

# 1. Множества

# 1.1. Понятие множества. Логические символы

## Множества. Способы задания

Под **множеством** понимают совокупность определенных и отличных друг от друга объектов, объединенных общим характерным признаком в единое целое.

Объекты или предметы, из которых состоит множество, называют **элементами множества**.

Множества обозначают прописными латинскими буквами  $A, B, C, \dots$ , а элементы множеств — строчными латинскими буквами  $a, b, c, \dots$

Если элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ , то пишут:  $a \in A$ ;

Если элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ , то пишут:  $a \notin A$ .

Если множество  $A$  состоит из элементов  $a, b, c, d$ , то пишут

$$A := \{a, b, c, d\}$$

Если множество  $A$  задается указанием характерного свойства  $P(x)$  его элементов, то записывают так:  $A = \{x \mid P(x)\}$

Множество, состоящее из одного элемента, называют **одноэлементным** и обозначают:  $\{a\}$ . Множество, не содержащее ни одного элемента, называют **пустым** и обозначают символом  $\emptyset$ .

*Например, множество действительных корней уравнения*

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{пусто.}$$

Все множества делятся на конечные и бесконечные. **Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется конечным. Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным.**

Если  $A$  - конечное множество, то число его элементов обозначают через  $|A|$  и называют **мощностью множества  $A$** .

## Логические символы

- **Квантор общности** обозначается  $\forall$  (“любой”, “всякий”, “каждый”). Выражение “для любого  $x$  из множества  $M$ ” можно записать короче:  $\forall x \in M$ . Выражение “во всяком треугольнике  $ABC$ ” записывают в виде  $\forall \triangle ABC$ .
- **Квантор существования** обозначается  $\exists$  (“существует”, “найдется”). Выражение “существует  $x$ , принадлежащий множеству  $M$ , такое, что ...” записывают так:  $\exists x \in M$ . Двоеточие означает “имеет место” “такое, что”.

Например:  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): \forall x \neq x_0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$   
( выражение “для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что для всех  $x$ , отличных от  $x_0$  и удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ ”)

- **Символ логического следствия**  $\Rightarrow$  (“следует”, “вытекает”).  
Выражение “из утверждения  $a$  следует утверждение  $b$ ” записывают так:  $a \Rightarrow b$ .
- **Символ эквивалентности**  $\Leftrightarrow$  обозначает равносильность утверждений, расположенных по разные стороны от него и читается: “тогда и только тогда, когда ...”, “равносильно ...”, “необходимо и достаточно”.

Например, выражение “*в любом треугольнике  $ABC$  сторона  $AC$  равна стороне  $BC$  тогда и только тогда, когда угол  $A$  равен углу  $B$* ” записывается в виде:  $\forall \triangleq ABC: AC = BC \Leftrightarrow \angle A = \angle B$

## Отношения между множествами

- Множества  $A$  и  $B$  называются **равными**, если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$  и, наоборот, каждый элемент множества  $B$  является элементом множества  $A$ . (обозначение:  $A=B$ ). Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

$$\text{Например: } A = \{x \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 4\}, \quad A = B.$$

Равенство множеств обладает следующими свойствами:

1.  $A = A$  (рефлексивность);
2.  $A = B, B = C \Rightarrow A = C$  (транзитивность);
3.  $A = B \Rightarrow B = A$  (симметричность).

Если множество  $A$  не равно множеству  $B$ , то пишут  $A \neq B$

- Множество  $A$ , ( $A \neq \emptyset$ ) называется **подмножеством множества  $B$** , если **каждый** элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ . (обозначение:  $A \subseteq B$ ).
- Понятие подмножества определяет между двумя множествами **отношение включения**. Если  $A \subseteq B$  и  $A \neq B$ , то  $A$  называют **собственным подмножеством** множества  $B$  и обозначают  $A \subset B$  (**отношение строгого включения**).
- Всякое натуральное число  $n \in \mathbf{N}$  является целым, поэтому  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ . Но всякое целое число  $p \in \mathbf{Z}$  является рациональным, следовательно,  $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ . Всякое же рациональное число  $q \in \mathbf{Q}$  является действительным, поэтому  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ . Следовательно,  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ .
- Множество рациональных и иррациональных чисел не равны между собой и ни одно из них не является подмножеством другого.

## 1.2. Операции над множествами

- Пусть дано универсальное множество  $U$ . Множества  $A$  и  $B$  - произвольные подмножества множества  $U$ .
- **Объединением множеств  $A$  и  $B$**  называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$  (или обоим одновременно):  $A \cup B := \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in U)\}$
- Операция объединения множеств удовлетворяет коммутативному и ассоциативному законам:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

$$A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cup U = U.$$

Например

$$A = \{2, 3, 4, 6\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

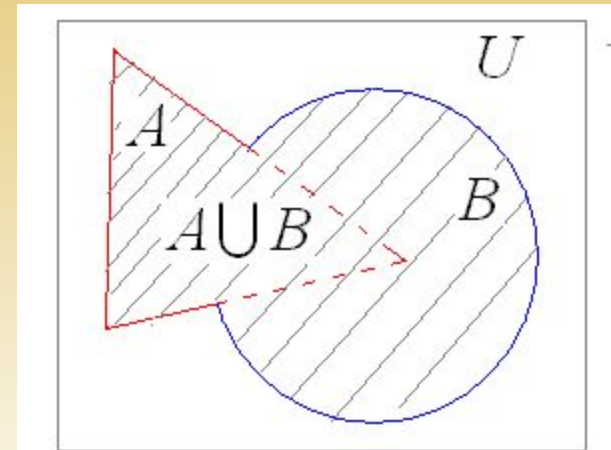


рис. 1.1



- **Пересечением множеств  $A$  и  $B$**  называется множество, содержащее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам одновременно:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

- **КОММУТАТИВНЫЙ и АССОЦИАТИВНЫЙ ЗАКОНЫ:**

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

- **ДИСТРИБУТИВНЫЙ ЗАКОН:**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

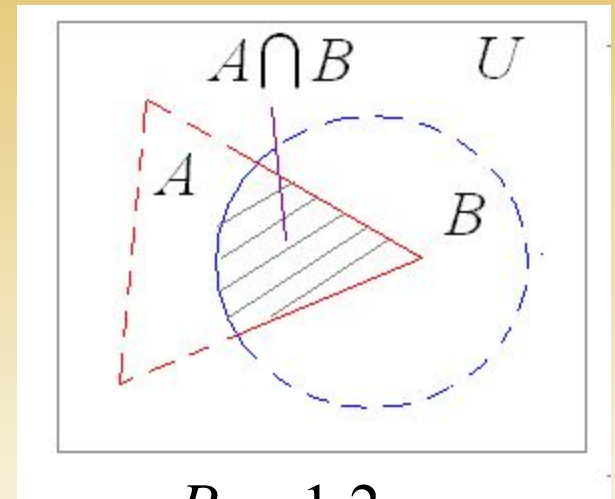
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap U = A.$$

*Например*

$$A = \{1, 3, 7, 8\}, \quad B = \{2, 3, 4, 8\}$$

$$A \cap B = \{3, 8\}$$



*Рис. 1.2*

- **Разностью двух множеств  $A$  и  $B$**  называется множество, содержащее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат  $B$ , но принадлежат  $A$  :

$$B \setminus A := \{x \mid x \in B, x \notin A\}. \quad (\text{Рис. 1.3})$$

- Разность  $U \setminus A$  называется дополнением множества  $A$  до универсального множества  $U$ :  

$$\bar{A} := U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}.$$

$$A \cup \bar{A} = U, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad \overline{\bar{A}} = A, \quad \overline{\emptyset} = U, \quad \bar{U} = \emptyset.$$

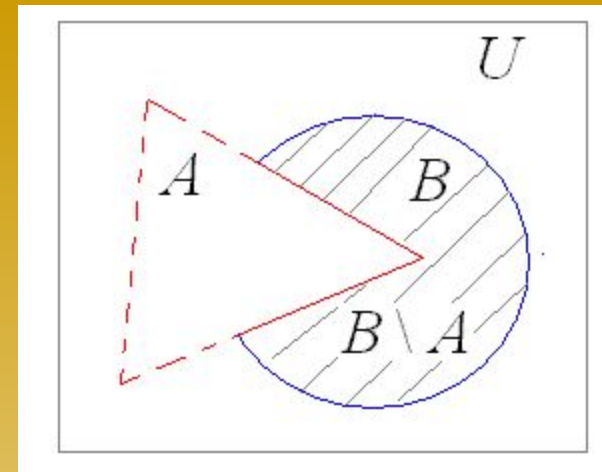


Рис. 1.3

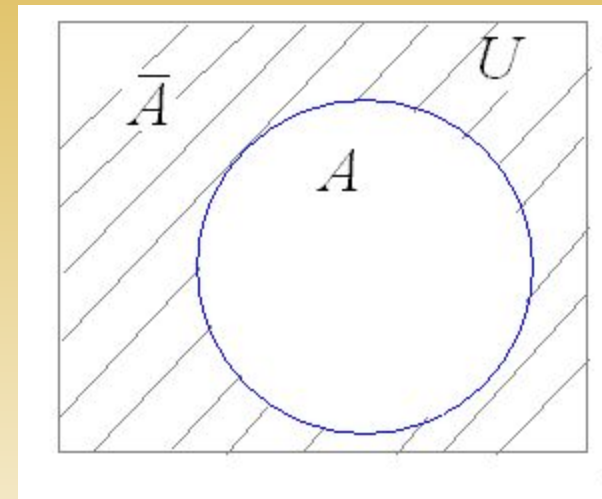


Рис. 1.4

*Например:  $\mathbf{Z}$  – множество целых чисел  $p$ .  
 Примем это множество за универсальное  
 и рассмотрим два его подмножества*

$$A = \{p \mid 0 < p < 30\}, \quad B = \{p \mid 10 < p < 40\}.$$

$$A \cup B = \{p \mid 0 < p < 40\}, \quad A \cap B = \{p \mid 10 < p < 30\},$$

$$B \setminus A = \{p \mid 30 < p < 40\}.$$

- Пара элементов  $(x; y)$ ,  $x \in A$ ,  $y \in B$ , называется упорядоченной, если указан порядок записи элементов  $x$  и  $y$ .  
Считается, что  $(x_1; y_1) = (x_2; y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$
- Элементы  $x$  и  $y$  упорядоченной пары  $(x; y)$  называются **координатами этой пары**.
- **Декартовым произведением** двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар:  $A \times B := \{(x; y) \mid \forall x \in A, \forall y \in B\}$
- Если  $A=B$ , то  $A \times A = A^2$  называют декартовым квадратом.

*Например:*  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4\}$

$$A \times B = \{(1;3), (1;4), (2;3), (2;4), (3;3), (3;4)\},$$

$$B \times A = \{(3;1), (3;2), (3;3), (4;1), (4;2), (4;3)\}$$

Боковую поверхность прямого кругового цилиндра радиусом  $R=1$  и высотой  $H$  можно задать декартовым произведением  $A \times B$ , где

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad B = \{z \in \mathbf{R} \mid 0 \leq z \leq H\}$$

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 3\};$$

$$B = \{y \in \mathbf{R} \mid 1 \leq y \leq 2\}.$$

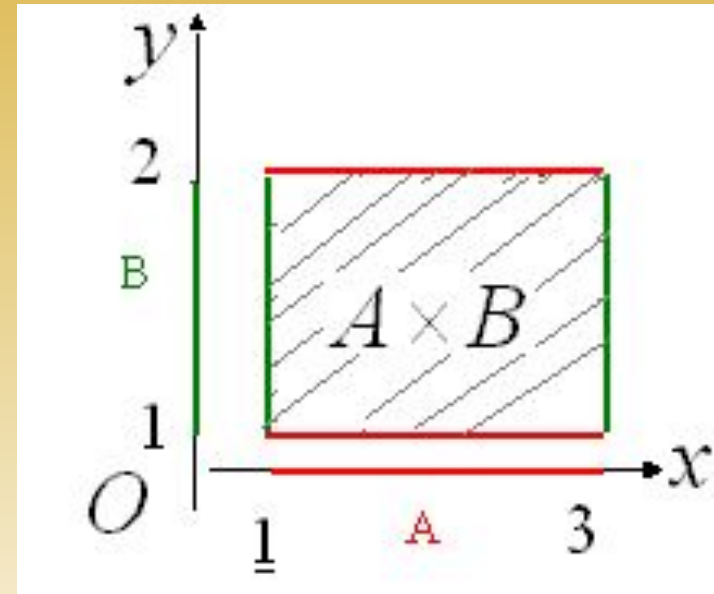


Рис.1.5

# 1.3. Отображение множеств. Эквивалентность множеств

- Пусть  $A, B$  произвольные множества и  $f$  - закон (правило), по которому каждому элементу  $a \in A$  ставится в соответствие единственный элемент  $b \in B$ . Тогда говорят, что задано **отображение**  $f$  множества  $A$  в множество  $B$ , или **оператор**  $f$ , переводящий множество  $A$  в множество  $B$ . ( $f : A \rightarrow B, A \xrightarrow{f} B$ )
- Элемент  $b$ , в который отображен  $a$ , называют образом элемента  $a$  при отображении  $f$  и обозначают  $f(a)$ . Элемент  $a$  называют прообразом элемента  $f(a)$ .

$$f : A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall a \in A \exists b \in B : b = f(a)$$

- Множество образов всех элементов  $a$  при отображении  $f$  называют образом множества  $A$ :  $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subset B$
- Задание отображения предполагает задание тройки  $(A, f, B)$ , где  $A$  - отображаемое множество;  $B$  - множество значений отображения;  $f$  - закон, по которому каждому элементу  $a \in A$  ставится в соответствие элемент  $b \in B$ .

- Отображение  $f : A \rightarrow B$  называют **взаимно однозначным** или **биективным**, если каждый элемент  $b \in B$  является образом только одного элемента  $a \in A$ .

*взаимно однозначное отображение*  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall b \in B \quad \exists a \in A: b = f(a),$$

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

- Отображение  $f^{-1}$  называют **обратным к отображению  $f$** , если  $a \xrightarrow{f} b$ ,  $b \xrightarrow{f^{-1}} a$ . т.е. элементу ставится в соответствие тот элемент, образом которого при отображении  $f$  является  $b$ .

$$f^{-1} : B \rightarrow A \Leftrightarrow$$

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A: a = f^{-1}(b)$$

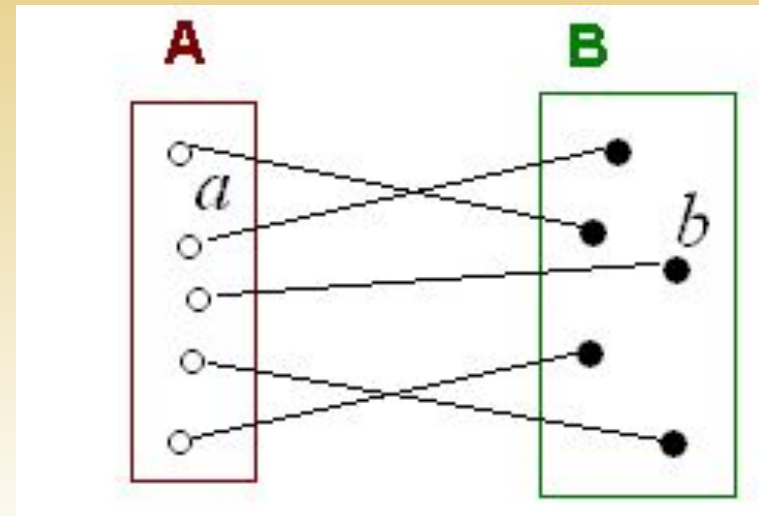


Рис. 1.6

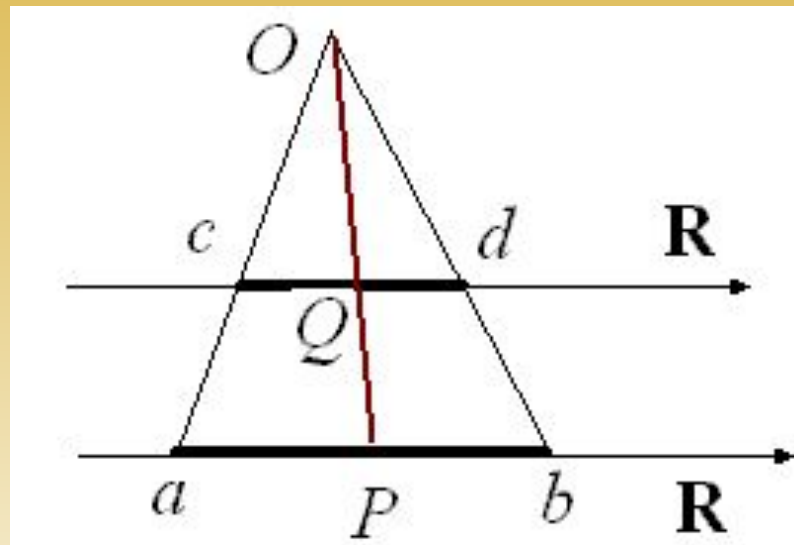
- Два множества  $A$  и  $B$  называются **эквивалентными (равномощными)**, если существует хотя бы одно взаимно однозначное отображение одного множества на другое. (обозначение:  $A \sim B$  ).
- Свойства отношения эквивалентности:
  - 1) **рефлексивность**  $A \sim A$ );
  - 2) если  $A \sim B$ , то  $B \sim A \forall A, B$  (симметричность);
  - 3) если  $A \sim B, B \sim C$ , то  $A \sim C \forall A, B, C$  (транзитивность).
- Всякое множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется **счетным**.
- Например,  $\mathbf{N}$  - множество натуральных чисел,  $A$  - множество четных натуральных чисел. Взаимно однозначное соответствие с помощью соотношения  $n \leftrightarrow 2n$

1, 2, ...,  $n$ , ...

⊠ ⊠ ⊠

2, 4, ...,  $2n$ , ...

*Пример. Показать, что множество точек любых двух отрезков  $[a;b]$  и  $[c;d]$  эквивалентны между собой.*



*Рис. 1.7*