Лекция 11

Дискретное преобразование Фурье

Преобразование Фурье

$$X(e^{jwT}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-jwTn}$$

где:

$x(nT)-$ Дискретный сигнал бесконечной длительности;

$X(e^{jwT})-$ Спектр дискретного сигнала – непрерывная периодическая функция частоты w с периодом равным частоте дискретизации.

Алгоритм вычисления непрерывного спектра $X(e^{jwT})$ конечной последовательности $x(nT)$ на периоде $w_{ä}$ в дискретных точках называется дискретным преобразованием Фурье(ДПФ)

ДПФ периодической последовательности

Периодическую последовательность $x_p(nT)$ с периодом NT

можно представить в виде ряда, если заменить:

1) Непрерывное время дискретным $t \Rightarrow nT$
2) Период по времени t – периодом по времени nT. То есть $T_s \Rightarrow NT$

Период дискретизации по частоте $\Delta\omega$ будет равен $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{NT}$

Представление $x_p(nT)$ в виде ряда нормированном по времени примет вид:

$$x_p(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\Delta\omega nT}, -\infty < n < \infty$$

,где $X(k)$ -коэффициенты Фурье

k -номер коэффициента Фурье

а коэффициент Фурье

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$$

Представим:

1) последовательность $x_p(n)$ В виде бесконечной суммы одного её периода, сдвинутого по оси n на mN , где m=…,-1,0,1,…

2) Бесконечную сумму в виде бесконечного числа конечных сумм из N Слагаемых, сдвинутых по оси k на mN, где m =…,-1,0,1,…

Сделав замены , мы получим:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_p(n+mN) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k+mN) e^{j\frac{2\pi}{N}nk},$$

$$n = 0,1\ldots,(N-1)$$

Откуда, ДПФ для последовательности во временной области:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, n = 0,1,\ldots,(N-1)$$

Взаимосвязь

Взаимосвязь между спектрами периодических аналоговых и дискретных сигналов:

$$X_p(k\Delta\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega + m\frac{2\pi}{T})$$

ДПФ для последовательности в частотной области

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0,1,\ldots,(N-1)$$

Итак…

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) периодической последовательности $x_p(n)$ называется пара взаимно однозначных дискретных рядов Фурье для последовательностей во временной и частотной области:

Прямое преобразование

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0,1,\ldots,(N-1)$$

Обратное преобразование (ОДПФ)

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, n = 0,1,\ldots,(N-1)$$

Где:

$x_p(n), n = 0,1,\ldots,(N-1)$ Один период последовательности во временной области (вещественной или комплексной).

$X_p(k), k = 0,1,\ldots,(N-1)$ Дискретные коэффициенты Фурье- один период последовательности в частотной области.

ДПФ конечной последовательности

- Какое количество точек выбрать?
- Теорема Котельникова
- Суть теоремы Котельникова во временной области
- Замены
- Суть теоремы Котельникова в частотной области

Замены

1) Время заменим на частоту $t \Rightarrow \omega$

2) Ширину конечного спектра $2\omega_в$ на интервале $[-\omega_в ; \omega_в]$

на длительность конечного сигнала T_c

$$2\omega_в \Rightarrow T_c$$

Соответственно, с учетом соотношения между ω и f

$$2 f_в \Rightarrow \frac{T_c}{2\pi}$$

3) Период дискретизации по времени T – на период дискретизации по частоте $\Delta\omega$

$$T = \frac{1}{2 f_в} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi}{T_c}$$

ДПФ конечной последовательности

Для дискретного сигнала $T_c = NT$ получаем

$$\frac{\omega_в}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{T} : \frac{2\pi}{T_c} = \frac{2\pi}{T} : \frac{2\pi}{NT} = N$$

Это нам позволяет определить спектр таким образом:

$$X(e^{jk\Delta\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0,1,\ldots, N-1$$

В нормированном времени:

$$X(e^{jk\Delta\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0,1,\ldots, N-1$$

Итак…

- ДПФ описывает алгоритм вычисления N-точечной последовательности X(k), в частотной области
- ОДПФ алгоритм вычисления N-точечной последовательности x(n) во временной области
- ДПФ справедливо как для периодической, так и для конечной последовательности

Свойства ДПФ

- Периодичность
- Линейность
- Сдвиг(смещение) N-точечного ДПФ

$$W_N^{\pm k_0 n} = e^{\pm j\frac{2\pi}{N}k_0 n}$$

- Сдвиг(задержка) N-точечной последовательности
- Равенство(теорема) Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2$$

- Свойства симметрии

Дополнительные свойства ДПФ

- Круговая(периодическая, циклическая свертка);

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(n-m)x_2(m)$$

- ДПФ произведения периодической последовательности(теорема свертки в частной области);

$$Y(k)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}X_1(k-m)X_2(m)$$

- Линейная(апериодическая) свертка;

$$y(n)=\sum_{m=0}^{L-1}x_1(n-m)x_2(m)$$

- Секционированные свертки.

Конец

- Спасибо за внимание.