# Глава 2
# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## 2.1. Общая характеристика методов решения систем линейных уравнений

## 2.2. Метод обратной матрицы. Формула Крамера

Имеем линейную систему уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n . \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Введем матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица системы из коэффициентов при неизвестных,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец свободных членов.

Системе (2.1) соответствует матричное уравнение

$$AX = B\,. \qquad (2.2)$$

Решение уравнения (2.2) на базе обратной матрицы имеет вид

$$X = A^{-1}B\,. \qquad (2.3)$$

Другой разновидностью формы решения (2.3) является формула Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2.5)$$

где $\Delta$ – главный определитель системы (2.1);

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & & j & & n \end{array}$$ – номера столбцов;

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– определитель, полученный путем замены в главном определителе системы ($\Delta$) столбца коэффициентов при неизвестном $x_j$ столбцом коэффициентов свободных членов ($B$).

## 2.3. Метод Гаусса

Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$
\begin{aligned}
&1)\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\
&2)\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\
&3)\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\
&4)\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}.
\end{aligned}
\qquad (2.7)
$$

Изложим последовательность операций при прямом ходе.

*Первый шаг.* Разделим коэффициенты первого уравнения на $a_{11}$, в результате чего оно примет вид

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}. \qquad (2.8)$$

Пользуясь уравнением (2.8), можно исключить Переменную $x_1$ из уравнений № 2, 3, 4 системы (2.7). Для этого нужно из уравнения №2 системы вычесть уравнение (2.8), умноженное на $a_{21}$, из уравнения №3 системы вычесть уравнения (2.8), умноженное на $a_{31}$ и т.д. В результате получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} &1)\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}, \\ &2)\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}, \\ &3)\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

*Второй шаг* состоит в исключении $x_2$ из уравнений № 2, 3 системы (2.9).

$$x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = b_{25}. \qquad (2.11)$$

Используя (2.11), исключаем $x_2$ из уравнений № 2, 3 системы (2.9) и получаем систему второго порядка:

$$\begin{aligned} &1)\ a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ &2)\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)}. \end{aligned} \qquad (2.12)$$

*Третий шаг.* Разделим первое уравнение системы (2.12) на ведущий элемент $a_{33}^{(2)}$, что дает

$$x_3 + b_{34}x_4 = b_{35}. \qquad (2.13)$$

С помощью этого уравнения исключим $x_3$ из второго уравнения системы (2.12) и получим

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)}. \qquad (2.14)$$

Таким образом, исходную систему (2.7) удалось привести к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 &= b_{15}, \\ x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 &= b_{25}, \\ x_3 + b_{34}x_4 &= b_{35}, \\ a_{44}^{(3)}x_4 &= a_{45}^{(3)}. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

*Обратный ход* связан с последовательным переходом от последнего уравнения системы (2.15) к первому, в процессе которого осуществляется непосредственный расчет значений $x$:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= a_{45}^{(3)} \big/ a_{44}^{(3)}\,, \\
x_3 &= b_{35} - b_{34}x_4\,, \\
x_2 &= b_{25} - b_{24}x_4 - b_{23}x_3\,, \\
x_1 &= b_{15} - b_{14}x_4 - b_{13}x_3 - b_{12}x_2\,.
\end{aligned}
\qquad (2.16)
$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ & & & a_{44}^{(3)} \end{pmatrix}. \qquad (2.21)$$

Определитель матрицы $A$ равен произведению «ведущих» элементов в схеме Гаусса:

$$D = \det A = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} a_{44}^{(3)}. \qquad (2.22)$$

# 2.4. Метод простой итерации для решения систем линейных уравнений

Имеем линейную систему уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \qquad (2.23)$$

Эквивалентная система уравнений:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n\,, \\
x_2 &= f_2 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n\,, \\
&\ldots \\
x_n &= f_n + c_{n2}x_2 + c_{n3}x_3 + \ldots + c_{n,n-1}x_{n-1}\,,
\end{aligned}
\qquad (2.24)
$$

где $f_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$; $c_{ij} = \dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$ и

$c_{ii} = 0\left(i, j = 1, 2, \ldots, n\right)$ (2.25)

Итерационный процесс для системы (2.24):

$$x^{(k+1)} = f + cx^{(k)} \quad \left(k = 0,1,2,...\right), \qquad (2.27)$$

где $k$ – номер итерации.

Для сходящегося процесса решением является

$$\overset{*}{x} = \lim_{k\to\infty}\left(f + cx^{(k)}\right). \qquad (2.28)$$

Условие сходимости:

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{i \neq j} \left|a_{ij}\right| \quad \left(i, j = 1, 2, ..., n\right), \qquad (2.39)$$

т.е. модуль диагонального коэффициента для каждого уравнения больше суммы модулей его недиагональных коэффициентов.

Условие завершения итерационного процесса:

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \leq \varepsilon. \qquad (2.44)$$

## 2.5. Метод Зейделя для решения линейных систем

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода простой итерации.

Считаем, что дана линейная система, приведенная к итерационному виду (2.24):

$$x_i = f_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right). \qquad (2.62)$$

Полагаем, что найдено $k$-е приближение $x_i^{(k)}$ всех корней. Согласно методу Зейделя, ($k$+1)-е приближение корней будет определяться по следующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = f_1 + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = f_2 + c_{21} x_1^{(k+1)} + c_{22} x_2^{(k)} + c_{23} x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n} x_n^{(k)},$$

$$x_3^{(k+1)} = f_3 + c_{31} x_1^{(k+1)} + c_{32} x_2^{(k+1)} + c_{33} x_3^{(k)} + \ldots + c_{3n} x_n^{(k)},$$

$$\ldots \qquad (2.63)$$

$$x_i^{(k+1)} = f_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} c_{ij} x_j^{(k)},$$

$$\ldots$$

$$x_n^{(k+1)} = f_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_{ij} x_j^{(k+1)} + c_{nn} x_n^{(k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Метод Зейделя обеспечивает, как правило, лучшую сходимость, чем метод простой итерации.