

Системы дифференциальных уравнений

Общие понятия



Системы дифференциальных уравнений

- **Нормальные системы Д.У.**

- Система уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_N) \\ y_2' = f_2(x, y_2, \dots, y_N) \\ \dots \\ y_N' = f_N(x, y_N, \dots, y_N) \end{cases}$$

- с неизвестными функциями

$$y_1(x), \dots, y_N(x)$$

- называется **нормальной системой**
- дифференциальных уравнений.

Системы дифференциальных уравнений

- **Решением системы Д.У.**
- называется вектор-функция $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x))$
- определенная в (a, b) ,
- имеющая там производную первого порядка и такая, что при подстановке ее и
- ее производных в систему каждое уравнение превращается в тождество.

← Производной вектор- функции $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x))$ называется вектор-функция $(\varphi_1'(x), \varphi_2'(x), \dots, \varphi_N'(x))$

Системы дифференциальных уравнений

- **Задача Коши** для системы Д.У.:
- найти решение системы
 $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x))$
- такое , что в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$
- оно удовлетворяет начальному условию
 $(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_N(x_0)) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$

Системы дифференциальных уравнений

- Векторная запись системы Д.У.
- Обозначим:

$$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \boxtimes \\ y_N(x) \end{pmatrix} \quad \bar{f}(x, \bar{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \bar{y}) \\ \boxtimes \\ f_N(x, \bar{y}) \end{pmatrix} \quad \bar{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \boxtimes \\ y_N'(x) \end{pmatrix}$$

- Получим **векторное уравнение**

$$\bar{y}' = f(x, \bar{y})$$

- **Решение векторного уравнения**
- – это вектор-функция $\bar{\varphi}(x)$,
- удовлетворяющая векторному уравнению:

$$\bar{\varphi}'(x) \equiv f(x, \bar{\varphi}(x)) \quad \text{в } (a, b)$$

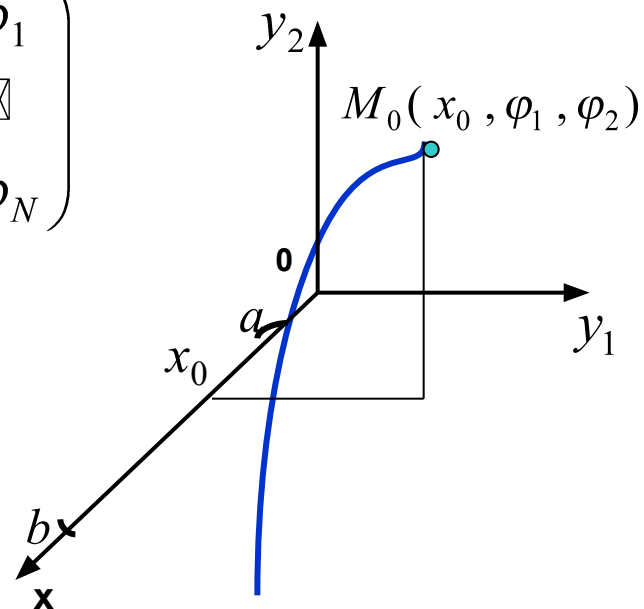
Системы дифференциальных уравнений

- **Задача Коши для векторного уравнения:**

$$\bar{y}' = f(x, \bar{y}) \text{ в } (a, b),$$

$$\bar{y}(x_0) = \bar{\varphi}, \quad x_0 \in (a, b), \text{ где } \bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \boxtimes \\ \varphi_N \end{pmatrix}$$

- **Геометрический смысл задачи Коши при N=2:**
- Найти интегральную кривую в пространстве, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, \varphi_1, \varphi_2)$



Системы дифференциальных уравнений

- **Теорема Коши (∃!).**

- Пусть

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \text{ в } (a, b),$$

$$\bar{y}(x_0) = \bar{\varphi}, \quad x_0 \in (a, b),$$

- пусть $\bar{f}(x, y_1, \dots, y_N)$ -
- непрерывная вектор-функция
- и имеет непрерывные частные производные по переменным
- y_1, \dots, y_N в некоторой окрестности U
- точки $(x_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N)$



∃! - решение векторного Д.У.
в некоторой окрестности
 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
удовлетворяющее заданному
начальному условию.