



# Лекция II

Дискретное преобразование Фурье

# Преобразование Фурье

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega Tn}$$

где:

$x(nT)$  – Дискретный сигнал бесконечной длительности;

$X(e^{j\omega T})$  – Спектр дискретного сигнала – непрерывная периодическая функция частоты  $\omega$  с периодом равным частоте дискретизации.

Алгоритм вычисления непрерывного спектра  $X(e^{j\omega T})$  конечной последовательности  $x(nT)$  на периоде  $\omega_{\dot{a}}$  в дискретных точках называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ)

# ДПФ периодической последовательности

Периодическую последовательность  $x_p(nT)$  с периодом  $NT$

можно представить в виде ряда, если заменить:

- 1) Непрерывное время дискретным  $t \Rightarrow nT$
- 2) Период по времени  $t$  – периодом по времени  $nT$ . То  $T_s \Rightarrow NT$   
есть

Период дискретизации по частоте  $\Delta\omega$  будет равен  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT}$

Представление  $x_p(nT)$  в виде ряда нормированном по времени примет вид:

$$x_p(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\Delta\omega nT}, \quad -\infty < n < \infty, \text{ где } X(k) \text{ -коэффициенты Фурье}$$

а коэффициент Фурье

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$$

$k$  -номер коэффициента Фурье

Представим:

- 1) последовательность  $x_p(n)$  в виде бесконечной суммы одного её периода, сдвинутого по оси  $n$  на  $mN$ , где  $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$
- 2) Бесконечную сумму в виде бесконечного числа конечных сумм из  $N$  слагаемых, сдвинутых по оси  $k$  на  $mN$ , где  $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Сделав замены, мы получим:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_p(n + mN) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k + mN) e^{j\frac{2\pi}{N}nk},$$

$$n = 0, 1, \dots, (N-1)$$

Откуда, ДПФ для последовательности во временной области:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1)$$

# Взаимосвязь

Взаимосвязь между спектрами периодических аналоговых и дискретных сигналов:

$$X_p(k\Delta\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega + m\frac{2\pi}{T})$$

# ДПФ для последовательности в частотной области

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

# Итак...

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) периодической последовательности  $x_p(n)$  называется пара взаимно однозначных дискретных рядов Фурье для последовательностей во временной и частотной области:

Прямое преобразование

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

Обратное преобразование

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, n = 0, 1, \dots, (N-1) \quad \text{Где:}$$

$x_p(n), n = 0, 1, \dots, (N-1)$  Один период последовательности во временной области (вещественной или комплексной).

$X_p(k), k = 0, 1, \dots, (N-1)$  Дискретные коэффициенты Фурье- один период последовательности в частотной области.

# ДПФ конечной последовательности

- Какое количество точек выбрать?
- Теорема Котельникова
- Суть теоремы Котельникова во временной области
- Замены
- Суть теоремы Котельникова в частотной области



# Замены

1) Время заменим на частоту  $t \Rightarrow \omega$

2) Ширину конечного спектра  $2\omega_g$  на интервале  $[-\omega_g; \omega_g]$

на длительность конечного сигнала  $T_c$

$$2\omega_g \Rightarrow T_c$$

Соответственно, с учетом соотношения между  $\omega$  и  $f$

$$2f_g \Rightarrow \frac{T_c}{2\pi}$$

3) Период дискретизации по времени  $T$  – на период дискретизации по

частоте  $\Delta\omega$

$$T = \frac{1}{2f_g} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi}{T_c}$$

# ДПФ конечной последовательности

Для дискретного сигнала  $T_c = NT$  получаем

$$\frac{\omega_s}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{T} : \frac{2\pi}{T_c} = \frac{2\pi}{T} : \frac{2\pi}{NT} = N$$

Это нам позволяет определить спектр таким образом:

$$X(e^{jk\Delta\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

В нормированном времени:

$$X(e^{jk\Delta\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

## Итак...

- ДПФ описывает алгоритм вычисления  $N$ -точечной последовательности  $X(k)$ , в частотной области
- ОДПФ алгоритм вычисления  $N$ -точечной последовательности  $x(n)$  во временной области
- ДПФ справедливо как для периодической, так и для конечной последовательности

# Свойства ДПФ

- Периодичность
- Линейность
- Сдвиг(смещение) N-точечного ДПФ

$$W_N^{\pm k_0 n} = e^{\pm j \frac{2\pi}{N} k_0 n}$$

- Сдвиг(задержка) N-точечной последовательности
- Равенство(теорема) Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

- Свойства симметрии

# Дополнительные свойства ДПФ

- Круговая(периодическая, циклическая свертка);

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(n-m)x_2(m)$$

- ДПФ произведения периодической последовательности(теорема свертки в частной области);

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_1(k-m)X_2(m)$$

- Линейная(апериодическая) свертка;

$$y(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(n-m)x_2(m)$$

- Секционированные свертки.



# Конец

- Спасибо за внимание.