Системы дифференциальных уравнений

Общие понятия

Системы дифференциальных уравнений

- **Нормальные системы Д.У.**
  - Система уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_N) \\ y_2' = f_2(x, y_2, \dots, y_N) \\ \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_N' = f_N(x, y_N, \dots, y_N) \end{cases}$$

  - с неизвестными функциями

$$y_1(x), \dots, y_N(x)$$

  - называется **нормальной системой**
  - дифференциальных уравнений.

Системы дифференциальных уравнений

- **Решением системы Д.У.**
- называется вектор-функция $\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\right)$
- определенная в (a,b),
- имеющая там производную первого порядка и такая, что при подстановке ее и
- ее производных в систему каждое уравнение превращается в тождество.

Производной вектор- функции $\left(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)\right)$ называется вектор-функция $\left(\varphi_1'(x), \varphi_2'(x), \dots, \varphi_N'(x)\right)$

Системы дифференциальных уравнений

- **Задача Коши** для системы Д.У.:
- найти решение системы

$$(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x))$$

- такое , что в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$
- оно удовлетворяет начальному условию

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_N(x_0)) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$$

Системы дифференциальных уравнений

- Векторная запись системы Д.У.
- Обозначим:

$$\bar{y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{pmatrix} \qquad \bar{f}(x.\bar{y})=\begin{pmatrix} f_1(x,\bar{y}) \\ \vdots \\ f_N(x,\bar{y}) \end{pmatrix} \qquad \bar{y}'(x)=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_N'(x) \end{pmatrix}$$

- Получим **векторное уравнение**

$$\bar{y}'=f(x,\bar{y})$$

- **Решение векторного уравнения**
- **–** это вектор-функция $\bar{\varphi}(x)$,
- удовлетворяющая векторному уравнению:

$$\bar{\varphi}'(x)\equiv f(x,\bar{\varphi}(x)) \quad в \;\; (a,b)$$

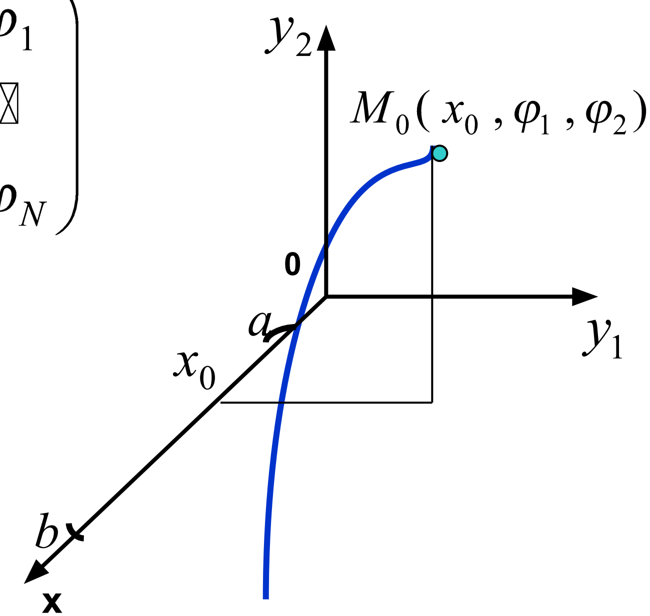
Системы дифференциальных уравнений

- **Задача Коши для векторного уравнения:**

$$\overline{y}' = f(x,\overline{y}) \ \text{в}\ (a,b),$$

$$\overline{y}(x_0) = \overline{\varphi}, \ x_0 \in (a,b), \ \text{где}\ \overline{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$$

- **Геометрический смысл задачи Коши при N=2:**
- Найти интегральную кривую в пространстве, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, \varphi_1, \varphi_2)$



Системы дифференциальных уравнений

- **Теорема Коши ($\exists!$).**

- Пусть

$$\bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}) \;\; в\ (a,b)\,,$$

$$\bar{y}(x_0) = \bar{\varphi}\,,\;\; x_0 \in (a,b)\,,$$

- пусть $\bar{f}(x, y_1, \ldots, y_N)$ -
- непрерывная вектор-функция
- и имеет непрерывные частные производные по переменным
- $y_1, \ldots, y_N$ в некоторой окрестности U
- точки $(x_o, \varphi_1, \ldots, \varphi_N)$

$\exists!$ - решение векторного Д.У. в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, удовлетворяющее заданному начальному условию.