Глава 2
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Общая характеристика методов решения систем линейных уравнений

2.2. Метод обратной матрицы. Формула Крамера

Имеем линейную систему уравнений с *n* неизвестными:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\cdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n .
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

Введем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы из коэффициентов при неизвестных,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец свободных членов.

Системе (2.1) соответствует матричное уравнение

$$AX = B. \qquad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) на базе обратной матрицы имеет вид

$$X = A^{-1}B. \qquad (2.3)$$

Другой разновидностью формы решения (2.3) является формула Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,, \qquad (2.5)$$

где Δ – главный определитель системы (2.1);

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & n \end{array} \text{ – номера столбцов;}$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– определитель, полученный путем замены в главном определителе системы (Δ) столбца коэффициентов при неизвестном x_j столбцом коэффициентов свободных членов (B).

2.3. Метод Гаусса

Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$
\begin{aligned}
&1)\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15},\\
&2)\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25},\\
&3)\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35},\\
&4)\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}.
\end{aligned}
\qquad (2.7)
$$

Изложим последовательность операций при прямом ходе.

Первый шаг. Разделим коэффициенты первого уравнения на a_{11}, в результате чего оно примет вид

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}. \qquad (2.8)$$

Пользуясь уравнением (2.8), можно исключить Переменную x_1 из уравнений № 2, 3, 4 системы (2.7). Для этого нужно из уравнения №2 системы вычесть уравнение (2.8), умноженное на a_{21}, из уравнения №3 системы вычесть уравнения (2.8), умноженное на a_{31} и т.д. В результате получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned}
&1)\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)},\\
&2)\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}, \qquad (2.9)\\
&3)\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Второй шаг состоит в исключении x_2 из уравнений № 2, 3 системы (2.9).

$$x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}. \tag{2.11}$$

Используя (2.11), исключаем x_2 из уравнений № 2, 3 системы (2.9) и получаем систему второго порядка:

$$\begin{aligned} &1)\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ &2)\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Третий шаг. Разделим первое уравнение системы (2.12) на ведущий элемент $a_{33}^{(2)}$, что дает

$$x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}. \tag{2.13}$$

С помощью этого уравнения исключим x_3 из второго уравнения системы (2.12) и получим

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}. \tag{2.14}$$

Таким образом, исходную систему (2.7) удалось привести к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 &= b_{15}, \\ x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 &= b_{25}, \\ x_3 + b_{34}x_4 &= b_{35}, \\ a_{44}^{(3)}x_4 &= a_{45}^{(3)}. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Обратный ход связан с последовательным переходом от последнего уравнения системы (2.15) к первому, в процессе которого осуществляется непосредственный расчет значений x:

$$\begin{aligned} x_4 &= a_{45}^{(3)} \big/ a_{44}^{(3)}\,, \\ x_3 &= b_{35} - b_{34}x_4\,, \\ x_2 &= b_{25} - b_{24}x_4 - b_{23}x_3\,, \\ x_1 &= b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix}. \qquad (2.21)$$

Определитель матрицы A равен произведению «ведущих» элементов в схеме Гаусса:

$$D = \det A = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} a_{44}^{(3)}. \qquad (2.22)$$

2.4. Метод простой итерации для решения систем линейных уравнений

Имеем линейную систему уравнений с n неизвестными:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}
\qquad (2.23)
$$

Эквивалентная система уравнений:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n\,, \\
x_2 &= f_2 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n\,, \\
&\ldots \\
x_n &= f_n + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \ldots + c_{n,n-1}x_{n-1}\,,
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

где $f_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$; $c_{ij} = \dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$ и

$$c_{ii} = 0\left(i, j = 1, 2, \ldots, n\right) \tag{2.25}$$

Итерационный процесс для системы (2.24):

$$x^{(k+1)} = f + cx^{(k)} \quad \left(k = 0,1,2,...\right), \tag{2.27}$$

где k – номер итерации.

Для сходящегося процесса решением является

$$\overset{*}{x} = \lim_{k \to \infty} \left(f + cx^{(k)} \right). \tag{2.28}$$

Условие сходимости:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{i \neq j} \left|a_{ij}\right| \quad \left(i, j = 1, 2, \ldots, n\right), \qquad (2.39)$$

т.е. модуль диагонального коэффициента для каждого уравнения больше суммы модулей его недиагональных коэффициентов.

Условие завершения итерационного процесса:

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \leq \varepsilon. \qquad (2.44)$$

2.5. Метод Зейделя для решения линейных систем

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации.

Считаем, что дана линейная система, приведенная к итерационному виду (2.24):

$$x_i = f_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right). \qquad (2.62)$$

Полагаем, что найдено k-е приближение $x_i^{(k)}$ всех корней. Согласно методу Зейделя, (k+1)-е приближение корней будет определяться по следующим формулам:

$$
\begin{gathered}
x_1^{(k+1)} = f_1 + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)}, \\
x_2^{(k+1)} = f_2 + c_{21} x_1^{(k+1)} + c_{22} x_2^{(k)} + c_{23} x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n} x_n^{(k)}, \\
x_3^{(k+1)} = f_3 + c_{31} x_1^{(k+1)} + c_{32} x_2^{(k+1)} + c_{33} x_3^{(k)} + \ldots + c_{3n} x_n^{(k)}, \\
\ldots \\
x_i^{(k+1)} = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k)}, \\
\ldots \\
x_n^{(k+1)} = f_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + c_{nn} x_n^{(k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).
\end{gathered}
\tag{2.63}
$$

Метод Зейделя обеспечивает, как правило, лучшую сходимость, чем метод простой итерации.