1. Множества

1.1. Понятие множества. Логические символы

Множества. Способы задания

Под **множеством** понимают совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общим характерным признаком в единое целое.

Объекты или предметы, из которых состоит множество, называют **элементами множества**.

Множества обозначают прописными латинскими буквами *A, B, C*, ..., а элементы множеств — строчными латинскими буквами *a, b, c,* ....

Если элемент а принадлежит множеству *A*, то пишут: $a \in A$;

Если элемент а принадлежит множеству *A*, то пишут: $a \notin A$.

Если множество *A* состоит из элементов *a, b, c, d,* то пишут

$$A := \{a, b, c, d\}$$

Если множество *A* задается указание характерного свойства *P(x)* его элементов, то записывают так: $A = \{x \mid P(x)\}$

Множество, состоящее из одного элемента, называют **одноэлементным** и обозначают: $\{a\}$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называют **пустым** и обозначают символом $\varnothing$.

Например, множество действительных корней уравнения

$x^2 + 1 = 0$ *пусто.*

Все множества делятся на конечные и бесконечные. Множество, состоящие из конечного числа элементов, называются **конечным.** Множество, не являющееся конечным, называется **бесконечным**.

Если *A* - конечное множество, то число его элементов обозначаю через $|A|$ и называют **мощностью множества *A*.**

Логические символы

- **Квантор общности** обозначается $\forall$ ("любой", "всякий", "каждый"). Выражение "для любого *x* из множества *M*" можно записать короче: $\forall x \in M$. Выражение "во всяком треугольнике ABC" записывают в виде $\forall \triangle ABC$.
- **Квантор существования** обозначается $\exists$ ("существует", "найдется"). Выражение "существует *x*, принадлежащий множеству *M*, такое, что ... " записывают так: $\exists x \in M$. Двоеточие означает "имеет место" "такое, что".

Например: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): \forall x \neq x_0 \;\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

(выражение "для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех *x*, отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравентво $|f(x) - b| < \varepsilon$")

- **Символ логического следствия** $\Rightarrow$ (“следует”, “вытекает”). Выражение “из утверждения a следует утверждение b ” записывают так: $a \Rightarrow b$.
- **Символ эквивалентности** $\Leftrightarrow$ обозначает равносильность утверждений, расположенных по разные стороны от него и читается: “тогда и только тогда, когда ...”, “равносильно ...”, “необходимо и достаточно”.

Например, выражение “*в* ***любом*** *треугольнике ABC сторона AC равна стороне BC* ***тогда и только тогда, когда*** *угол A равен углу B* ” записывается в виде: $\forall \triangle ABC: AC = BC \Leftrightarrow \angle A = \angle B$

Отношения между множествами

- Множества А и В называются **равными**, если каждый элемент множества А является элементом множества В и, наоборот, каждый элемент множества В является элементом множества А. (обозначение: А=В). Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

$$\textit{Например}: A=\{x \mid (x-1)(x-2)(x-3)=0\}$$

$$B=\{x\in\mathbf{N} \mid x<4\},\ \ A=B.$$

Равенство множеств обладает следующими свойствами:

1. A = A (рефлексивность);

2. A = B, B = C $\Rightarrow$ A = C (транзитивность);

3. A = B $\Rightarrow$ B = A (симметричность).

Если множество A не равно множеству B, то пишут $A\neq B$.

- Множество $A, (A \neq \varnothing)$ называется **подмножеством множества B** $(B \neq \varnothing)$, если каждый элемент множества A является элементом множества B. (обозначение: $A \subseteq B$).
- Понятие подмножества определяет между двумя множествами **отношение включения**. Если $A \subseteq B$ $B \neq A$, то A называют собственным подмножеством множества B и обозначают $A \subset B$ (**отношение строгого включения**).
- Всякое натуральное число $n \in \mathbf{N}$ является целым, поэтому $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ Но всякое целое число $p \in \mathbf{Z}$ является рациональным, следовательно, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Всякое же рациональное число $q \in \mathbf{Q}$ является действительным, поэтому $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Следовательно, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
- Множество рациональных и иррациональных чисел не равны между собой и ни одно из них не является подмножеством другого.

1.2. Операции над множествами

- Пусть дано универсальное множество U. Множества A и B - произвольные подмножества множества U.
- **Объединением множеств** A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В (или обоим одновременно): $A \cup B := \{x \mid (x \in A \text{ или } x \in B) \text{ или } (x \in A \text{ и } x \in B)\}$
- Операция объединения множеств удовлетворяет коммутативному и ассоциативному законам:

$$A \cup B = B \cup A, \; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

$$A \cup A = A, A \cup \varnothing = A, A \cup U = U.$$

Например

$$A = \{2, 3, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

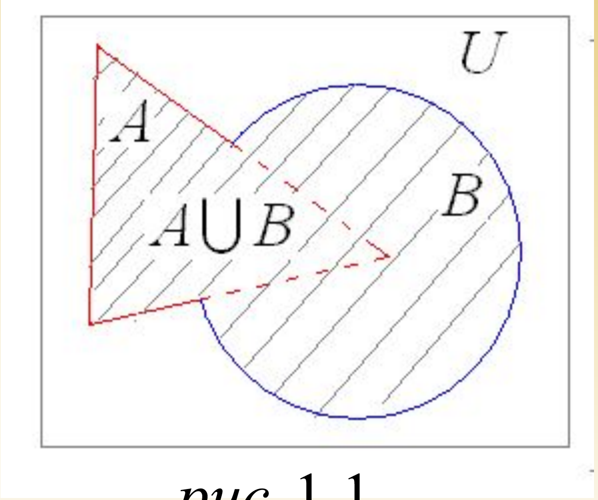


рис. 1.1

- **Пересечением множеств** *A* и *B* называется множество, содержащее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно:

$$A \cap B = \{x \mid \; x \in A \qquad \in \;\}$$

- коммутативный и ассоциативный законы:

$$A \cap B = B \cap A, \; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- дистрибутивный закон:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

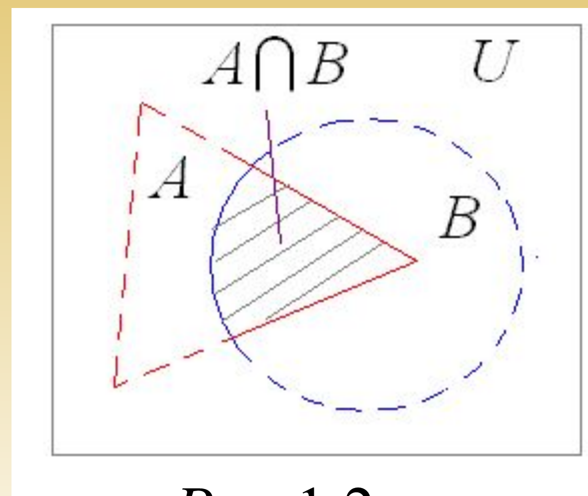


Рис. 1.2

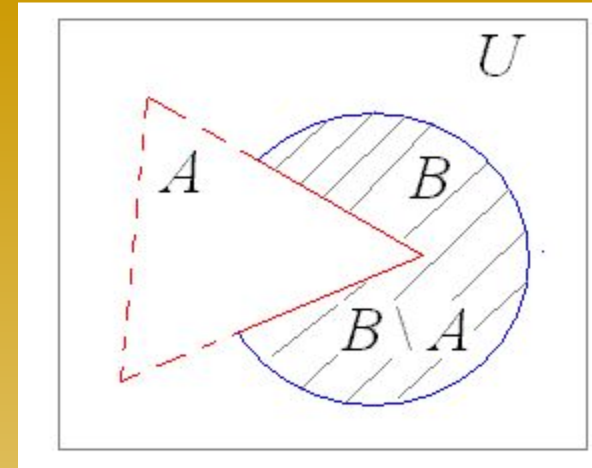
$$A \cap A = A, \; A \cap \varnothing = \varnothing, \; A \cap U = A.$$

Например

$$A = \{1, 3, 7, 8\}, \; B = \{2, 3, 4, 8\}$$

$$A \cap B = \{3, 8\}$$

- **Разностью двух множеств** A и B называется множество, содержащее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат B, но принадлежат A :



$$B \setminus A := \{x \mid x \in B, \quad \notin \quad \}. \ (\text{Рис}.\ 1.3)$$

Рис. 1.3

- Разность $U \setminus A$ называется дополнением множества A до универсального множества U: $\bar{A} := U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$.

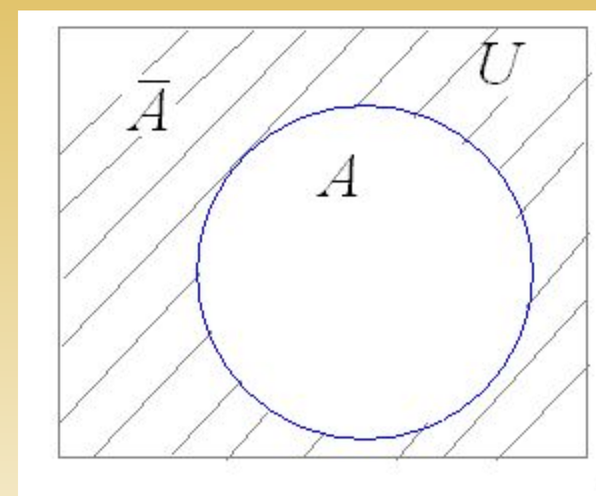


Рис. 1.4

$$A \cup \bar{A} = U, \ A \cap \bar{A} = \varnothing, \ \bar{\bar{A}} = A, \ \bar{\varnothing} = U, \ \bar{U} = \varnothing.$$

Например : $\mathbf{Z}$ – *множество целых чисел* p. *Примем это множество за универсальное и рассмотрим два его подмножества*

$$A = \{p \mid 0 < p < 30\}, \ B = \{p \mid 10 < p < 40\}.$$

$$A \cup B = \{p \mid 0 < p < 40\}, \ A \cap B = \{p \mid 10 < p < 30\},$$

$$B \setminus A = \{p \mid 30 < p < 40\}.$$

- Пара элементов $(x;\ y)$, $x \in A$, $y \in B$, называется упорядоченной, если указан порядок записи элементов x и y. Считается, что $(x_1;\ y_1) = (x_2;\ y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$
- Элементы x и y упорядоченной пары $(x;\ y)$ называются **координатами этой пары**.
- **Декартовым произведением** двух множеств A и B называется множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар: $A \times B := \{(x;\ y) \mid \forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B\}$
- Если A=B, то $A \times A = A^2$ называют декартовым квадратом.

$Например: \quad A = \{1,\ 2,\ 3\},\ B = \{3,\ 4\}$

$$A \times B = \{(1;3),\ (1;4),\ (2;3),\ (2;4),\ (3;3),\ (3;4)\},$$

$$B \times A = \{(3;1),\ (3;2),\ (3;3),\ (4;1),\ (4;2),\ (4;3)\}$$

Боковую поверхность прямого кругового цилиндра радиусом $R=1$ *и высотой* H *можно задать декартовым произведением* $A\times B$, *где* $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}\mid x^2+y^2=1\}$, $B=\{z\in\mathbf{R}\mid 0\le z\le H\}$

$$A=\{x\in\mathbf{R}\mid 1\le x\le 3\};$$

$$B=\{y\in\mathbf{R}\mid 1\le y\le 2\}.$$

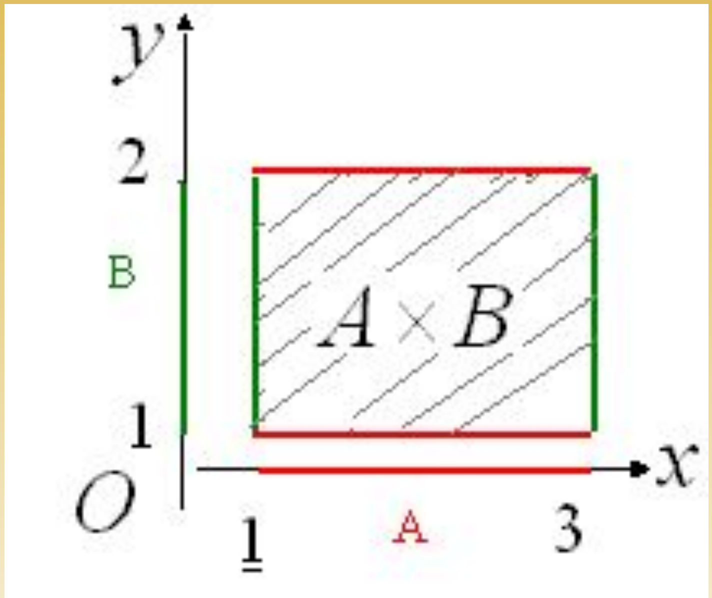


Рис.1.5

1.3. Отображение множеств. Эквивалентность множеств

- Пусть *A, B* произвольные множества и *f* - закон (правило), по которому каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие единственный элемент $b \in B$. Тогда говорят, что **задано отображение** *f* множества *A* в множество *B*, или **оператор** *f*, переводящий множество *A* в множество *B*. $\left(f: A \to B,\ A \xrightarrow{f} B \right)$
- Элемент *b*, в который отображен *a*, называют образом элемента *a* при отображении *f* и обозначают *f(a)*. Элемент *a* называют прообразом элемента *f(a)*.

$$f: A \to B \Leftrightarrow \forall a \in A\ \exists b \in B: b = f(a)$$

- Множество образов всех элементов *a* при отображении *f* называют образом множества *A*: $f(A) := \left\{ f(a) \middle| a \in A \right\} \subset B$
- Задание отображения предполагает задание тройки *(A, f, B)*, где *A* - отображаемое множество; *B* - множество значений отображения; *f* - закон, по которому каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие элемент $b \in B$.

- Отображение $f : A \to B$ называют **взаимно однозначным** или **биективным**, если каждый элемент $b \in B$ является образом только одного элемента $a \in A$.

f — *взаимно однозначное отображение* $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B \quad \exists a \in A: \quad b = f(a),$$

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

- Отображение f^{-1} называют **обратным к отображению** *f*, если $a \xrightarrow{f} b,\ b \xrightarrow{f^{-1}} a$, т.е. элементу $b \in B$ ставится в соответствие тот элемент $a \in A$, образом которого при отображении *f* является *b*.

$$f^{-1} : B \to A \Leftrightarrow$$

$$\forall b \in B \ \exists a \in A : a = f^{-1}(b)$$

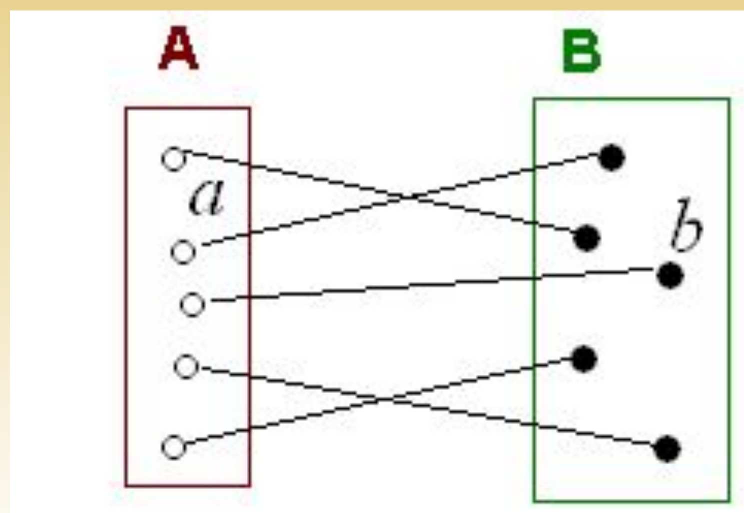


Рис. 1.6

- Два множества A и B называются **эквивалентными (равномощными),** если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое. (обозначение: $A \sim B$).
- Свойства отношения эквивалентности:

1) $A \sim A \ \forall A$ (*рефлексивность*);

2) *если* $A \sim B$, *то* $B \sim A \ \forall A, B$ (*симметричность*);

3) *если* $A \sim B, B \sim C$, *то* $A \sim C \ \forall A, B, C$ (*транзитивность*).

- Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется **счетным**.
- *Например*, **N** - множество натуральных чисел, A - множество четных натуральных чисел. Взаимно однозначное соответствие с помощью соотношения $n \leftrightarrow 2n$

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & \ldots, & n, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2, & 4, & \ldots, & 2n, & \ldots \end{array}$$

Пример. Показать, что множество точек любых двух отрезков $[a;b]$ *и* $[c;d]$ *эквивалентны между собой.*

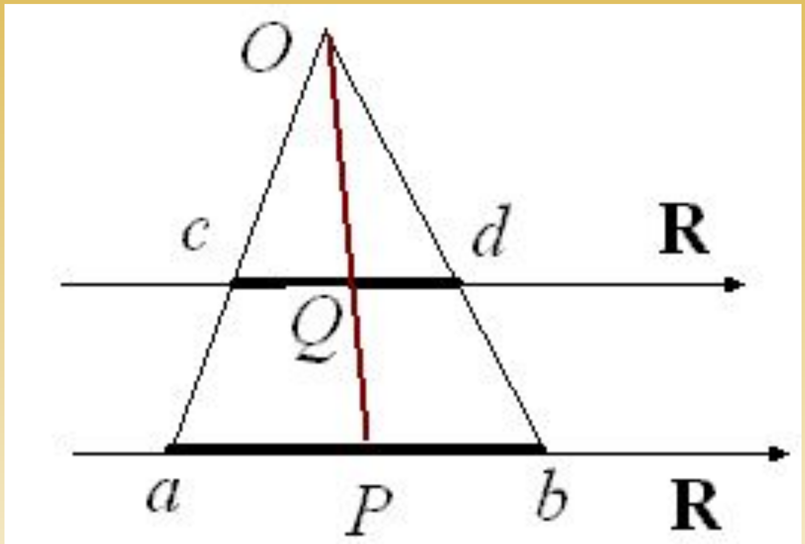


Рис. 1.7