Об энергетическом цикле ветровых волн на поверхности океана

Г.С. Голицын
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН
Москва 119017

…………………ласковая муза,
…………………………………..
Как часто по брегам Тавриды
Она меня во мгле ночной
Водила слушать шум морской,
Немолчный шепот Нереиды,
Глубокий, вечный хор валов,
Хвалебный гимн Отцу миров.

Евгений Онегин. Гл. VIII, стр. IV

Ветер возникает вследствие неравномерного нагрева солнечной радиацией сферической атмосферы планеты. Диссипация кинетической энергии ветра происходит внутри атмосферы из-за турбулентности и путём трения о поверхность суши и воды.

Среднее по глобусу поступление энергии Солнца равно

$$q = \frac{1}{n} q_{\odot} \left(1 - A\right) = \frac{1}{4} 1365 \left(1 - 0.3\right) = 239$$ Вт/м^2 Вт/м^2

В среднем скорость генерации ветра G равна скорости её диссипации D.

Х. Свердруп (1917) $D = 2.55$ Вт/м^2

А. Оорт (1963) $D = 2.3$ Вт/м^2 Э. Лоренц (1967, 1970)

КПД по ветру $D / q \cong 1\%$

Диссипация в пограничном слое:

$$D = \tau U = \rho_a \langle u'w' \rangle U = \rho_a u_*^2 U = \rho_a c_D U^3 \quad (1)$$

где $U = U(z = 10$ м), $\rho_a = 1.23$ кг/м^3 при $\langle T_s \rangle = 15^\circ$ С, $c_D = u_*^2 / U_{10}^2$

Поток импульса от атмосферы к воде

$$q_i = \tau = \rho_a u_*^2 = c_D \rho_a U_{10}^2 \quad (2)$$

Приток энергии ветра к поверхности

$$q_e = D = \tau U_{10} = \rho u_*^2 U_{10} = c_D \rho_a U_{10}^3 \quad (3)$$

Величина $\tau = \rho_a \langle u'w' \rangle$ измеряется напрямую (И.А. Репина и сейчас у нас), либо извлекается из вертикальных профилей ветра и при стратификациях, близких к нейтральной, когда масштаб Обухова

$$L_O = u_*^3 / \alpha g f' \gg 10 \text{ м}, \qquad u_* = u_{10} / 28$$

что соответствует $c_D = (1/28)^2 = 1.3 \cdot 10^{-3}$ Однако $c_D = c_D(U_{10}, \xi), \ \ \xi = z / L_0.$

С ростом неустойчивости, т.е. при конвекции (Kahma&Calcoen, JGR 1992, Badulin et al, FM 2007) и с ростом ветра сопротивление растёт, т.е. обмен импульсом и энергией усиливается.

Badulin, Babanin, Zakharov, Resio, JFM 590, 339, 2007:

$$\frac{\varepsilon\omega^4}{g^2} = \alpha_{ss}\left(\frac{\omega^3 d\varepsilon/dt}{g^2}\right)^{1/3}, \quad \alpha_{ss} = 0.55 \pm 0.25, \qquad (4)$$

или, в 2008 0.7 ± 0.2

$$\varepsilon = E/\rho_w g, \qquad E = \frac{1}{4}\rho_w g h_s^2 \qquad (5)$$

- полная энергия волны на единицу площади, h_s - существенная высота волны,

$\approx h_{\max}/4$; ρ_w - плотность воды.

Тоба (1972):

$$h_s = B\left(g u_*\right)^{1/2} T_s^{3/2}! \qquad (6) \quad B = 0.062.$$

Из (4) – (6) получаем

$$T = \varepsilon^{1/3} h^{2/3}, \quad \varepsilon = B^2 g u_*$$

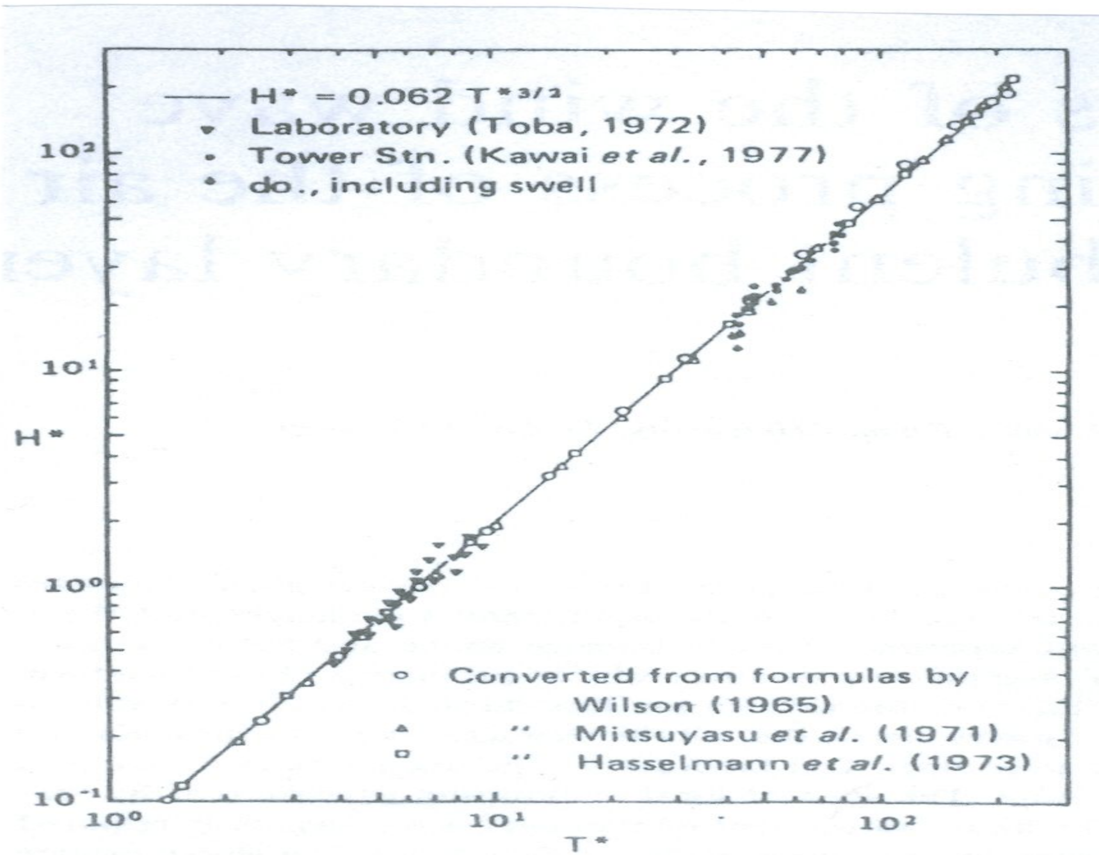
- Китайгородский 1962, КО41.

$$\frac{dE}{dt} = 1.3\rho_a u_*^3 \left(\alpha_{ss}\right)^{-2} = 1.3\rho_a c_D^{3/2} U_{10}^3 \left(\alpha_{ss}\right)^{-3}. \qquad (7)$$

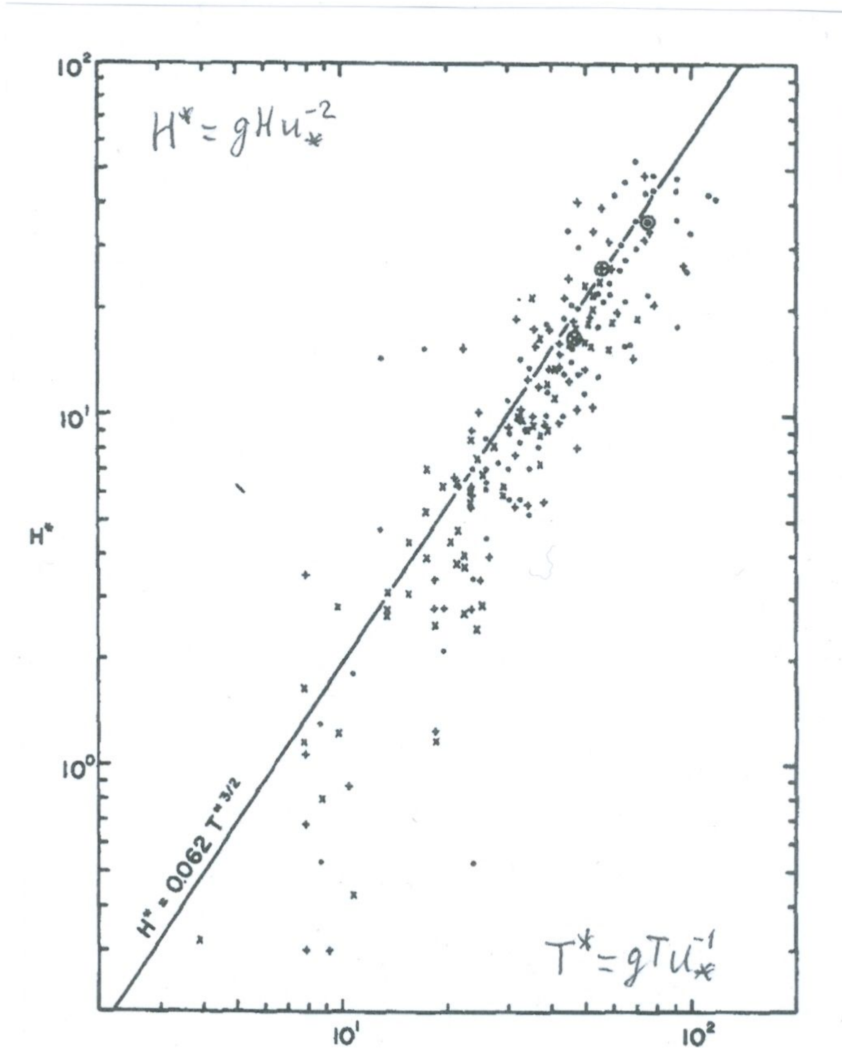
КПД по волнам:

$$\eta = \frac{1}{D}\frac{dE}{dt} = 1.3\sqrt{c_D^*}, \qquad c_D^* = c_D \alpha_{ss}^{-2}. \qquad (8)$$

Закон 3/2, Тоба 1972



$$h_s = 0.062\left(gu_*\right)^{1/2} T_s^{3/2}, h_s = 0.98\left(gu_*\right)^{1/2} \omega_s^{-3/2} \approx \varepsilon\omega_s^{-3/2}$$



Соотношение между произвольными частотами и высотами соответствующих гармоник, Тоба 1978

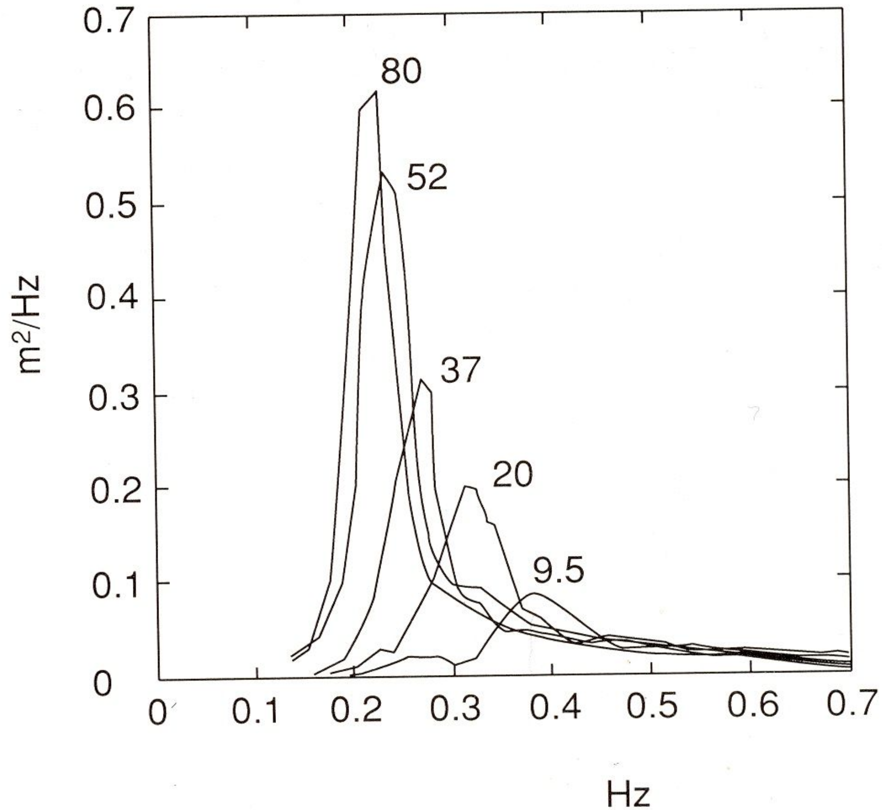
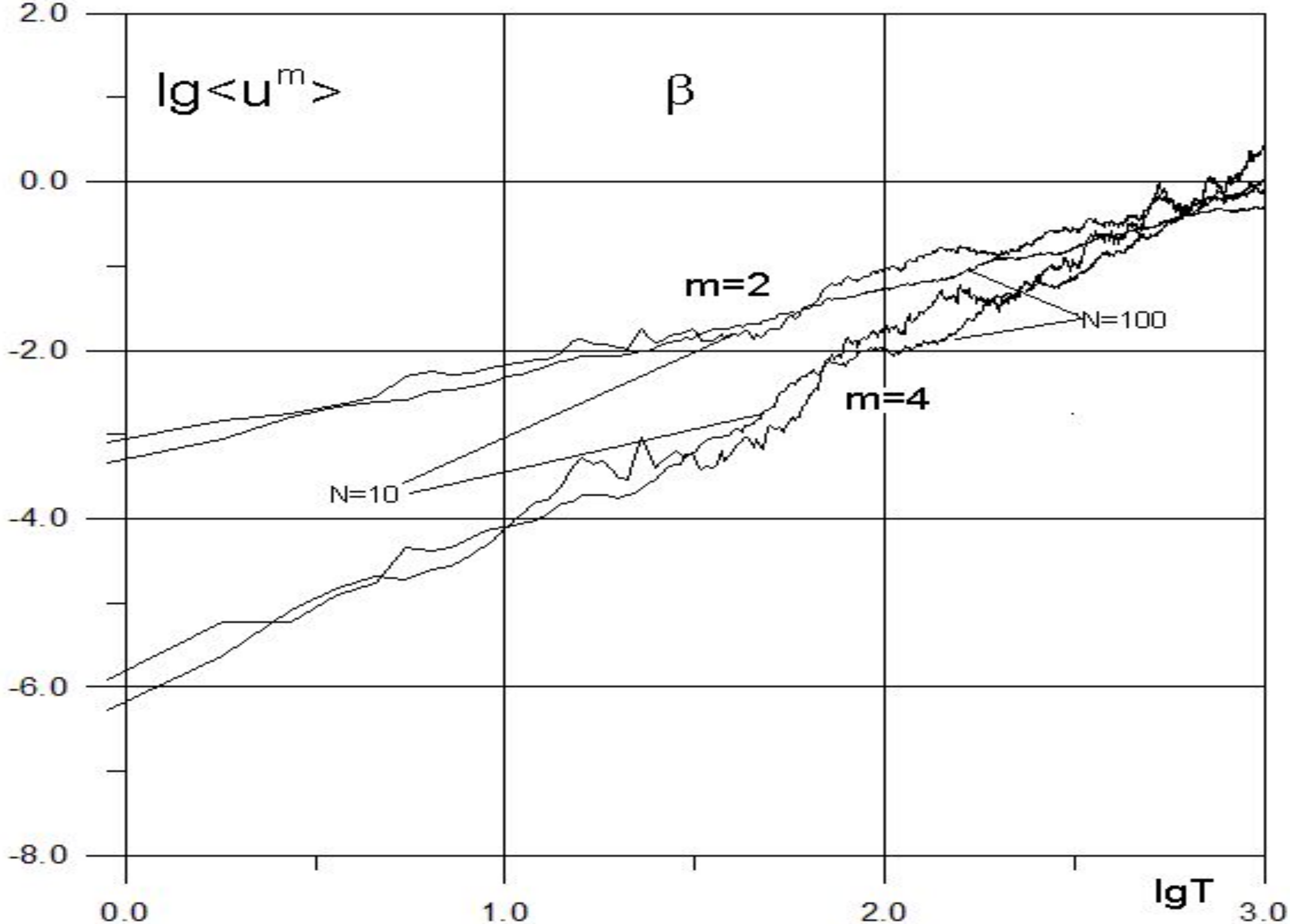
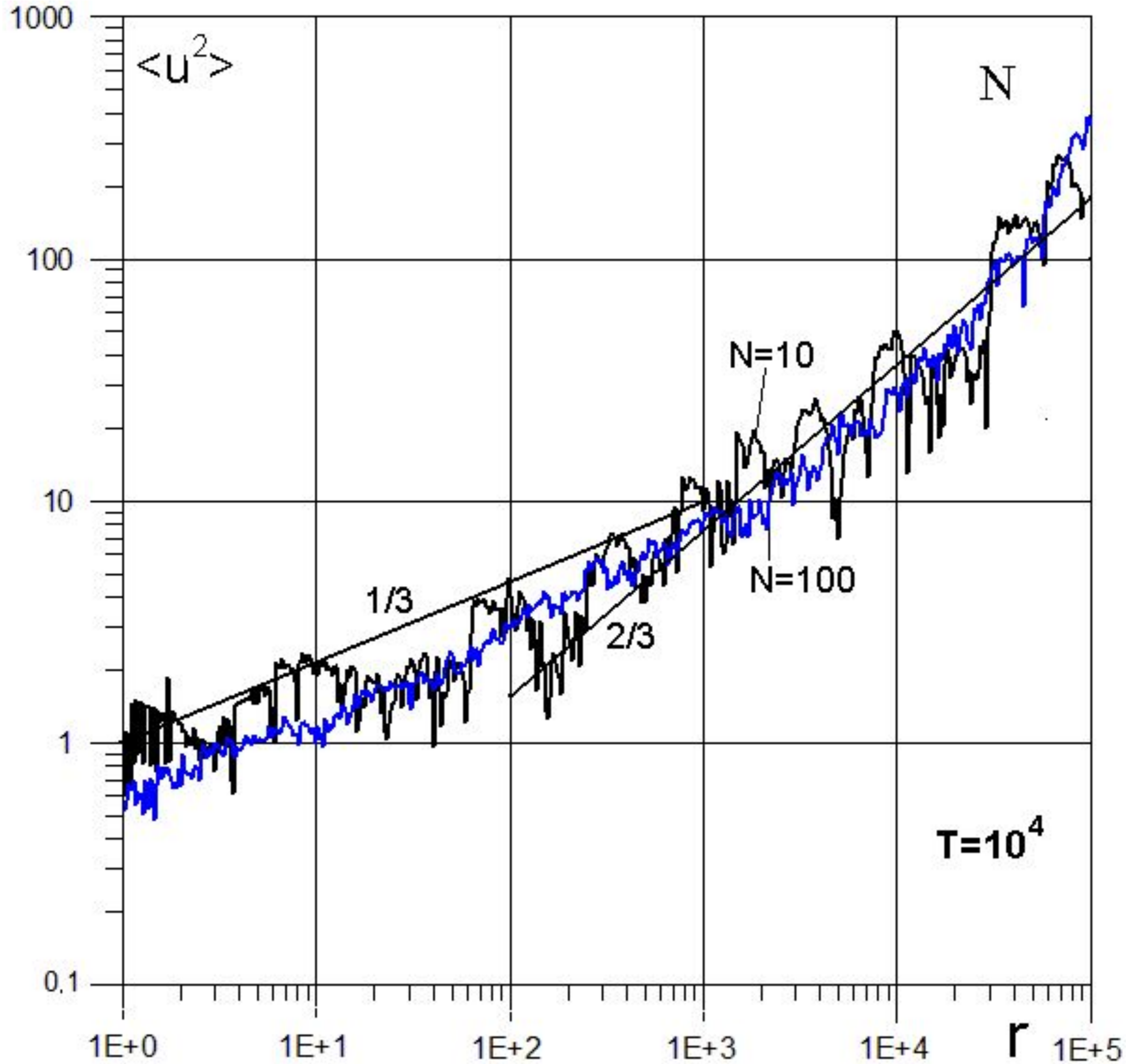


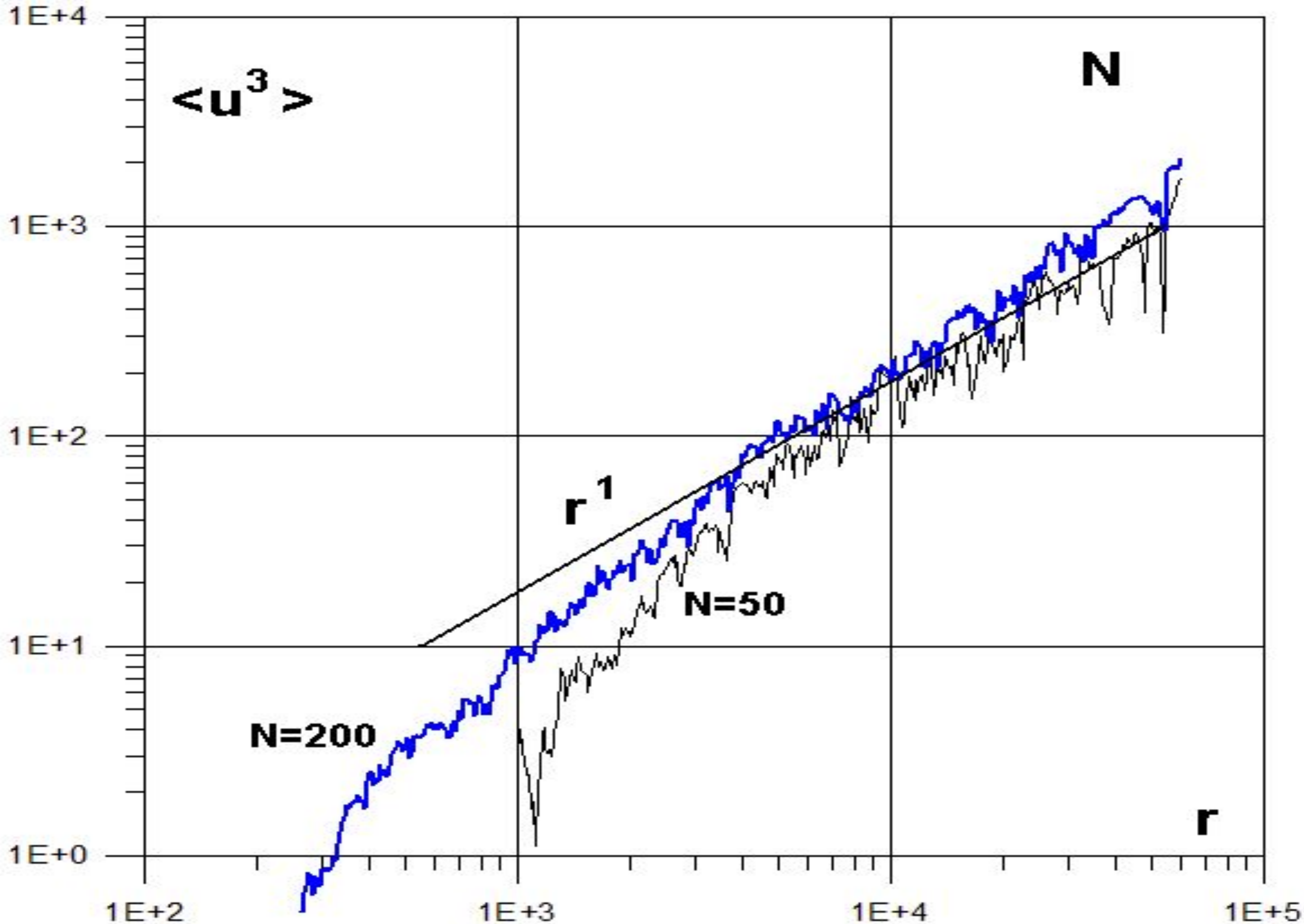
Fig. 2.36. Evolution of wave spectra with fetch for offshore winds (11–12 h, Sept. 15, 1968). The spectra are labelled with the fetch in kilometres. (From Hasselmann *et al*, 1973.)



2.0
0.0
-2.0
-4.0
-6.0
-8.0
lg<u^m>
β
m=2
m=4
N=100
N=10
0.0
1.0
2.0
3.0
lgT



1000
100
10
1
0.1
<u^2>
N
N=10
N=100
1/3
2/3
T=10^4
1E+0
1E+1
1E+2
1E+3
1E+4
r
1E+5


1E+4
1E+3
1E+2
1E+1
1E+0
<u3>
N
r 1
N=50
N=200
r
1E+2
1E+3
1E+4
1E+5

Для грубой оценки КПД по волнам примем $U_{10}=9$ м/с (Monahan, 2006)
$c_D = 1.4\cdot 10^{-3}$, $\alpha_{ss} = 0.7$. Тогда $\eta = 5.3\%$ (или 6.8% при $\alpha_{ss} = 0.55$).
Расчёты 2007 – 4 - 5%.
Согласно (3) и (1) $q_e = D = c_D \rho_a U_{10}^3 = 1.4\cdot 10^{-3}\cdot 1.23\cdot 9^3 = 1.26$ Вт/м^2.

Согласно (8) энергия, идущая на генерацию волн

$$\frac{dE}{dt} = \eta D = 0.066 \text{ Вт/м}^2 = 66 \text{ мВт/м}^2 \qquad (9)$$

Учитывая, что океан занимает 71% поверхности земного шара, глобальная средняя плотность энергии, идущая на генерацию ветровых волн, будет 46 м Вт/м^2, что равно примерно половине геотермического потока из недр Земли, близкого к 90 м Вт/м^2. Таким образом, на генерацию волн в Мировом океане тратится

т.е. 0.2 $^{o}/_{oo}$

Статистика ветра над Мировым океаном
Monahan 2006 a, b, 2008

Функция распределения ветра – Вейбулл

$$p(x)=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\right] \qquad (10)$$

Моменты

$$\left\langle x^k\right\rangle = a^k\Gamma\left(1+\frac{k}{b}\right). \qquad (11)$$

Оценки

$$b=\left(\overline{x}/\sigma_x\right)^{1.086} \qquad (12)$$

$$a=\frac{\overline{x}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)}. \qquad (13)$$

В среднем глобально $\sigma_x \approx 3$ м/с, $\overline{u} \approx 8$ м/с, $b = 2.9$,

что даёт $a = 8.9$ м/с (наиболее вероятная скорость)

Отсюда $D \approx 1.2$ Вт/м^2 по (1).

Развитие волнения 1.

Возраст волнения

$$\Omega = \frac{U_{10}}{c_\phi} = \frac{U_{10}\omega_p}{g}. \qquad (14)$$

Безразмерный разгон

$$F = gx/U_{10}^2. \qquad (15)$$

Эволюция пика волнения

$$\frac{U_{10} f_p}{g} = AF^{-\alpha}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (16)$$

Измерения: Бабанин – Соловьёв

JONSWAP без лаборат. измерений

$\alpha = 0.275 \pm 0.016$

Kahma&Calkoen, unstable $\alpha = 0.28$

Kahma&Calkoen, stable $\alpha = 0.24$

Badulin et al 2007 $0.23 < \alpha < 0.33.$

Далее $A = 2.55 \quad \alpha = 0.28,$

Gulev&Hasse 1998 (Donelan $\Omega = 1.23$ Babanin 1.2 – 1.3)

$\Omega = 1.2;$

Развитие волнения 2.

Тоба (1987): групповая

$$\frac{dx}{dt} = c_g = \frac{1}{2} c_\phi = \frac{1}{2} A F^\alpha \quad (17)$$

Решение

$$\frac{dx}{dt} = Bx^\alpha, \qquad B = \frac{\pi}{A} U^{1-2\alpha} g^\alpha \quad (18)$$

$$x^{1-\alpha} = (1-\alpha) Bt.$$

С учётом (14) – (18) получаем

$$T = \frac{B^{-\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha} \left(\frac{U}{2\Omega} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (19)$$

Все величины выражаем через возраст Ω:

Время разгона

$$T = \frac{2\Omega \left(2\pi A / \Omega \right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha} \frac{U}{g}. \quad (20)$$

Длина разгона

$$x = \left(\frac{2\pi A}{\Omega} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{U^2}{g}. \quad (21)$$

Период волны

$$\omega_p^2 = g k_p : \qquad T_p = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{U}{g} \quad (22)$$

Длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Omega^2} \frac{U^2}{g}. \quad (23)$$

305
8.4
73.5
21.8
3.9

Характеристика	1	2	3	4	5
Разгон, км	76	144	52	98	305
Период волн, сек.	4.7	4.7	4.7	4.7	8.4
Длина волны, м	34.3	34.3	34.3	34.3	73.5
Время разгона (20). час.	8.0	14.2	5.84	9.4	21.8
Высота волны, м	2.5				3.9

1. Бабанин, Соловьёв 1999: $A = 2.41$, $\alpha = 0.275$
2. Донелан и др. 1985: $A = 1.85$ $\alpha = 0.23$
3. Хассельманн и др. 1973: $A = 3.50$, $\alpha = 0.33$.
4. Захаров и Заславский 1983: $A = 1.46$, $\alpha = 3/14 = 0.214$. Разгон $\approx 90 \pm 40$ км;
   Время разгона 9.3 ± 3.6 часа
5. $\Omega = 0.84$, установившееся волнение при $A = 2.41$, $\alpha = 0.275$.

Энергия волнения

$$E \approx \frac{dE}{dt}T \approx \eta D T \qquad (24)$$

В то же время

$$E = \frac{1}{2}\rho_w g h_s^2 \qquad (25)$$

Используя время разгона (20) и (25), получаем

$$h_s = \left(\frac{2E}{\rho_w g}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\eta D T}{\rho_w g}\right)^{1/2} = 8\left(1,3\pi\right)^{1/2}\left(c_D\right)^{3/4}\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}\frac{A^{\frac{1}{2\alpha}}}{\left(1-\alpha\right)^{1/2}}\frac{U^2}{g} \qquad (26)$$

При наиболее вероятном ветре $U = 8.9$ м/с, $c_D^* = 1.4\cdot 10^{-3}\,\alpha_{ss}^{-2}$, $\alpha_{ss} = 0.7$, $\Omega = 1.23$ получаем $h = 4h_s = 3.2$ м. Это надо сравнить со средней наблюдённой максимальной высотой 2.5 м. По всей видимости наибольшую погрешность в расчётную формулу (26) вносит значение α_{ss} которое входит как $\alpha_{ss}^{-3/2}$.

Французы дают $\alpha_{ss} = 0.7 \pm 0.2$ Бадулин и др. 0.55 ± 0.25

При верхнем пределе $\alpha_{ss} = 0.9$ получаем $h = 2.2$ м, а при таком пределе Бадулина: 2.32 м. Точное значение 2.5 м будет при $\alpha_{ss} = 0.85.$

Зачем всё это?

1. Спутниковые наблюдения за амплитудами волн помогают понять энергетический цикл ветрового волнения. На его поддержание тратится около двух десятых промилле мощности солнечной энергии.
2. Знание возраста волнения $\left(\Omega = 1.2 \div 1.3\right)$ и простое его рассмотрение среднего по Мировому океану даёт время развития этого волнения в 8 – 10 часов, разгон порядка 100 км. Близость оцениваемых таким образом амплитуд волн к наблюдённым показывает общую правильность наших представлений о развитии морского волнения. Если бы волнение было установившимся, то его параметры были бы заметно больше.

3.Наибольшую неопределённость в результаты расчётов вносит величина параметра самоподобия развития α_{ss}, введённая Бадулиным и др. (2007). Для совпадения расчётов и наблюдений амплитуд волн надо $\alpha_{ss} \approx 0.85$ против 0.55 ± 0.25 в 2007 г. и 0.7 ± 0.2 (французы, конец 2008г.). Свою роль во всём этом играют возраст Ω и параметр роста периода волнения α. Всё это связано друг с другом и оставляет надежду, что мы недалеко от истины!

$$\alpha_{ss}\Omega^{\frac{1-\alpha}{3\alpha}} = \frac{1.3\pi^{4/3}}{1-\alpha}\left(2\pi A\right)^{\frac{1}{3\alpha}}\left(\frac{\rho_0}{\rho_w}\right)^{1/3}\left(\frac{U^2}{gh_m}\right)^{2/3} c_D^{1/2}$$