

Элементы математической ЛОГИКИ





Высказывание

Объект изучения – *высказывание*.

Высказывание – предложение (сообщение) об объективно существующей действительности, содержание которого можно определить как истинное или ложное.

Вопросительные и восклицательные предложения не могут быть высказываниями.

Высказывания

←

простые

$$5 > 3$$

истина

$$x * x < 0$$

ложь

Значение истинности или ложности простого высказывания определяется **однозначно!**

→

сложные

Получаются путём объединения простых высказываний связками-союзами **И, ИЛИ, НЕ**.

При этом значение истинности сложных высказываний **зависит от** истинности входящих в них простых высказываний и объединяющих их связок

$$(x > 2) \text{ and } (x < -5)$$



Алгебра логики (алгебра высказываний, булева алгебра) – раздел математической логики, изучающий строение (форму, структуру) сложных логических высказываний и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.

Простые высказывания называют в алгебре логики **логическими переменными** и обозначают буквами латинского алфавита.

Сложные высказывания называют **логическими функциями** (или логическими выражениями).

Логические переменные и функции определены на множестве двух значений $\{0,1\}$ или $\{\text{true}, \text{false}\}$

Логические операции

1. **Инверсия** - логическое отрицание

\overline{a} not a не a

A	$\neg A$
Л	И
И	Л

2. **Конъюнкция**

- логическое умножение

a и b a \wedge b a · b a AND b

A	B	A&B
Л	Л	Л
Л	И	Л
И	Л	Л
И	И	И

3. Дизъюнкция (нестрогая)

- логическое сложение

a или b $a \vee b$ a or b

A	B	A∨B
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И



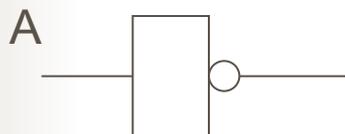
Комбинационная логическая схема

Комбинационной логической схемой

называется цифровая схема, в которой выходные сигналы определяются только теми сигналами, которые поступают на вход схемы в тот же момент времени.

Логические элементы

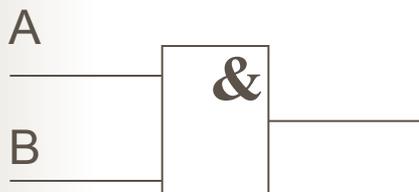
1. Инвертор



A	$\neg A$
0	1
1	0

2. Конъюнктор

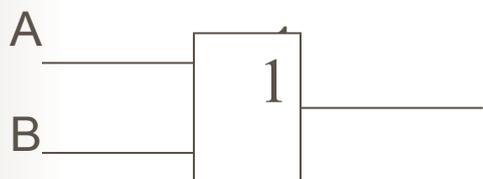
Схема «И»



A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логические элементы

3. Дизъюнктор



Схемы «И», «ИЛИ», «НЕ» образуют функционально полную систему, т.е. с помощью этих схем может быть построено любое устройство ЭВМ.

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Построение функциональных логических схем логических устройств

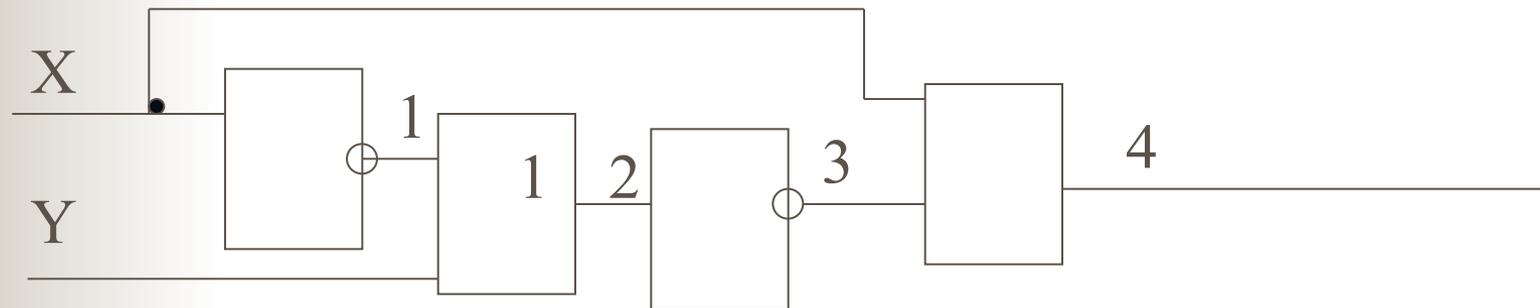
- Цепочка из логических элементов, в которой выходы одних элементов являются входами других, называется *логическим устройством*
- Схема соединения логических элементов, реализующая логическую функцию, называется *функциональной схемой*.
- Formой описания функции, реализуемой логическим устройством, является *структурная формула*.

Задача 1.

Дана структурная формула: $F(X, Y) = (\overline{X \vee Y}) \& X$

Постройте соответствующую ей функциональную схему.

Решение:



Проверить, что эта функциональная схема соответствует заданной структурной формуле, можно, сравнив таблицы истинности для той и другой.

Таблица истинности для формулы

$$F(X, Y) = \overline{(\overline{X} \vee Y)} \& X$$

X	Y	\overline{X}	$\overline{X} \vee Y$	$\overline{\overline{X} \vee Y}$	F(X, Y)
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0



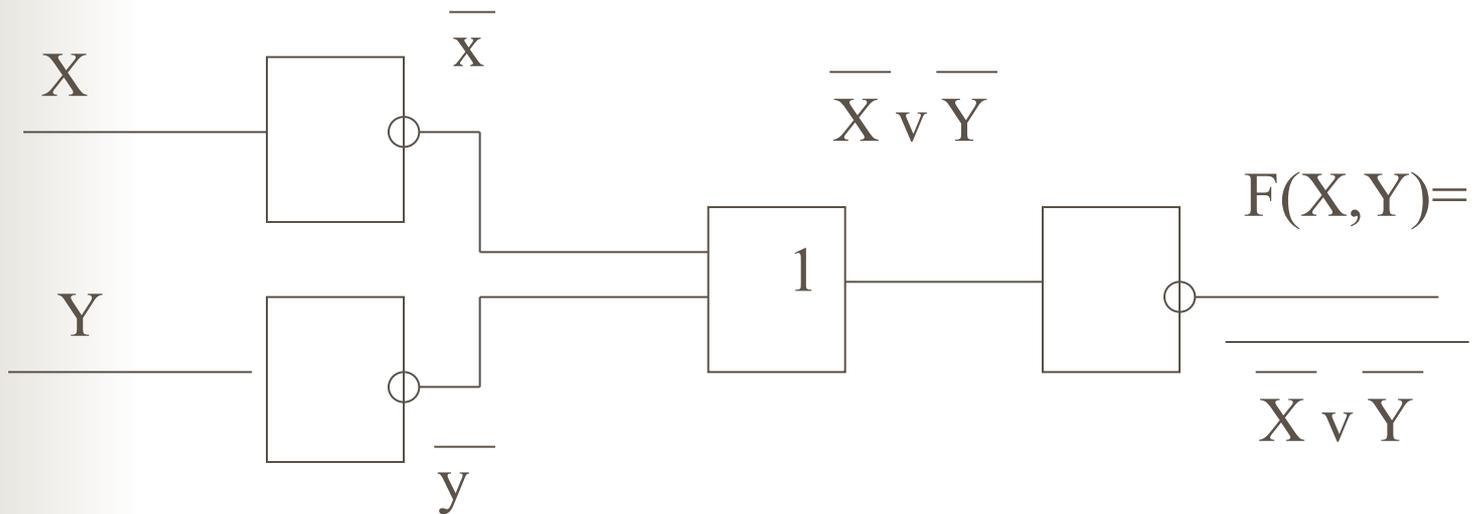
Опишем работу функциональной схемы с помощью таблицы истинности:

X	Y	Выход 1	Выход 2	Выход 3	Выход 4
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0

Совпадение значений последних столбцов двух таблиц свидетельствует о том, что функциональная схема построена верно.

Задача 2

Определите структурную формулу по заданной функциональной схеме:



A9 ЕГЭ 2006

Для какого из указанных значений числа X истинно высказывание:

$$(X > 4) \vee ((X > 1) \rightarrow (X > 4))?$$

- 1)1 2)2 3)3 4)4

A10

Какое логическое выражение равносильно выражению

$$\neg(\neg A \vee B) \vee \neg C?$$

- 1) $(A \wedge \neg B) \vee \neg C$ 2) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 3) $A \vee \neg B \vee \neg C$ 4) $(\neg A \wedge B) \vee \neg C$

A11

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z .

Дан фрагмент таблицы истинности :

Какое выражение соответствует F ?

- 1) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$ 2) $X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ 3) $X \vee Y \vee Z$

4) $X \wedge Y \wedge Z$

X	Y	Z	F
0	0	0	0
1	1	0	1
1	0	0	1

ЕГЭ 2007

A9

Для какого числа X истинно высказывание

$$((X > 3) \vee (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$$

1)1 2)2 3)3 4)4

A10

Какое логическое выражение равносильно выражению

$$\neg(A \wedge B) \wedge \neg C?$$

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$ 3) $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$ 4) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

A11

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z .

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F :

X	Y	Z	F
0	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0

Какое выражение соответствует F ?

1) $\neg X \vee Y \vee \neg Z$ 2) $X \wedge Y \wedge \neg Z$ 3) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$ 4) $X \vee \neg Y \vee Z$

ЕГЭ 2007

A9

Для какого числа X истинно высказывание

$$((X > 3) \vee (X < 3)) \rightarrow (X < 1)$$

1)1 2)2 3)3 4)4

A10

Какое логическое выражение равносильно выражению
 $\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$?

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$ 3) $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$ 4)
 $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

A11

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z .

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F :

X	Y	Z	F
0	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0

Какое выражение соответствует F ?

1) $\neg X \vee Y \vee \neg Z$ 2) $X \wedge Y \wedge \neg Z$ 3) $\neg X \wedge \neg Y \wedge Z$ 4) $X \vee \neg Y \vee Z$