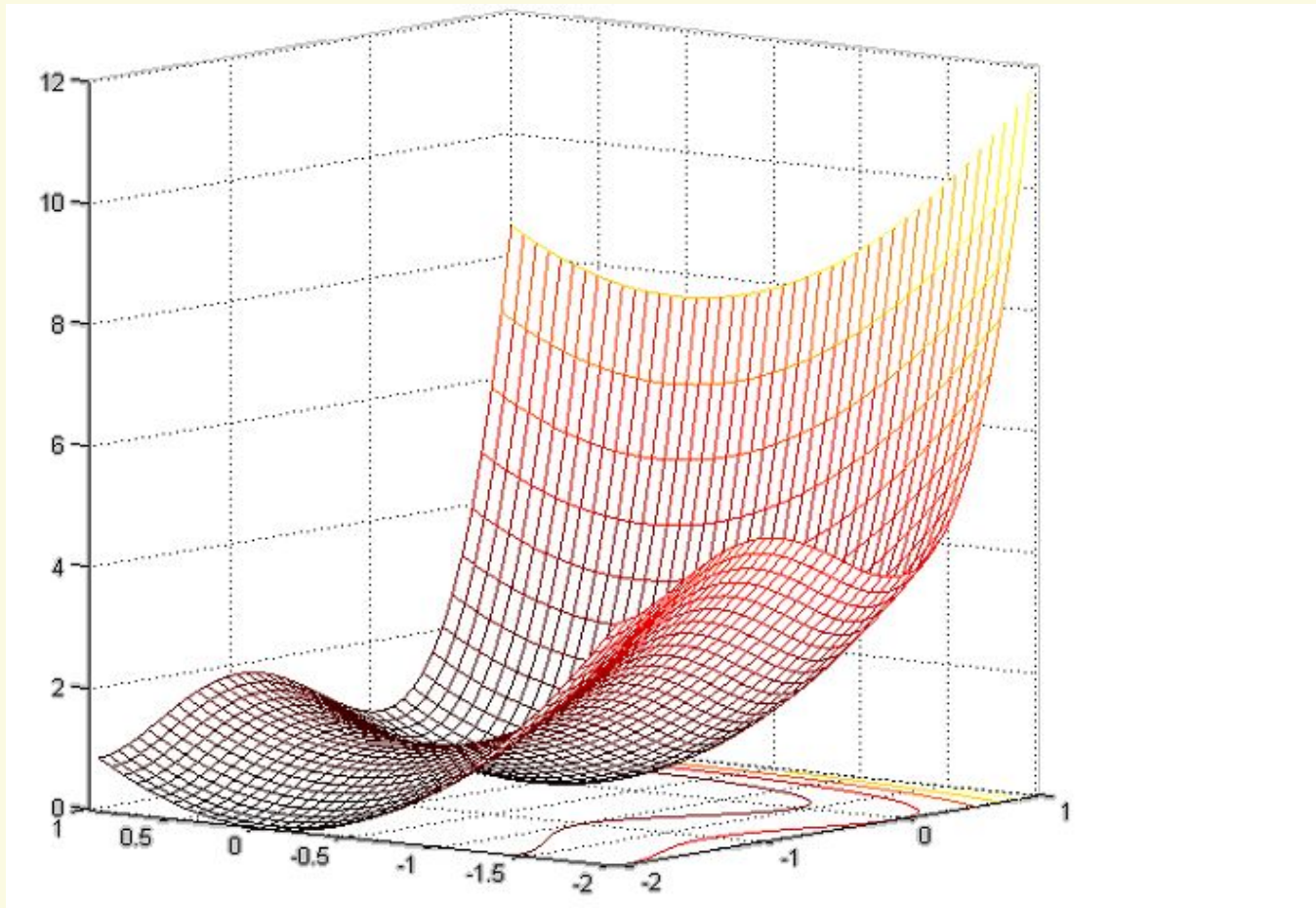
Отказываемся от жесткого детерминизма метода и допускаем некоторые статистические переходы.

# Случайный интервальный поиск



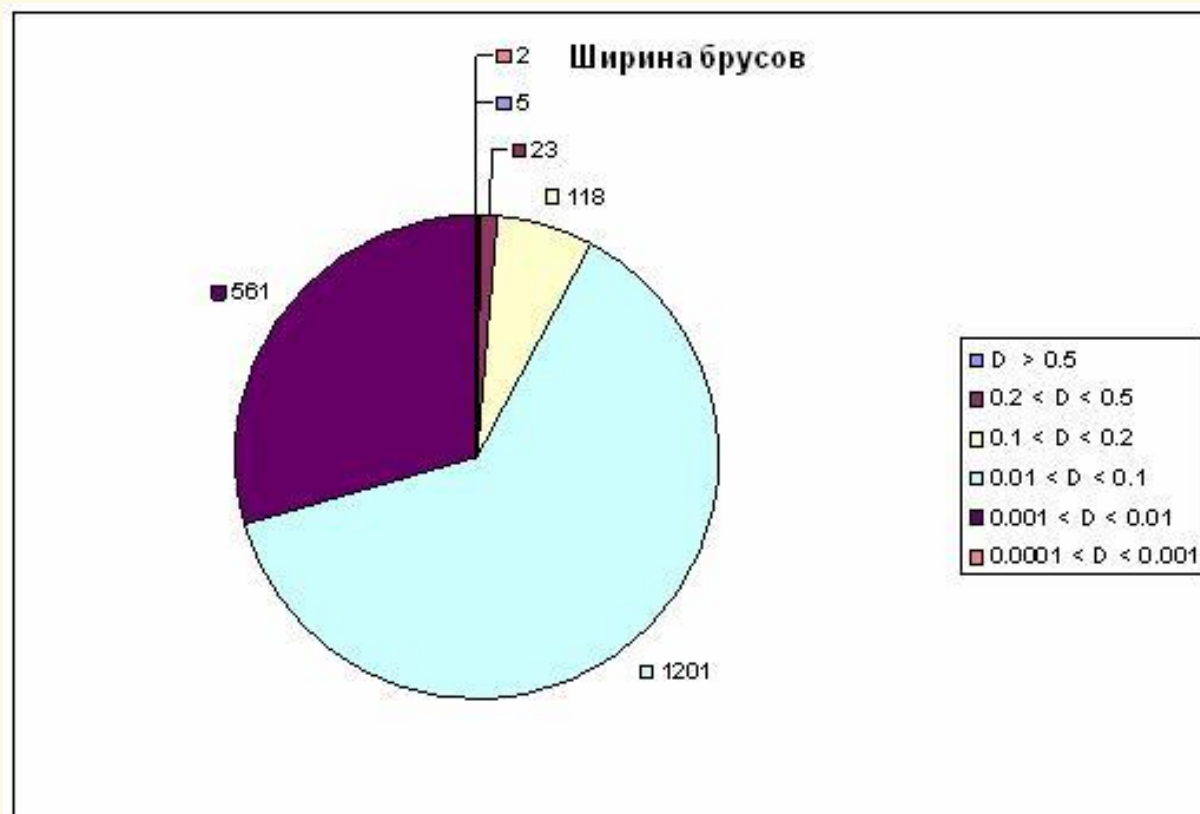


# Тестовая функция Трекани



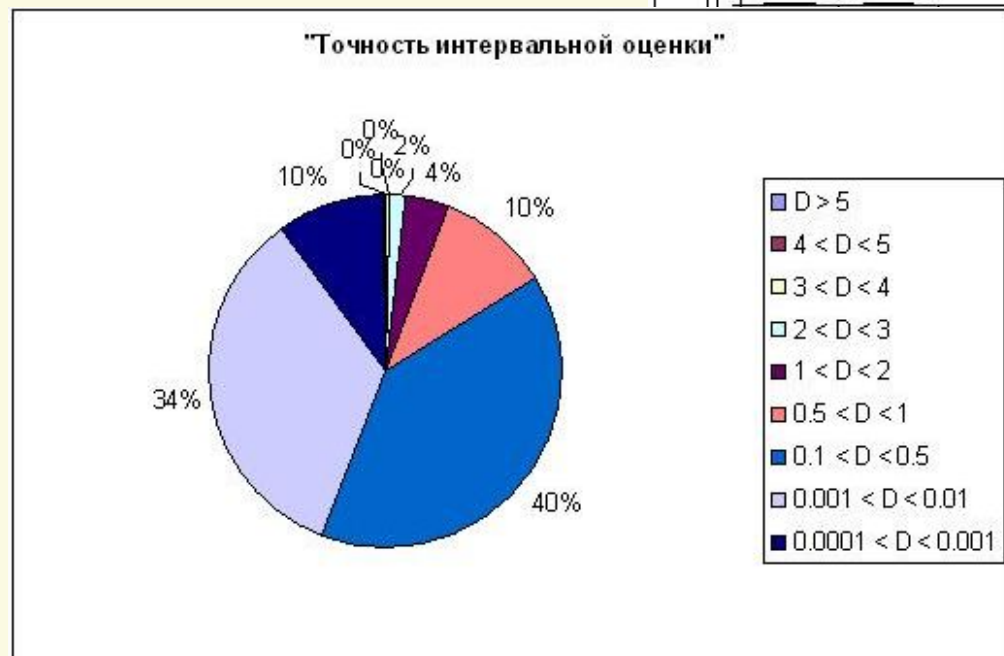
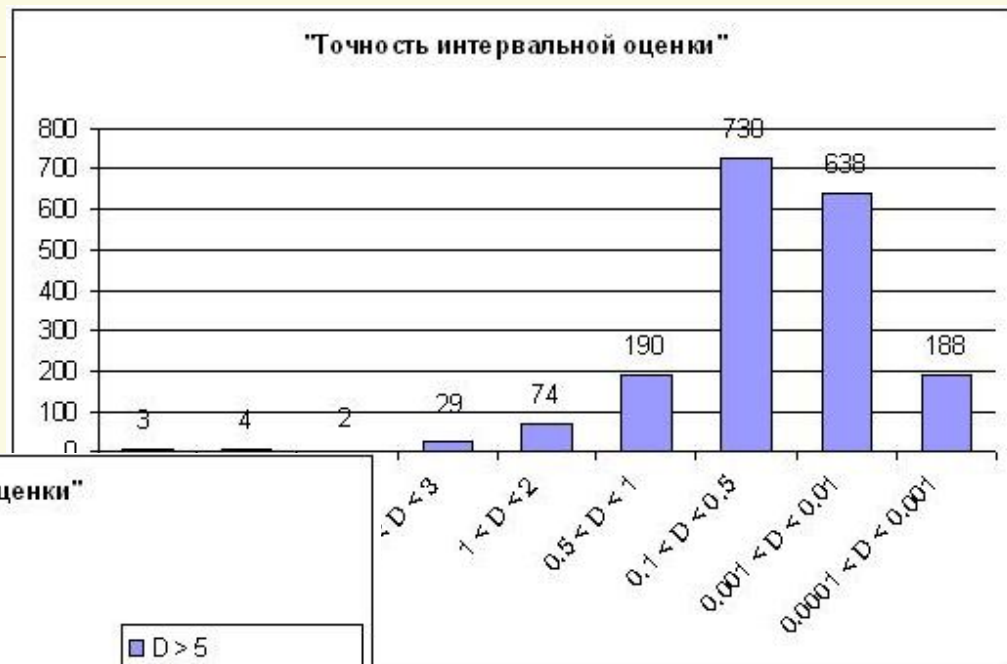
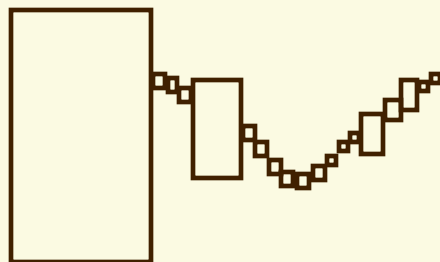
$$F = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + y^2$$

# Случайный интервальный поиск



Распределение ширины брусов

# Случайный интервальный поиск

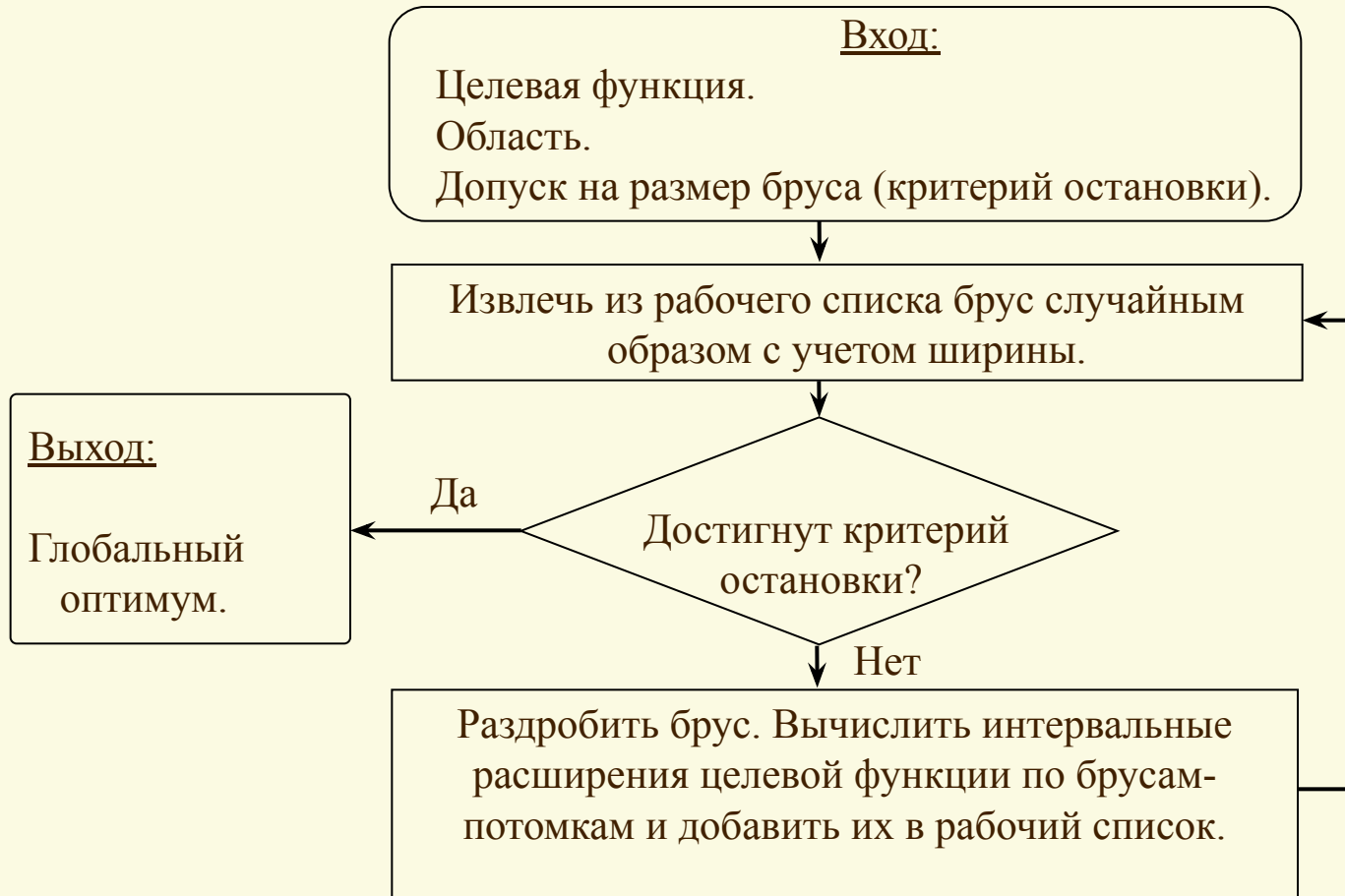


# Повышение эффективности метода

---

- Отбраковка бесперспективных
- Локальные оптимизирующие процедуры
- И т.д.

# Случайный интервальный поиск с приоритетом

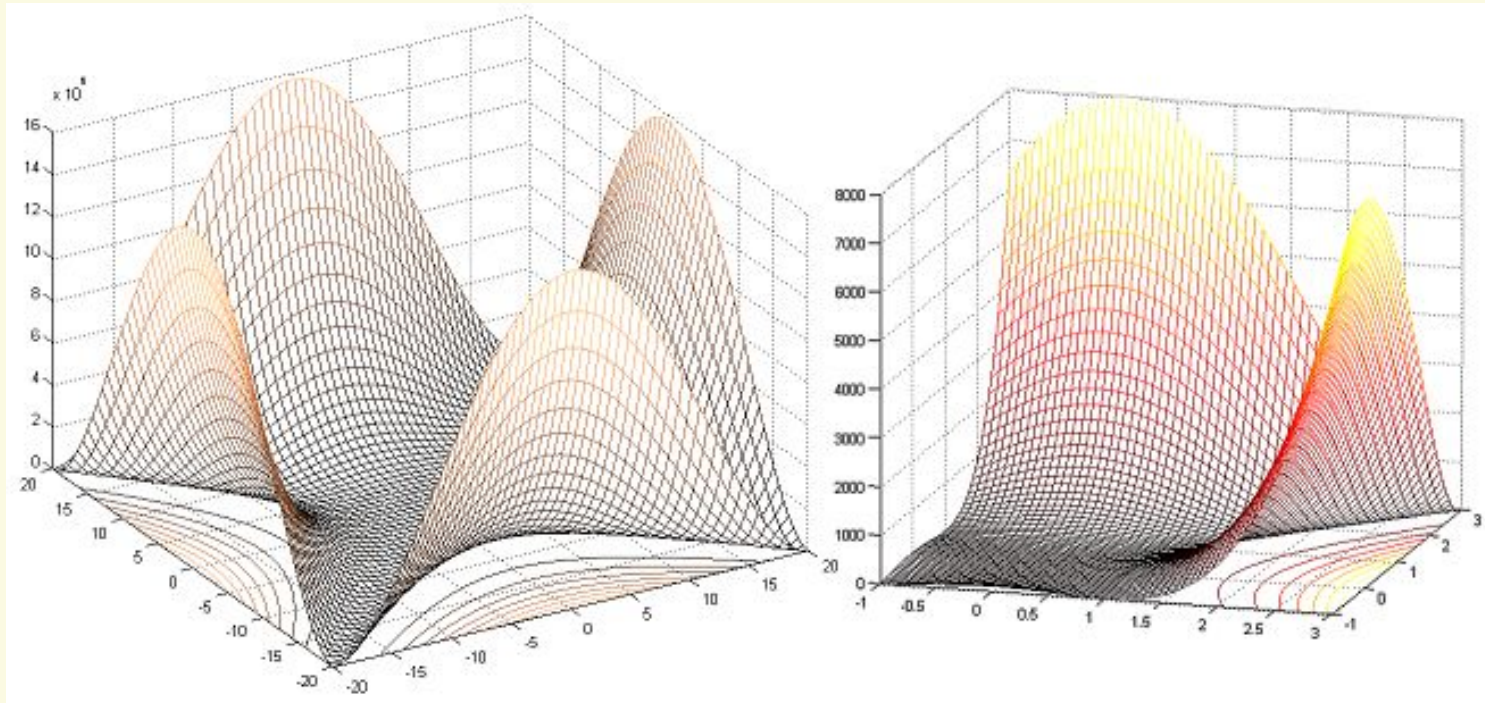


# Параметры исследования

---

- Приоритет по ширине интервала
- Приоритет по ширине интервальной оценки

# Функция «Розенброк4» (RV4)



Общий вид (слева) и поведение вблизи точки глобального минимума (справа).

# Результаты экспериментов

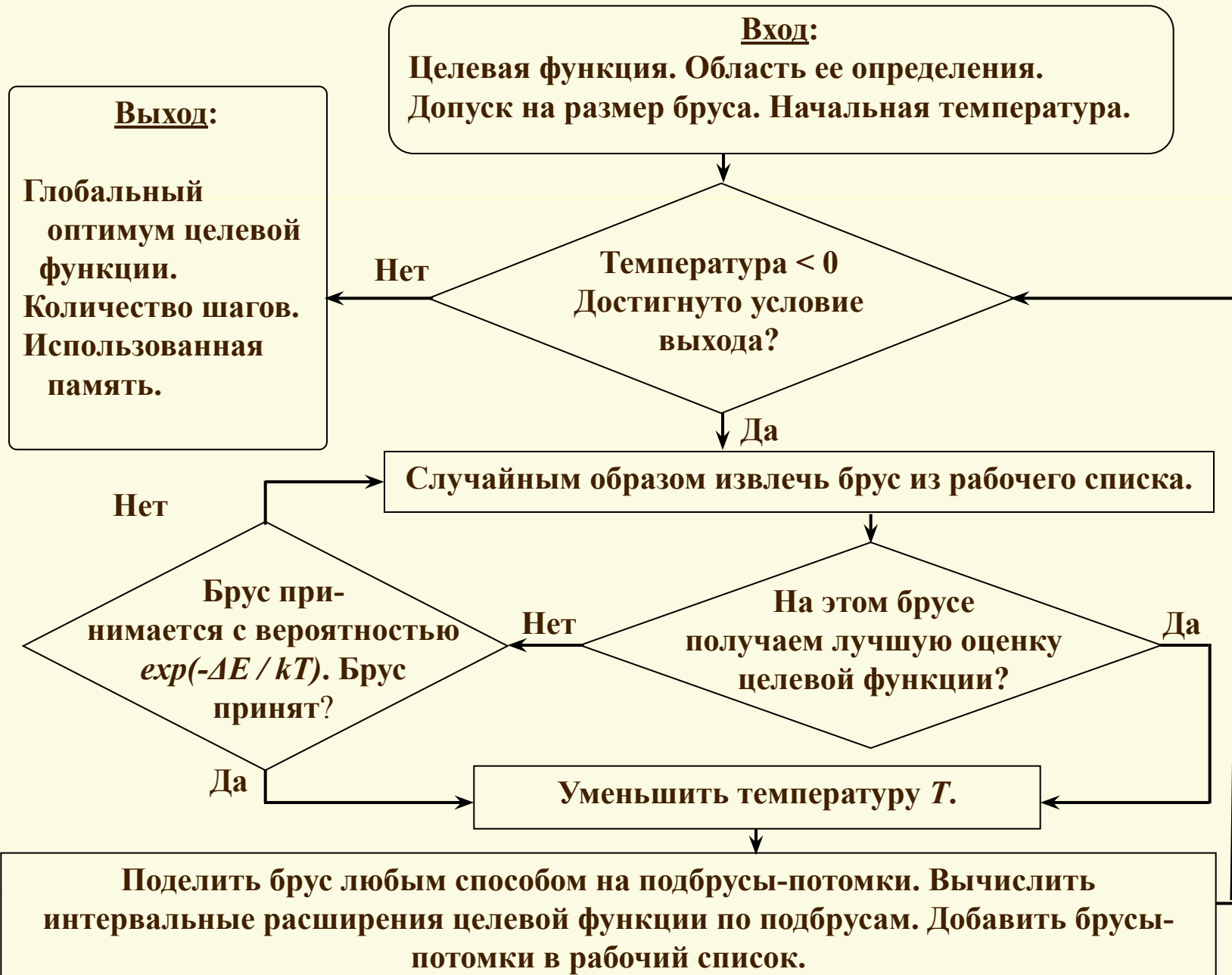
Метод	Время работы
Адаптивное интервальное дробление	100 / 100
Случайный интервальный поиск	$\infty$ / 350
Случайный интервальный поиск с приоритетом (вариант 1)	67 / 272
Случайный интервальный поиск с приоритетом (вариант 2)	20 / 99
Случайный интервальный поиск с приоритетом (вариант 3)	138 / 73



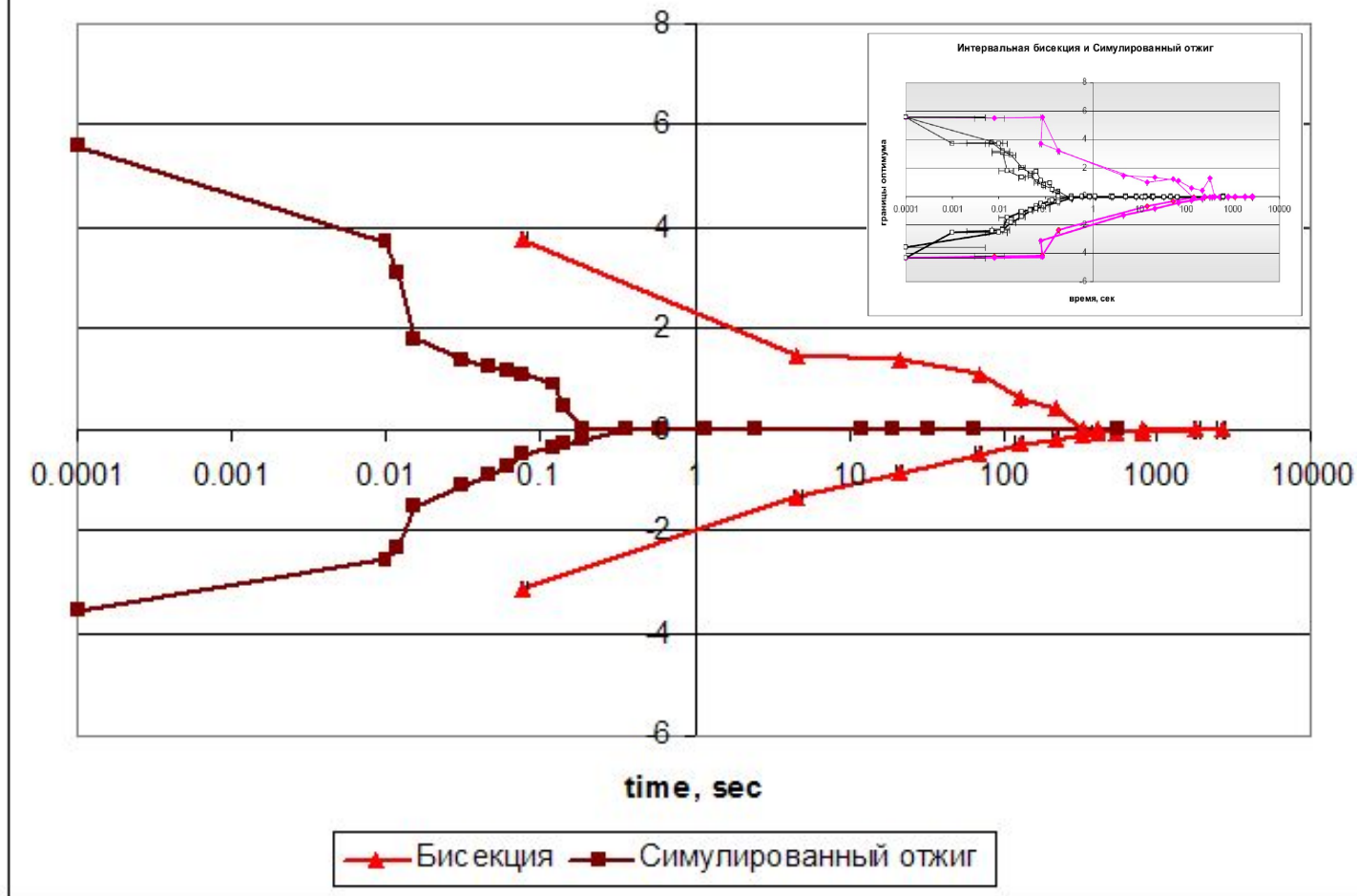
# Интервальный симулированный отжиг

---

- Алгоритм Метрополиса
- Метод  $M(RT)^2$
- Алгоритм «Отпуска»
- Симулированный отжиг.



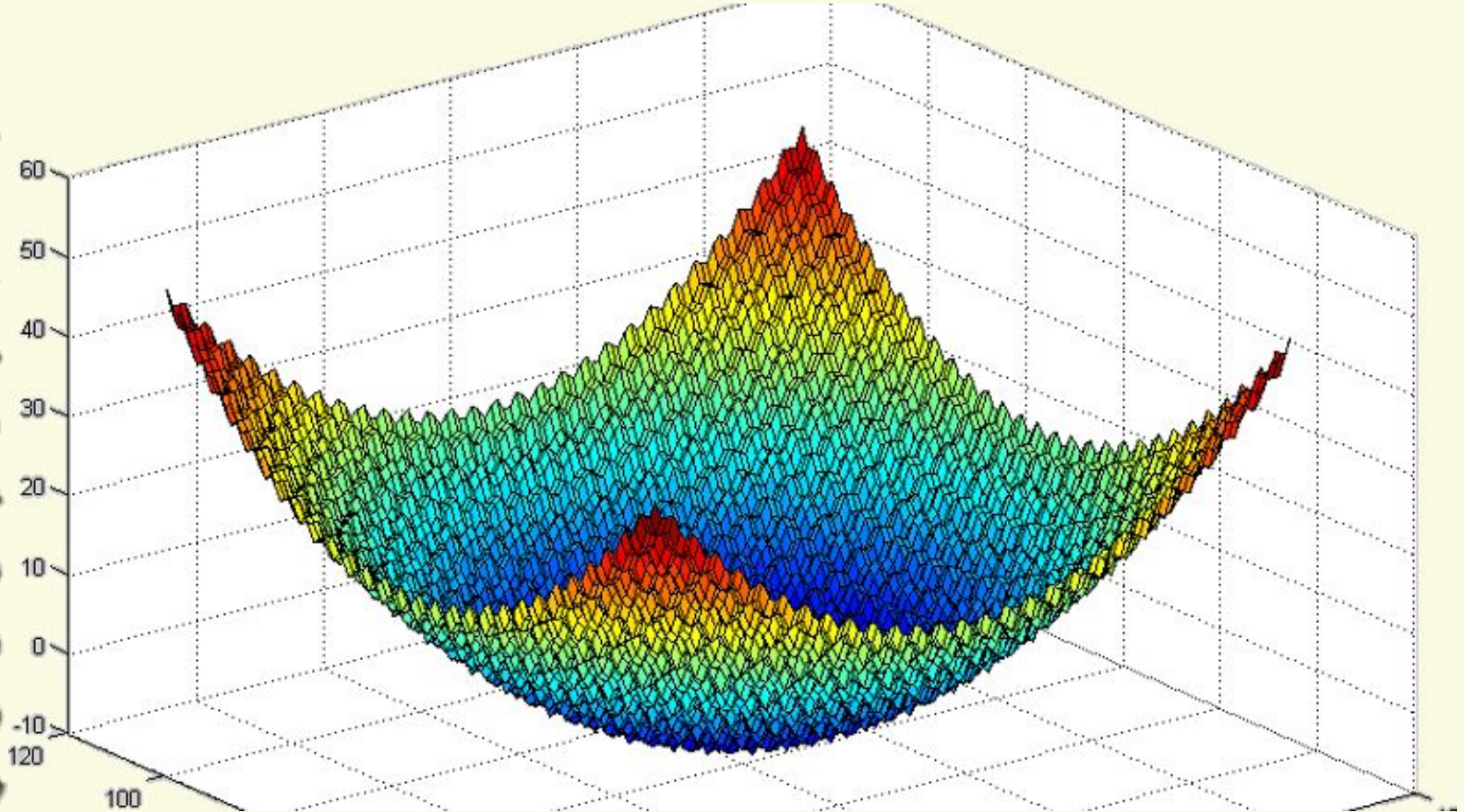
## Бисекция и Симулированный отжиг



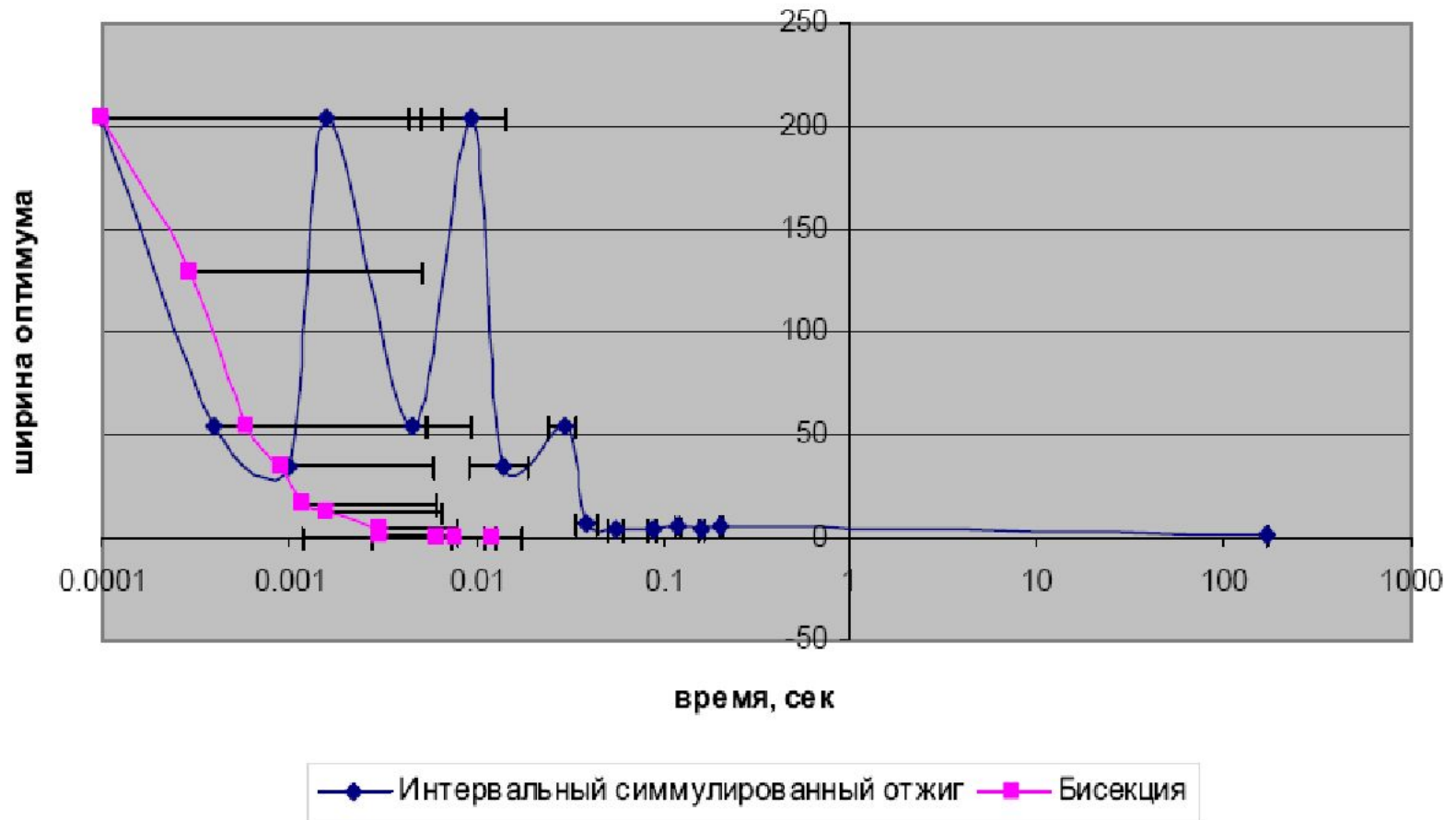
Сравнение адаптивного интервального дробления (бисекции) и интервального симулированного отжига на «шестигорбом верблюде»

Целевая функция Растригина (10<sup>ая</sup>)

$$F = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y)$$



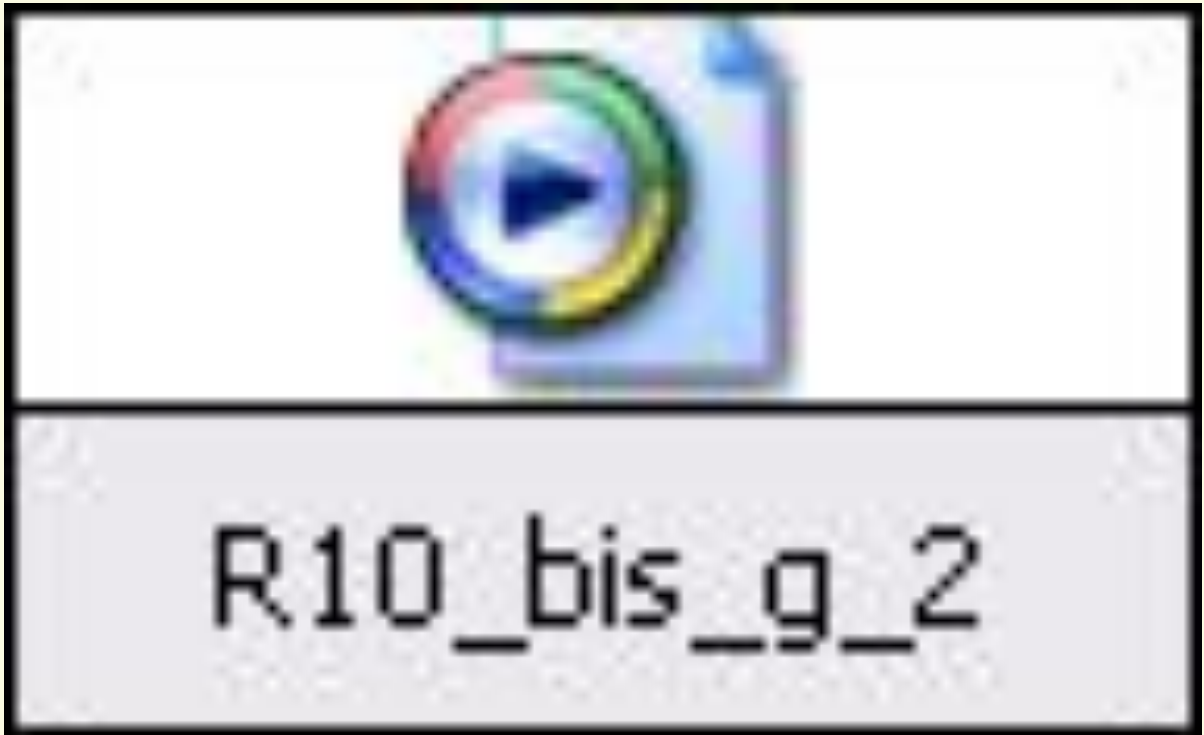
## Бисекция и Интервальный симмулированный отжиг



Сравнение адаптивного интервального дробления (бисекции) и интервального симмулированного отжига на функции  $F = x^2 + y^2 - \cos(18x) - \cos(18y)$

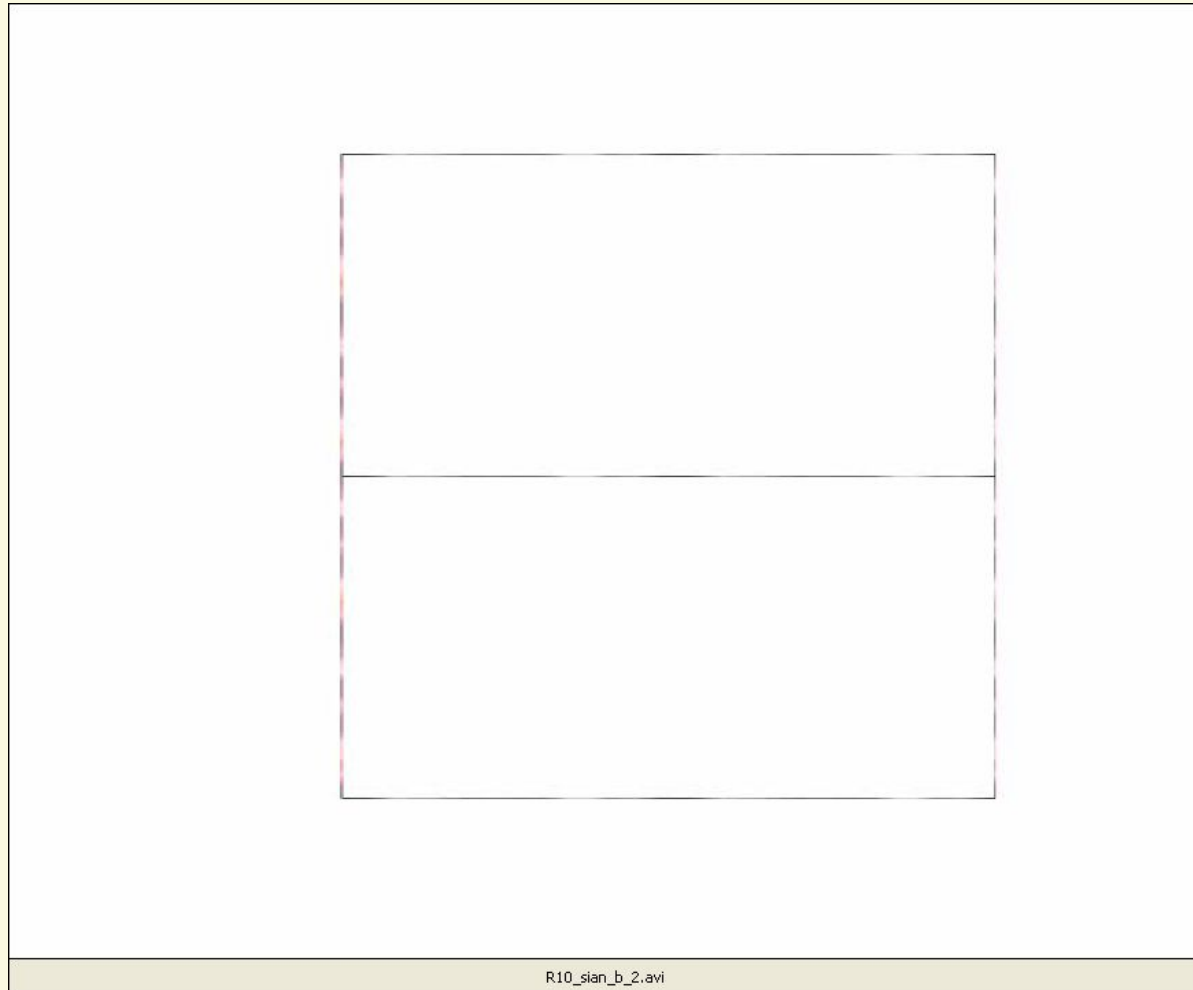
# Алгоритм интервального адаптивного дробления


---



# Интервальный алгоритм симулированного отжига

[ неоптимальные настройки ]



A spiral-bound notebook with a light cream-colored page and a dark brown cover. The spiral binding is on the left side. A thin horizontal line is drawn across the page, just above the text.

# Интервальный генетический алгоритм



# Интервальный генетический алгоритм

---

- Популяция – список брусов
- Благоприятные условия:
  - среда обитания – оценка значения функции на брусе
  - способность к воспроизводству – ширина бруса

# Интервальный генетический алгоритм

Вариативность:

- Максимальное количество потомков
- Минимальное количество потомков
- Сколько объектов, начиная с самого приспособленного, могут оставить потомство.
- Брусы бьются на равные части, либо же в некой пропорции, «разновесные» дети.

Приспособленность:

- Нижняя оценка функции на брусе.
- Ширина интервальной оценки на брусе.
- Размер бруса.

# Интервальный генетический алгоритм

---

Объединенная функция  
приспособленности:

$$F(\mathbf{b}) = \sum_i^n \left( \alpha_i \cdot \text{wid}(b_i) \right) + \beta \cdot \underline{f}(\mathbf{b}) + \gamma \cdot \text{wid}(f(\mathbf{b}))$$

$f(\mathbf{b})$  – интервальная оценка целевой функции  $f$  на брусе  $\mathbf{b}$

$\underline{f}(\mathbf{b})$  – нижняя граница интервальной оценки  
(оценка минимума снизу)

$\text{wid}(f(\mathbf{b}))$  – ширина (точность) интервальной оценки.

# Интервальный генетический алгоритм глобальной оптимизации

---

0. Создать начальную популяцию (произвести несколько дроблений).
1. Вычислить функцию приспособленности по новым подбрусам.
2.  $N$  из наиболее приспособленных брусов с вероятностью  $P_n$  оставляют от  $L_n$  до  $U_n$  потомков.
3.  $M$  из неприспособленных брусов с вероятностью  $P_m$  оставят от  $L_m$  до  $U_m$  потомков.
- 4.\* Подбрусы проверяются на жизнеспособность (применяются критерии отбраковки)
- 5.\* Если критерий отбраковки был улучшен, случается Эпидемия (улучшенные критерии применяются ко всему списку брусов)

# Результаты работы

Метод	Время работы
Адаптивное интервальное дробление	100 / 100
Генетический алгоритм, постоянные коэффициенты	32 - 422 / 72 - 397
Генетический алгоритм, случайные коэффициенты	68 - 112 / ~120
Генетический алгоритм, случайно-адаптивные коэффициенты	~36 / ~100

# Вывод

---

- 1) Отказ от чистого детерминизма традиционных интервальных методов глобальной оптимизации может привести к созданию численных алгоритмов с качественно новыми свойствами, в частности, с улучшенной эффективностью.
- 2) Применение стохастических подходов в интервальных методах глобальной оптимизации оправдано.



# Дополнительная информация

---

# Точность интервальных оценок

