

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ (II)

Уравнения второго порядка



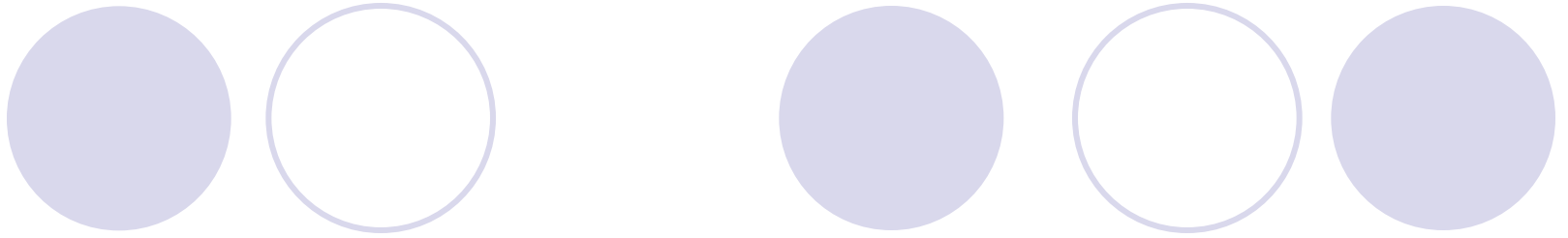
- Одним из наиболее распространенных уравнений с частными производными второго порядка является **волновое уравнение**, описывающее различные виды колебаний.



- **Одномерное волновое уравнение** описывает продольные колебания стержня, сечения которого совершают плоскопараллельные колебательные движения.



- **Двумерное волновое уравнение**
используется для исследования колебаний
тонкой пластины (мембраны).



- **Трехмерное волновое уравнение** описывает распространение волн в пространстве (например, звуковых волн в жидко- жидкости).

- Рассмотрим **одномерное волновое уравнение**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

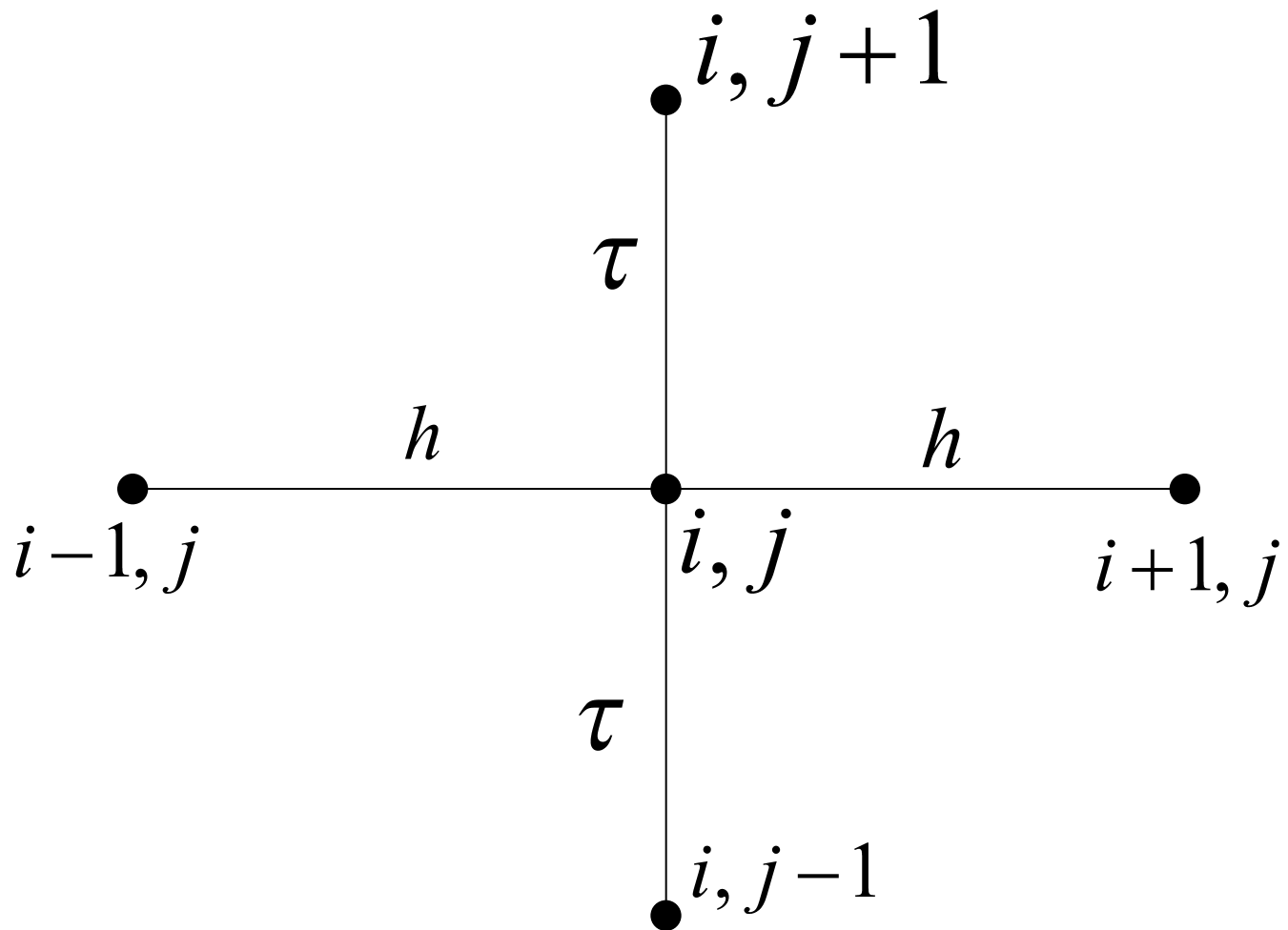
- с начальными условиями

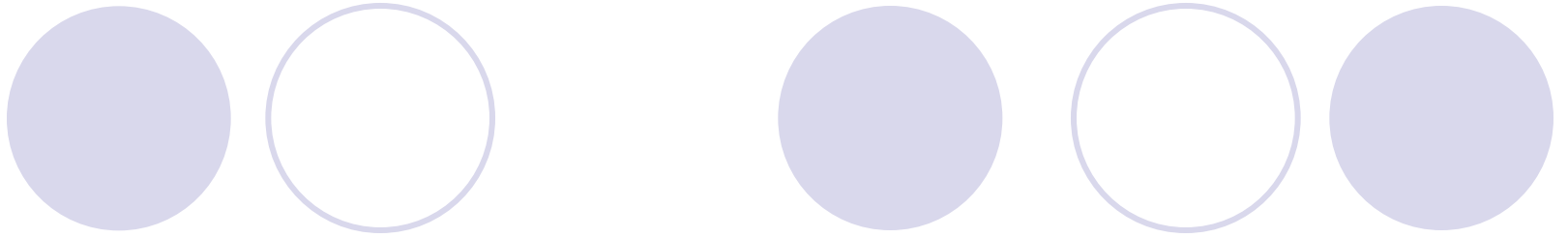
$$U|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x),$$

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0.$$

- Рассмотрим явную разностную схему «крест» для решения данной задачи.





- Заменяем в уравнении вторые производные искомой функции U по t и x их конечно-разностными соотношениями.

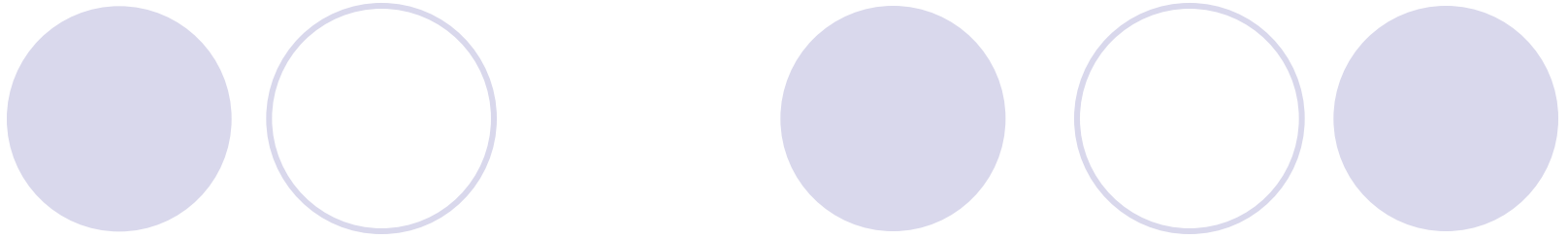
$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$



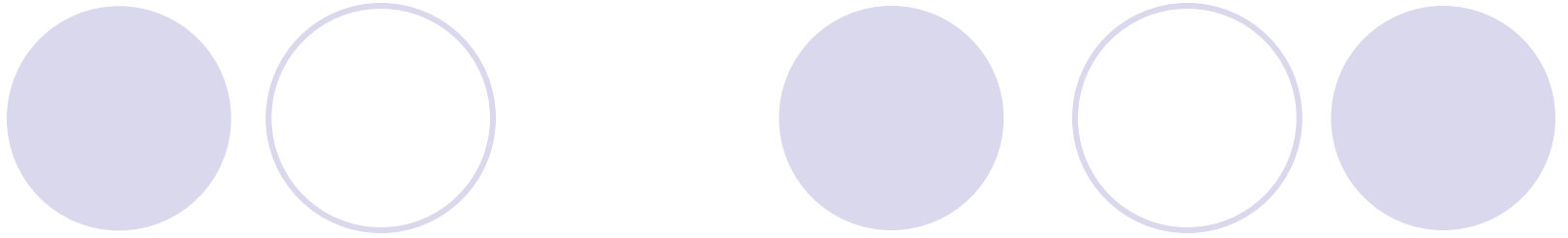
- Отсюда можно найти явное выражение для значения сеточной функции на $(j + 1)$ -м слое:

$$u_i^{j+1} = 2(1 - \lambda)u_i^j + \lambda(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1},$$

$$\lambda = \frac{a^2 \tau^2}{h^2}.$$



- Здесь, для определения неизвестных значений на $(j + 1)$ -м слое нужно знать решения на j -м и $(j - 1)$ -м слоях.
- Поэтому начать счет можно лишь для второго слоя.



- решения на нулевом и первом слоях находятся с помощью начальных условий.
- На нулевом слое имеем

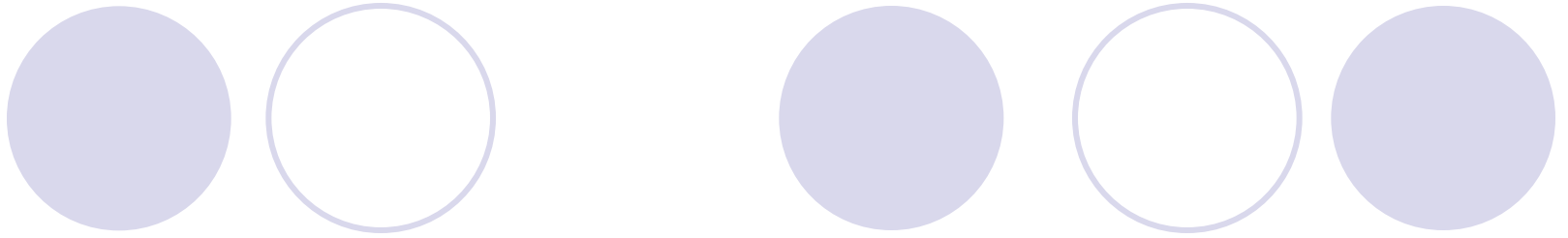
$$u_i^0 = \varphi(x_i).$$

- Для получения решения на первом слое воспользуемся вторым начальным условием.
- Производную $\partial u / \partial t$ заменим конечно-разностной аппроксимацией.

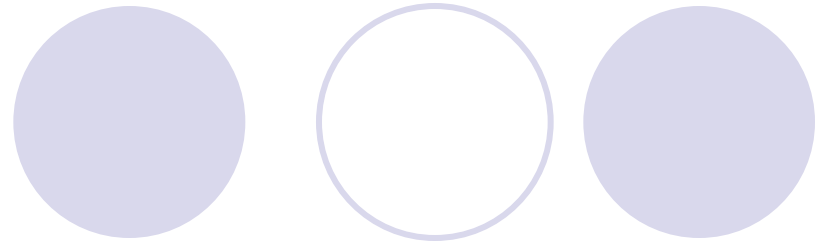
$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{\substack{t=0 \\ x=x_i}} = \psi(x_i) \approx \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau}.$$

- Из этого соотношения можно найти значения сеточной функции на первом слое:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \psi(x_i).$$



- Построим неявную схему.
- Вторую производную по t в уравнении аппроксимируем, как и ранее, по трехточечному шаблону с помощью значений сеточной функции на слоях $j - 1, j, j + 1$.



$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} \right)$$

- Из этого соотношения можно получить систему уравнений относительно неизвестных значений сеточной функции на $(j + 1)$ -м слое:

$$\begin{aligned} & \lambda u_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\lambda)u_i^{j+1} + \lambda u_{i+1}^{j+1} = \\ & = (1 + 2\lambda)u_i^{j-1} - \lambda(u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}) - 2u_i^j, \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{a^2 \tau^2}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots .$$



ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интегральным уравнением называется уравнение, неизвестная функция в котором содержится под знаком интеграла.


- В общем случае интегральное уравнение имеет вид

$$\int_a^b K(x, s, y(s)) ds = f(x, y(x)), \quad a \leq x \leq b.$$



■ **Виды интегральных уравнений.**

- **Уравнения, в которые искомая функция входит линейно, называются линейными интегральными уравнениями.**

- 
- Одним из них является уравнение Фредгольма первого рода
-

$$\int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

- Уравнение Фредгольма второго рода имеет вид

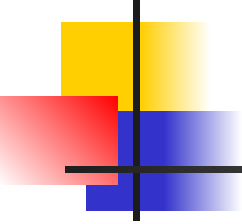
$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

- 
-
- уравнение Вольтерра первого рода:

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad a \leq s \leq x.$$

- уравнение Вольтерра второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x), \quad a \leq s \leq x.$$

- 
-
- Для решения линейных интегральных уравнений строится итерационный процесс, аналогичный методу простой итерации для нелинейного уравнения.