

# Элементы математической ЛОГИКИ





# Высказывание

Объект изучения – *высказывание*.

**Высказывание** – предложение (сообщение) об объективно существующей действительности, содержание которого можно определить как истинное или ложное.

Вопросительные и восклицательные предложения не могут быть высказываниями.

# Высказывания

←

простые

$$5 > 3$$

истина

$$x * x < 0$$

ложь

Значение истинности или ложности простого высказывания определяется **однозначно!**


→

сложные

Получаются путём объединения простых высказываний связками-союзами **И, ИЛИ, НЕ**.

При этом значение истинности сложных высказываний **зависит от** истинности входящих в них простых высказываний и объединяющих их связок

$$(x > 2) \text{ and } (x < -5)$$



**Алгебра логики** (алгебра высказываний, булева алгебра) – раздел математической логики, изучающий строение (форму, структуру) сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.

Простые высказывания называют в алгебре логики **логическими переменными** и обозначают буквами латинского алфавита.

Сложные высказывания называют **логическими функциями** (или логическими выражениями).

Логические переменные и функции определены на множестве двух значений  $\{0,1\}$  или  $\{\text{true}, \text{false}\}$

# Логические операции

1. **Инверсия** - логическое отрицание

$\overline{a}$  not a не a

A	$\neg A$
Л	И
И	Л

2. **Конъюнкция**

- логическое умножение

a и b a  $\wedge$  b a · b a AND b

A	B	A&B
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

### 3. Дизъюнкция (нестрогая)

- логическое сложение

$a$  или  $b$     $a \vee b$     $a$  or  $b$

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A∨B</b>
<b>Л</b>	<b>Л</b>	<b>Л</b>
<b>Л</b>	<b>И</b>	<b>И</b>
<b>И</b>	<b>Л</b>	<b>И</b>
<b>И</b>	<b>И</b>	<b>И</b>



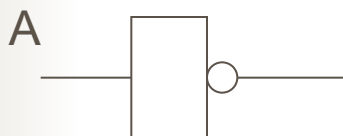
# Комбинационная логическая схема

## **Комбинационной логической схемой**

называется цифровая схема, в которой выходные сигналы определяются только теми сигналами, которые поступают на вход схемы в тот же момент времени.

# Логические элементы

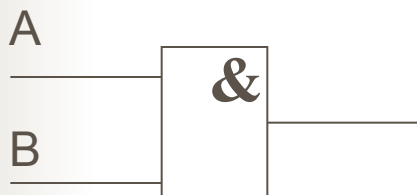
## 1. Инвертор



A	$\neg A$
0	1
1	0

## 2. Конъюнктор

Схема «И»

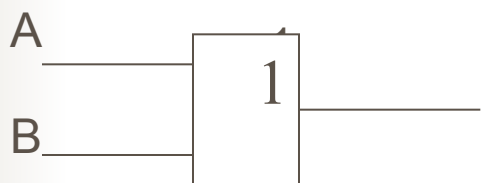


A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1




# Логические элементы

## 3. Дизъюнктор



Схемы «И», «ИЛИ», «НЕ» образуют функционально полную систему, т.е. с помощью этих схем может быть построено любое устройство ЭВМ.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



# Построение функциональных логических схем логических устройств

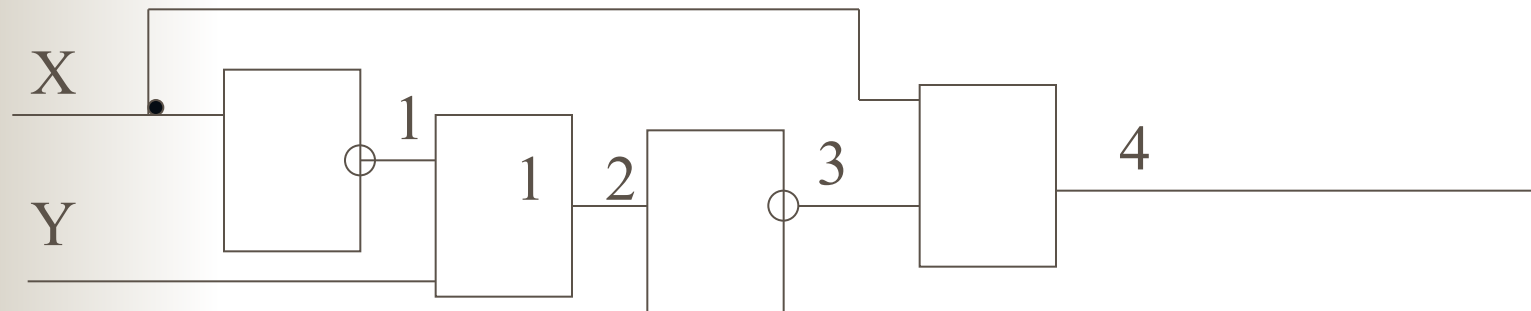
- Цепочка из логических элементов, в которой выходы одних элементов являются входами других, называется *логическим устройством*
- Схема соединения логических элементов, реализующая логическую функцию, называется *функциональной схемой*.
- Formой описания функции, реализуемой логическим устройством, является *структурная формула*.

## Задача 1.

Дана структурная формула:  $F(X, Y) = (\overline{X} \vee Y) \& X$

Постройте соответствующую ей функциональную схему.

*Решение:*



Проверить, что эта функциональная схема соответствует заданной структурной формуле, можно, сравнив таблицы истинности для той и другой.

Таблица истинности для формулы

$$F(X, Y) = \overline{\overline{X} \vee Y} \& X$$

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{X} \vee Y$	$\overline{\overline{X} \vee Y}$	F(X, Y)
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0



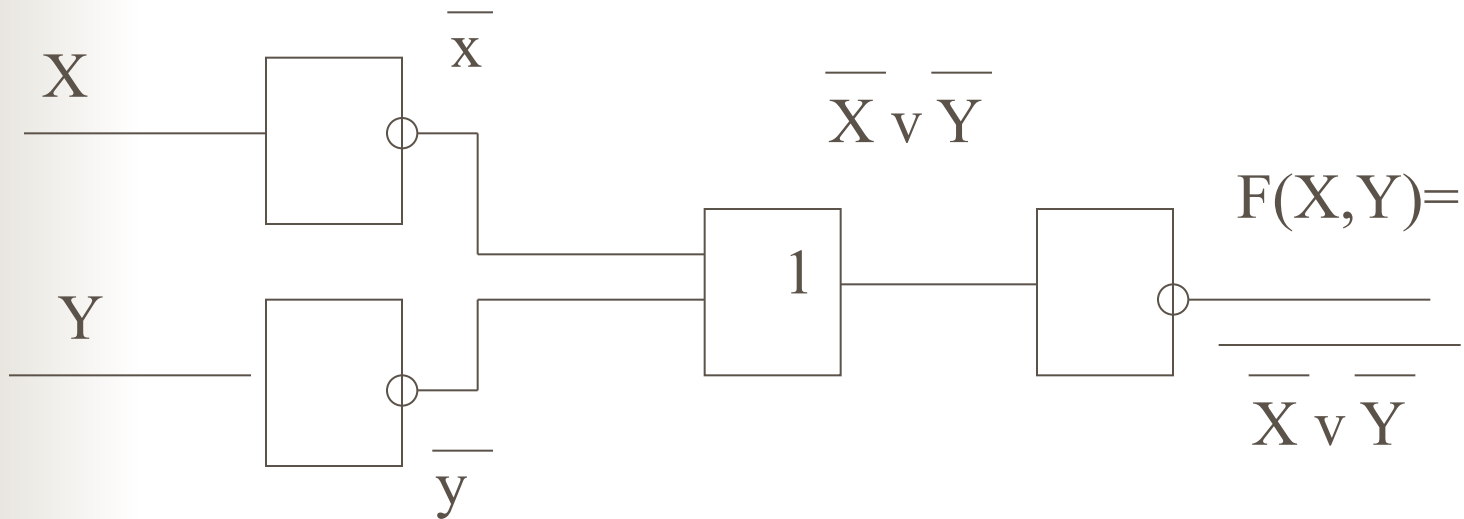
Опишем работу функциональной схемы с помощью таблицы истинности:

X	Y	Выход 1	Выход 2	Выход 3	Выход 4
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0

Совпадение значений последних столбцов двух таблиц свидетельствует о том, что функциональная схема построена верно.

## Задача 2

Определите структурную формулу по заданной функциональной схеме:



# A9 ЕГЭ 2006

Для какого из указанных значений числа  $X$  истинно высказывание:

$$(X > 4) \vee ((X > 1) \rightarrow (X > 4))?$$

- 1)1      2)2    3)3    4)4

## A10

Какое логическое выражение равносильно выражению

$$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg C?$$

- 1)  $(A \wedge \neg B) \vee \neg C$  2)  $\neg A \vee B \vee \neg C$  3)  $A \vee \neg B \vee \neg C$  4)  $(\neg A \wedge B) \vee \neg C$

## A11

Символом  $F$  обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов:  $X, Y, Z$ .

Дан фрагмент таблицы истинности :

Какое выражение соответствует  $F$ ?

- 1)  $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$  2)  $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$  3)  $X \vee Y \vee Z$

4)  $X \wedge Y \wedge Z$

X	Y	Z	F
0	0	0	0
1	1	0	1
1	0	0	1

# ЕГЭ 2007

A9

Для какого числа  $X$  истинно высказывание

$$((X > 3) \vee (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$$

1)1 2)2 3)3 4)4

A10

Какое логическое выражение равносильно выражению  
 $\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$ ?

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$  2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$  3) $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$  4)  
 $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

A11

Символом  $F$  обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов:  $X, Y, Z$ .

Дан фрагмент таблицы истинности выражения  $F$ :

$X$	$Y$	$Z$	$F$
0	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0

Какое выражение соответствует  $F$ ?

1) $\neg X \vee Y \vee \neg Z$  2) $X \wedge Y \wedge \neg Z$  3) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$  4) $X \vee \neg Y \vee Z$



# ЕГЭ 2007

A9

Для какого числа  $X$  истинно высказывание

$$((X > 3) \vee (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$$

1)1 2)2 3)3 4)4

A10

Какое логическое выражение равносильно выражению

$$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C?$$

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$  2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$  3) $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$  4) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

A11

Символом  $F$  обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов:  $X, Y, Z$ .

Дан фрагмент таблицы истинности выражения  $F$ :

$X$	$Y$	$Z$	$F$
0	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0

Какое выражение соответствует  $F$ ?

1) $\neg X \vee Y \vee \neg Z$  2) $X \wedge Y \wedge \neg Z$  3) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$  4) $X \vee \neg Y \vee Z$