

## **Глава 2**

# **МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ**

### **2.1. Общая характеристика методов решения систем линейных уравнений**

## 2.2. Метод обратной матрицы. Формула Крамера

Имеем линейную систему уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Введем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ — матрица системы из} \\ \text{коэффициентов при неизвестных,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ — вектор-столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ — вектор-столбец свободных членов.}$$

Системе (2.1) соответствует матричное уравнение

$$AX = B. \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) на базе обратной матрицы имеет вид

$$X = A^{-1}B. \quad (2.3)$$

Другой разновидностью формы решения (2.3) является формула Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

где  $\Delta$  – главный определитель системы (2.1);

1 2 j n – номера столбцов;

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– определитель, полученный путем замены в главном определителе системы ( $\Delta$ ) столбца коэффициентов при неизвестном  $x_j$  столбцом коэффициентов свободных членов ( $B$ ).

## 2.3. Метод Гаусса

Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{aligned} 1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ 2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ 3) & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ 4) & a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Изложим последовательность операций при прямом ходе.

*Первый шаг.* Разделим коэффициенты первого уравнения на  $a_{11}$ , в результате чего оно примет вид

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}. \quad (2.8)$$

Пользуясь уравнением (2.8), можно исключить переменную  $x_1$  из уравнений № 2, 3, 4 системы (2.7). Для этого нужно из уравнения №2 системы вычесть уравнение (2.8), умноженное на  $a_{21}$ , из уравнения №3 системы вычесть уравнение (2.8), умноженное на  $a_{31}$  и т.д. В результате получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} 1) & a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}, \\ 2) & a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}, \\ 3) & a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

*Второй шаг* состоит в исключении  $x_2$  из уравнений № 2, 3 системы (2.9).

$$x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}. \quad (2.11)$$

Используя (2.11), исключаем  $x_2$  из уравнений № 2, 3 системы (2.9) и получаем систему второго порядка:

$$\begin{aligned} 1) \quad & a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ 2) \quad & a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.12)$$



*Третий шаг.* Разделим первое уравнение системы (2.12) на ведущий элемент  $a_{33}^{(2)}$ , что дает

$$x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}. \quad (2.13)$$

С помощью этого уравнения исключим  $x_3$  из второго уравнения системы (2.12) и получим

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}. \quad (2.14)$$

Таким образом, исходную систему (2.7) удалось привести к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 &= b_{15}, \\x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 &= b_{25}, \\x_3 + b_{34}x_4 &= b_{35}, \\a_{44}^{(3)}x_4 &= a_{45}^{(3)}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

*Обратный ход* связан с последовательным переходом от последнего уравнения системы (2.15) к первому, в процессе которого осуществляется непосредственный расчет значений  $x$ :

$$\begin{aligned}x_4 &= a_{45}^{(3)} / a_{44}^{(3)}, \\x_3 &= b_{35} - b_{34}x_4, \\x_2 &= b_{25} - b_{24}x_4 - b_{23}x_3, \\x_1 &= b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2.\end{aligned}\tag{2.16}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Определитель матрицы  $A$  равен произведению «ведущих» элементов в схеме Гаусса:

$$D = \det A = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} a_{44}^{(3)}. \quad (2.22)$$

## 2.4. Метод простой итерации для решения систем линейных уравнений

Имеем линейную систему уравнений с  $n$   
неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Эквивалентная система уравнений:

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n, \\x_2 &= f_2 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n, \\&\dots \\x_n &= f_n + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \dots + c_{n,n-1}x_{n-1},\end{aligned}\tag{2.24}$$

где  $f_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ ;  $c_{ij} = \frac{-a_{ij}}{a_{ii}}$  при  $i \neq j$  и

$$c_{ii} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)\tag{2.25}$$

Итерационный процесс для системы (2.24):

$$x^{(k+1)} = f + cx^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.27)$$

где  $k$  – номер итерации.

Для сходящегося процесса решением является

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} (f + cx^{(k)}). \quad (2.28)$$

Условие сходимости:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.39)$$

т.е. модуль диагонального коэффициента для каждого уравнения больше суммы модулей его недиагональных коэффициентов.

Условие завершения итерационного процесса:

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \varepsilon. \quad (2.44)$$



## 2.5. Метод Зейделя для решения линейных систем

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации.

Считаем, что дана линейная система, приведенная к итерационному виду (2.24):

$$x_i = f_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.62)$$

Полагаем, что найдено  $k$ -е приближение  $x_i^{(k)}$  всех корней. Согласно методу Зейделя,  $(k+1)$ -е приближение корней будет определяться по следующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = f_1 + \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = f_2 + c_{21} x_1^{(k+1)} + c_{22} x_2^{(k)} + c_{23} x_3^{(k)} + \dots + c_{2n} x_n^{(k)},$$

$$x_3^{(k+1)} = f_3 + c_{31} x_1^{(k+1)} + c_{32} x_2^{(k+1)} + c_{33} x_3^{(k)} + \dots + c_{3n} x_n^{(k)},$$

...

$$x_i^{(k+1)} = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n c_{ij} x_j^{(k)},$$

...

$$x_n^{(k+1)} = f_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} x_j^{(k+1)} + c_{nn} x_n^{(k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

(2.63)

Метод Зейделя обеспечивает, как правило, лучшую сходимость, чем метод простой итерации.