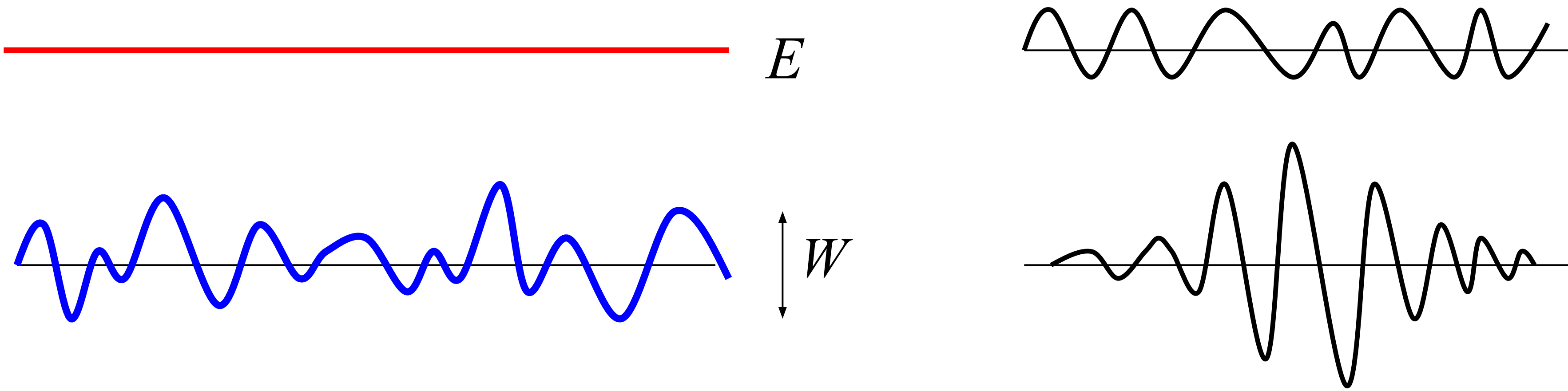
Переход Андерсона: теория и численный эксперимент

И.М.Суслов

Институт физических проблем им. П.Л. Капицы РАН

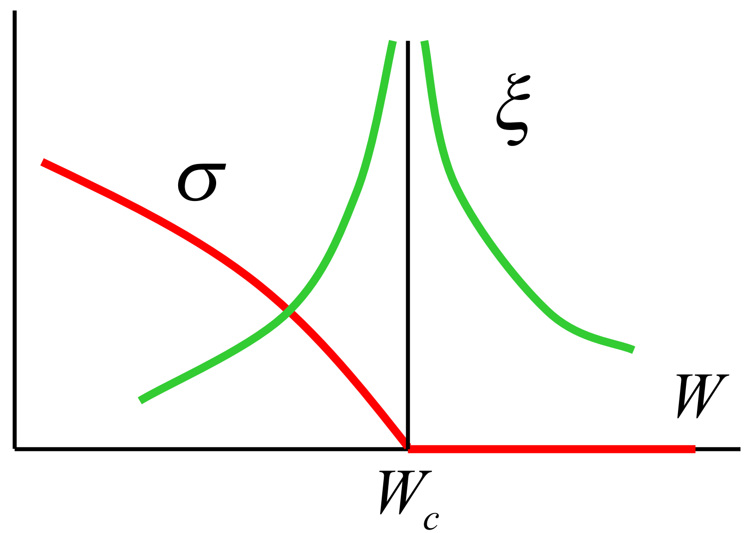
Переход Андерсона



$$\sigma \sim \tau^{s}$$

$$\xi \sim |\tau|^{-\nu}$$

$$\tau \propto W_c - W$$



Современная ситуация:

Численный счет противоречит всей прочей информации о критическом поведении

I. M. Suslov, cond-mat/0105325.

P. Markos,

Numerical analysis of the Anderson localization

acta physica slovaca 56, 561 (2006);

cond-mat/0609580.

Самосогласованная теория Вольхардта-Вольфле дает результат

$$\nu = \begin{cases} 1/(d-2), & 2 < d < 4 \\ 1/2, & d > 4 \end{cases}, \qquad s = 1, \quad 2 < d < \infty$$

который:

(а) выделяет значения $d_{c1}=2$ и $d_{c2}=4$ как верхнюю и нижнюю критические размерности;

(б) согласуется с результатом для $d=2+\varepsilon$

$$\nu = \frac{1}{\epsilon} + 0 \cdot \epsilon^0 + 0 \cdot \epsilon^1 + O(\epsilon^2);$$

(в) удовлетворяет скейлинговому соотношению $s=\nu(d-2)$ для $d<d_{c2}$;

(г) дает независящие от d индексы для $d>d_{c2}$;

(д) согласуется с результатами $s=1$ и $\nu=1/2$ для $d=\infty$.

(е) согласуется с экспериментальными результатами $s\approx1$ и $\nu\approx1$ для $d=3$.

Гипотеза о том, что результаты теории Вольхардта-Вольфле являются точными:

H. Kunz, R. Souillard, J. de Phys. Lett. **44**, L506 (1983).

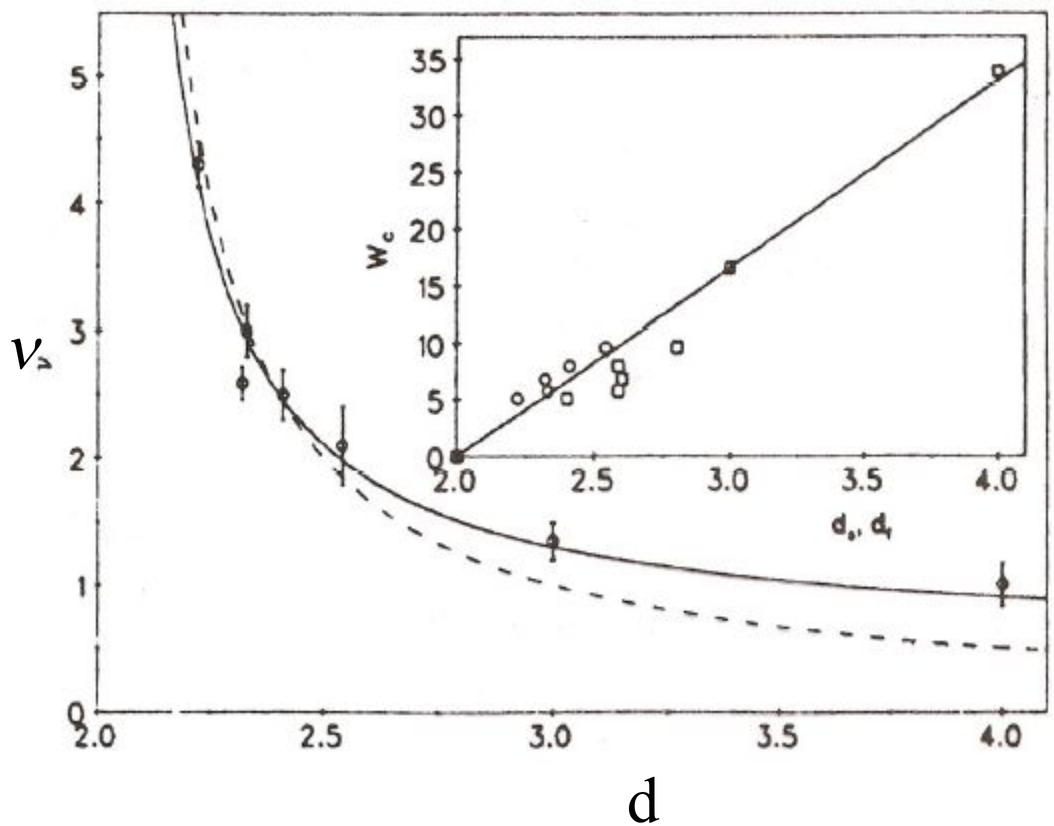
Вывод без грубых аппроксимаций:

И. М. Суслов, ЖЭТФ **108**, 1686 (1995).

Численные результаты описываются эмпирической формулой

$$\nu = \frac{0.8}{d-2} + 0.5$$

M. Schreiber, H. Grussbach, Phys. Rev. Lett. **76**, 1687 (1996).



Другие результаты для d=3 :

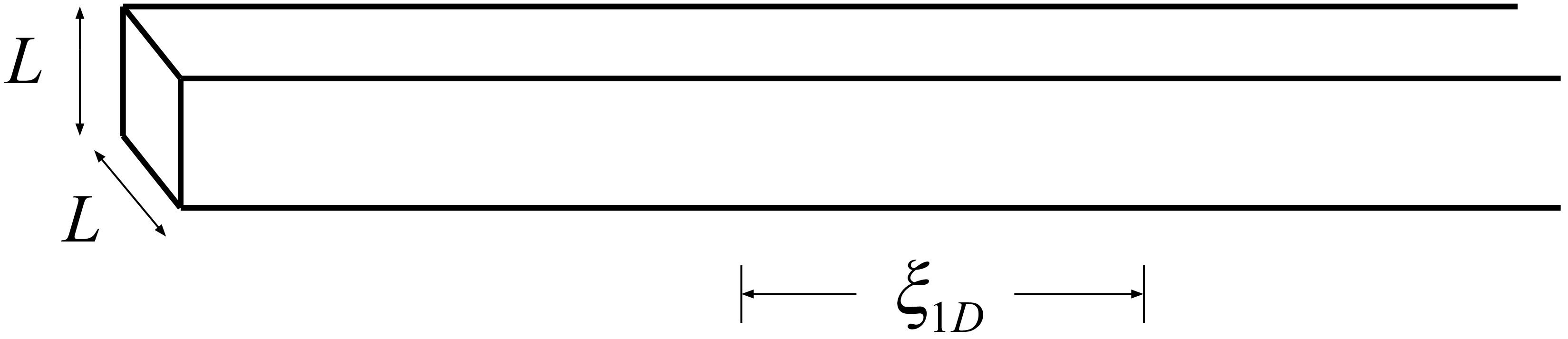
$$\nu = 1.54 \pm 0.08$$

$$\nu = 1.45 \pm 0.08$$

$$\nu = 1.40 \pm 0.15$$

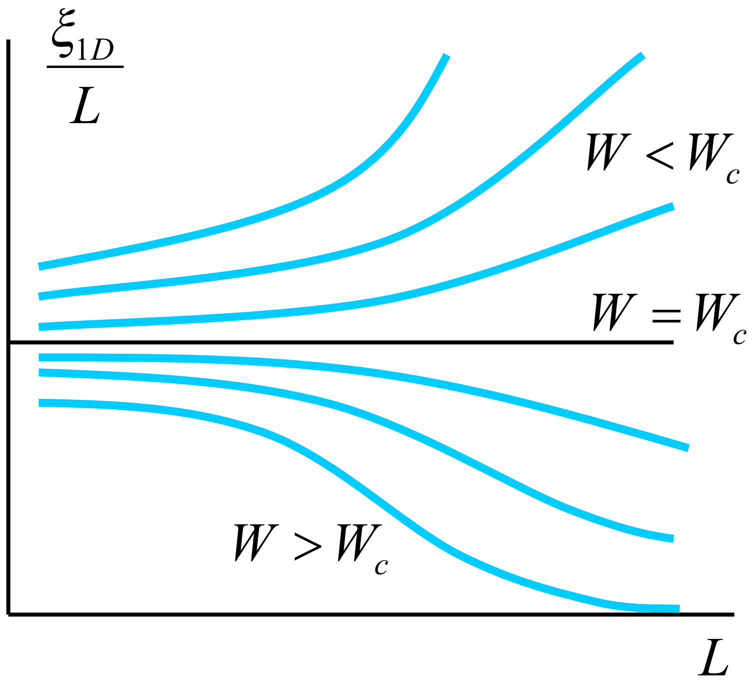
$$\nu = 1.57 \pm 0.02$$

Finite-size scaling



$$\frac{\xi_{1D}}{L} \to \infty$$ (дальний порядок)

$$\frac{\xi_{1D}}{L} \to 0$$ (ближний порядок)

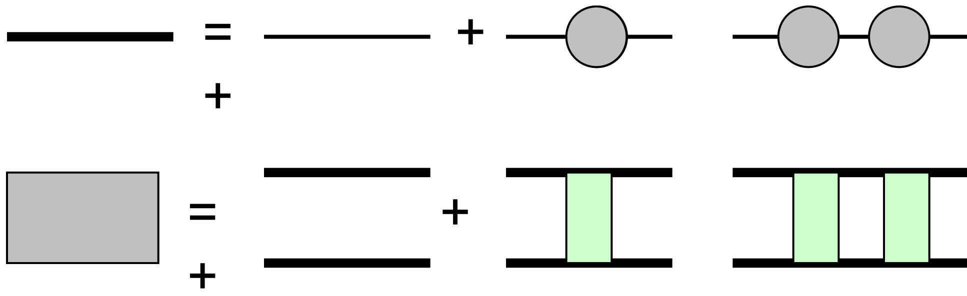


Скейлинговое соотношение

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = F\left(\frac{L}{\xi}\right)$$

Теория Вольхардта-Вольфле

Основана на существовании
диффузионного полюса
в неприводимой
четырехвостке



$$U_{\mathbf{kk'}}(\mathbf{q}) = U^{reg}_{\mathbf{kk'}}(\mathbf{q}) + \frac{F(\mathbf{k},\mathbf{k'},\mathbf{q})}{-i\omega + D(\omega,\mathbf{k}+\mathbf{k'})(\mathbf{k}+\mathbf{k'})^2}$$

играющей роль вероятности перехода $W_{\mathrm{kk'}}$ в квантовом кинетическом уравнении.

Аппроксимация типа τ - приближения $D \sim \langle U \rangle^{-1}$ дает уравнение самосогласования

$$D \sim \left[U_0 + F_0 \int \frac{d^d q}{-i\omega + D(\omega,q)q^2} \right]^{-1}$$

Уравнение самосогласования

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \int\limits_{|q|<\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-i\omega/D) + q^2}$$

Базовый интеграл

$$I(m) = \int\limits_{|q|<\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 + q^2}$$

конечен при m=0 только для d>2.

Металлическая фаза: D=const при $\omega \to 0$

$$D = D_{\min}\left(\frac{E^2}{W^2} - I(0)\Lambda^{2-d}\right) = D_{\min}\tau$$

т.е. s=1.

Уравнение самосогласования

$$\frac{E^2}{W^2} = \frac{D}{D_{min}} + \Lambda^{2-d} \int\limits_{|q|<\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-i\omega/D) + q^2}$$

Диэлектрическая фаза: $D = -i\omega\,\xi^2$ при $\omega \to 0$ ($m=\xi^{-1}$)

$$I(m) = \int\limits_{|q|<\Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 + q^2} = \begin{cases} c_d/m^{2-d}\,, & d<2 \\ c_2 \ln(\Lambda/m)\,, & d=2 \\ I(0) - c_d m^{d-2}\,, & 2<d<4 \\ I(0) - c_4 m^2 \ln(\Lambda/m)\,, & d=4 \\ I(0) - c_d m^2 \Lambda^{d-4}\,, & d>4 \end{cases}$$

$$\xi \sim a\frac{E^2}{W^2}\,, \qquad d=1$$

$$\xi \sim a \exp\left(2\pi\frac{E^2}{W^2}\right)\,, \qquad d=2$$

$$\xi \sim a|\tau|^{-\nu}\,, \qquad d>2$$

Квазиодномерные системы

Для описания квазиодномерных систем базовый интеграл достаточно представить в виде ($q_\perp = (q_1, q_2, \ldots, q_{d-1})\,, \qquad q_{||} = q_d$) :

$$I(m) = \frac{1}{L^{d-1}} \sum_{|q_\perp|<\Lambda} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dq_{||}}{2\pi} \frac{1}{m^2 + q_{||}^2 + q_\perp^2}\,, \qquad m^{-1} = \xi_{1D}$$

Член с $q_\perp = 0$ расходится при m → 0 .

Разбиение интеграла $I(m) = \frac{1}{L^{d-1}} \frac{1}{\pi m} \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{m} +$

$$+\frac{1}{\pi L^{d-1}} \sum_{\substack{q_\perp \neq 0 \\ |q_\perp|<\Lambda}} \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+q_\perp^2}} \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{\sqrt{m^2+q_\perp^2}} - \frac{1}{|q_\perp|} \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{|q_\perp|} \right) +$$

$$+\frac{1}{\pi L^{d-1}} \sum_{\substack{q_\perp \neq 0 \\ |q_\perp|<\Lambda}} \frac{1}{|q_\perp|} \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{|q_\perp|} \equiv I_1(m) + I_2(m) + I_3(0)$$

Преобразование интегралов:

$$I_1(m) = \frac{1}{L^{d-2}}\left\{\frac{1}{2mL} + O\left(\frac{a}{L}\right)\right\}$$

$$I_2(m) = \frac{1}{L^{d-2}} H_0(mL) + O\left(m^2 \Lambda^{d-4}\right)$$

$$H_0(z) = \frac{1}{4\pi}\sum_{\vec{s}\neq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{|\vec{s}|^2 + (z/2\pi)^2}} - \frac{1}{|\vec{s}|}\right)$$

$$I_3(0) = \Lambda^{d-2}\left\{b_0 + b_1\left(\frac{a}{L}\right)^{d-2} + b_2\left(\frac{a}{L}\right)^{d-1} + \ldots\right\}$$

что надо подставить в уравнение самосогласования

$$\Lambda^{d-2}\frac{E^2}{W^2} = I(m)$$

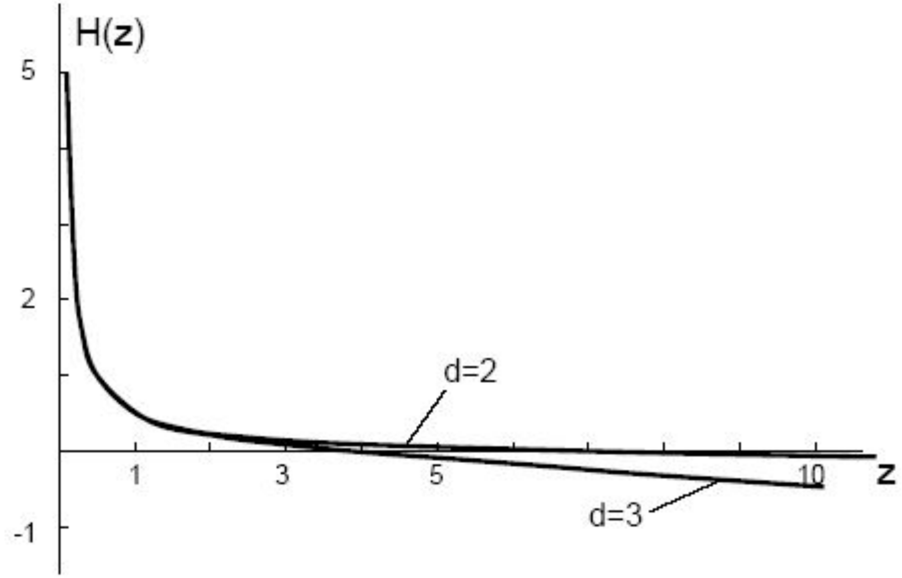
Уравнение самосогласования

$$\left(\frac{L}{a}\right)^{d-2}\left[\tau + O(m^2a^2)\right] + O\left(\frac{a}{L}\right) = b_1 + H_0(mL) + \frac{1}{2mL}$$

в пределе $a \to 0$ дает скейлинговые соотношения

$$\pm c_d\left(\frac{L}{\xi}\right)^{d-2} = H\left(\frac{L}{\xi_{1D}}\right), \qquad d > 2$$

$$\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\xi}{L}\right) = H\left(\frac{L}{\xi_{1D}}\right), \qquad d = 2$$



Определение функции H(z):

$$H(z) = b_1 + \frac{1}{4\pi}\sum_{\vec{s}\neq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{|\vec{s}|^2 + (z/2\pi)^2}} - \frac{1}{|\vec{s}|}\right) + \frac{1}{2z}$$

$s_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

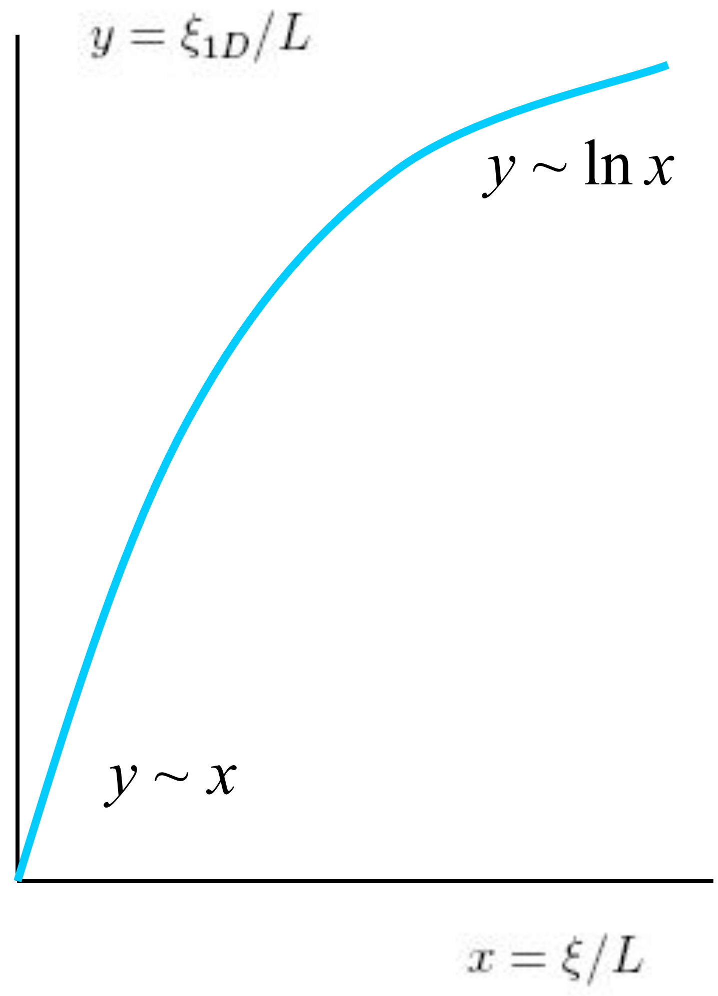
Двумерный случай

Используя асимптотики

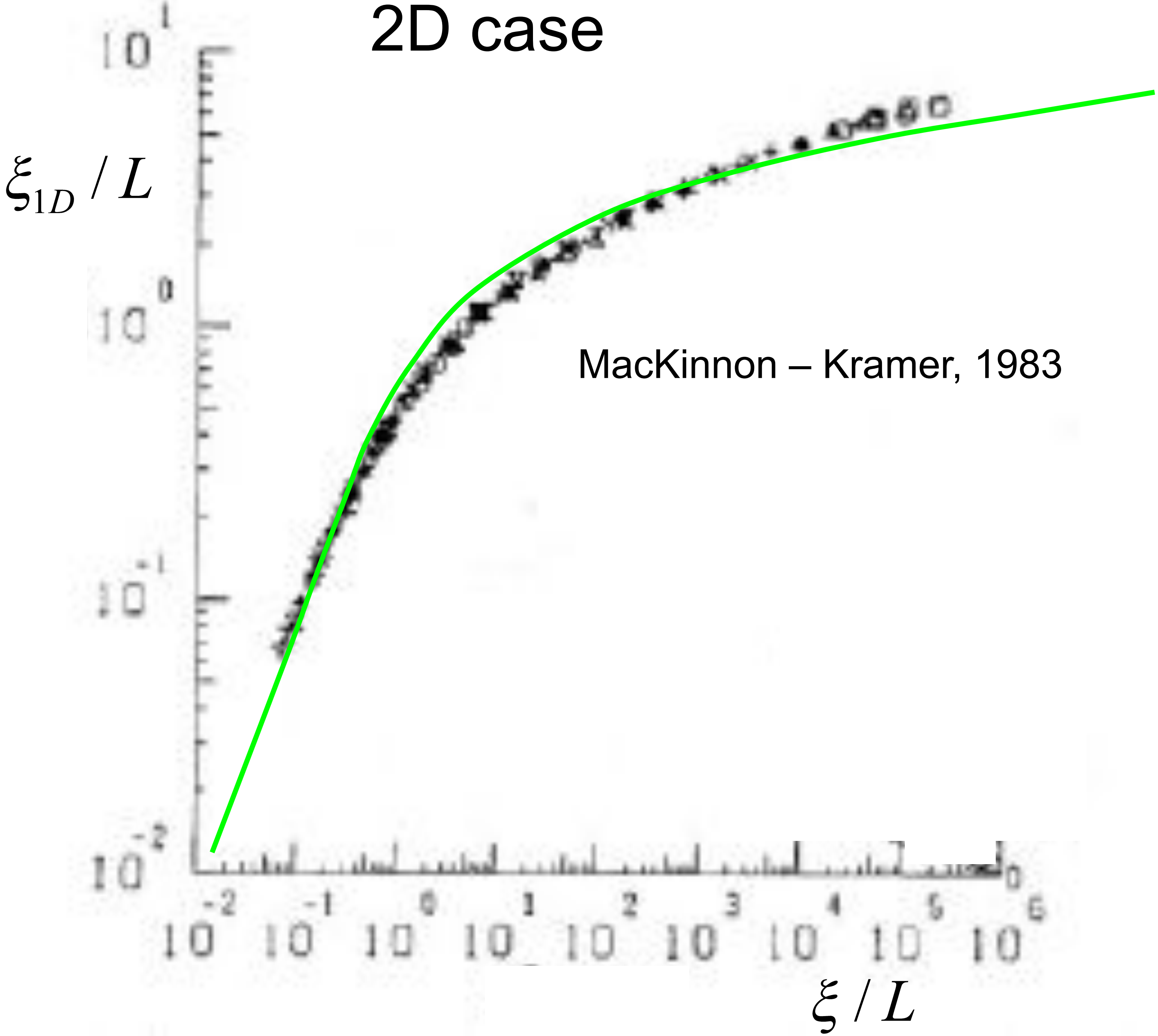
$$H(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2z}, & z \ll 1 \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln z + const, & z \gg 1 \end{cases}$$

имеем в переменных $y=\xi_{1D}/L$
и $x=\xi/L$

$$y = \begin{cases} (1/\pi)\ln x, & x \gg 1 \\ const \cdot x, & x \ll 1 \end{cases}$$

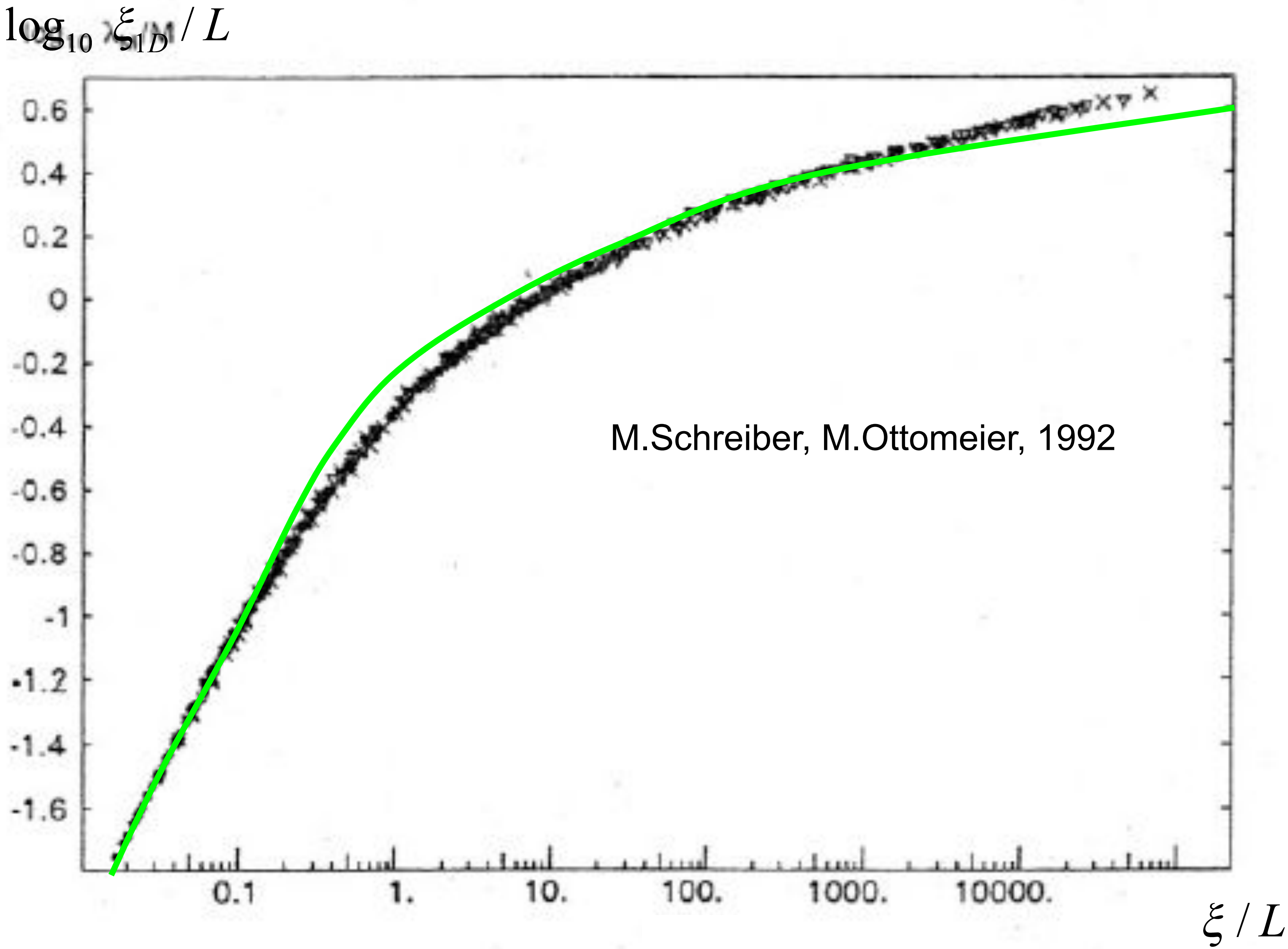


2D case



ξ_{1D} / L
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
MacKinnon – Kramer, 1983
10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3} 10^{4} 10^{5} 10^{6}
ξ / L

2D case


$\log_{10} \xi_{1D} / L$
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
-1.6
0.1
1.
10.
100.
1000.
10000.
M.Schreiber, M.Ottomeier, 1992
ξ / L

Трехмерный случай

Используя асимптотики

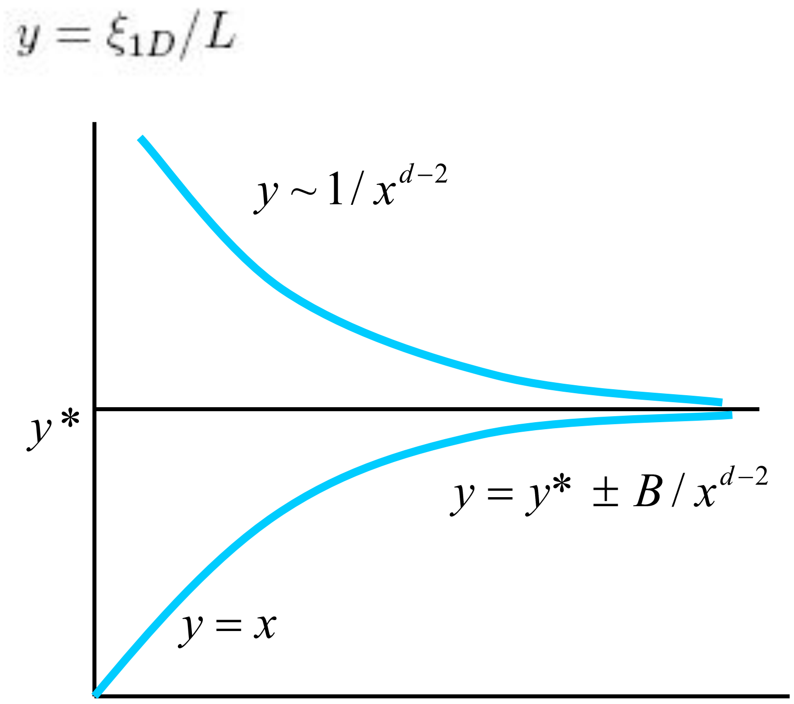
$$H(z) = \begin{cases} 1/2z\,, & z \ll 1 \\ -A(z - z^*)\,, & z \to z^* \\ -c_d z^{d-2}\,, & z \gg 1 \end{cases}$$

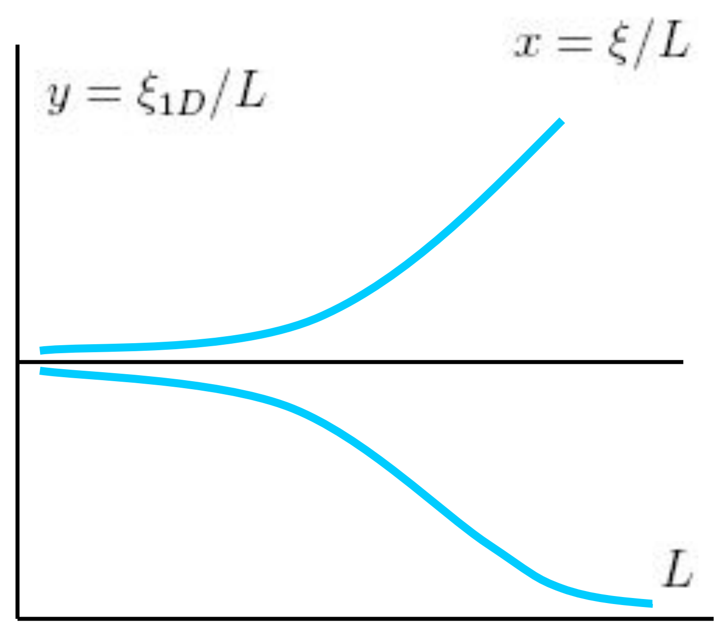
имеем в переменных $y=\xi_{1D}/L$
и $x=\xi/L$

$$y = \begin{cases} 2c_d/x^{d-2}\,, & y \gg 1 \\ y^* \pm B/x^{d-2}\,, & y \to y^* \\ x\,, & y \ll 1 \end{cases}$$

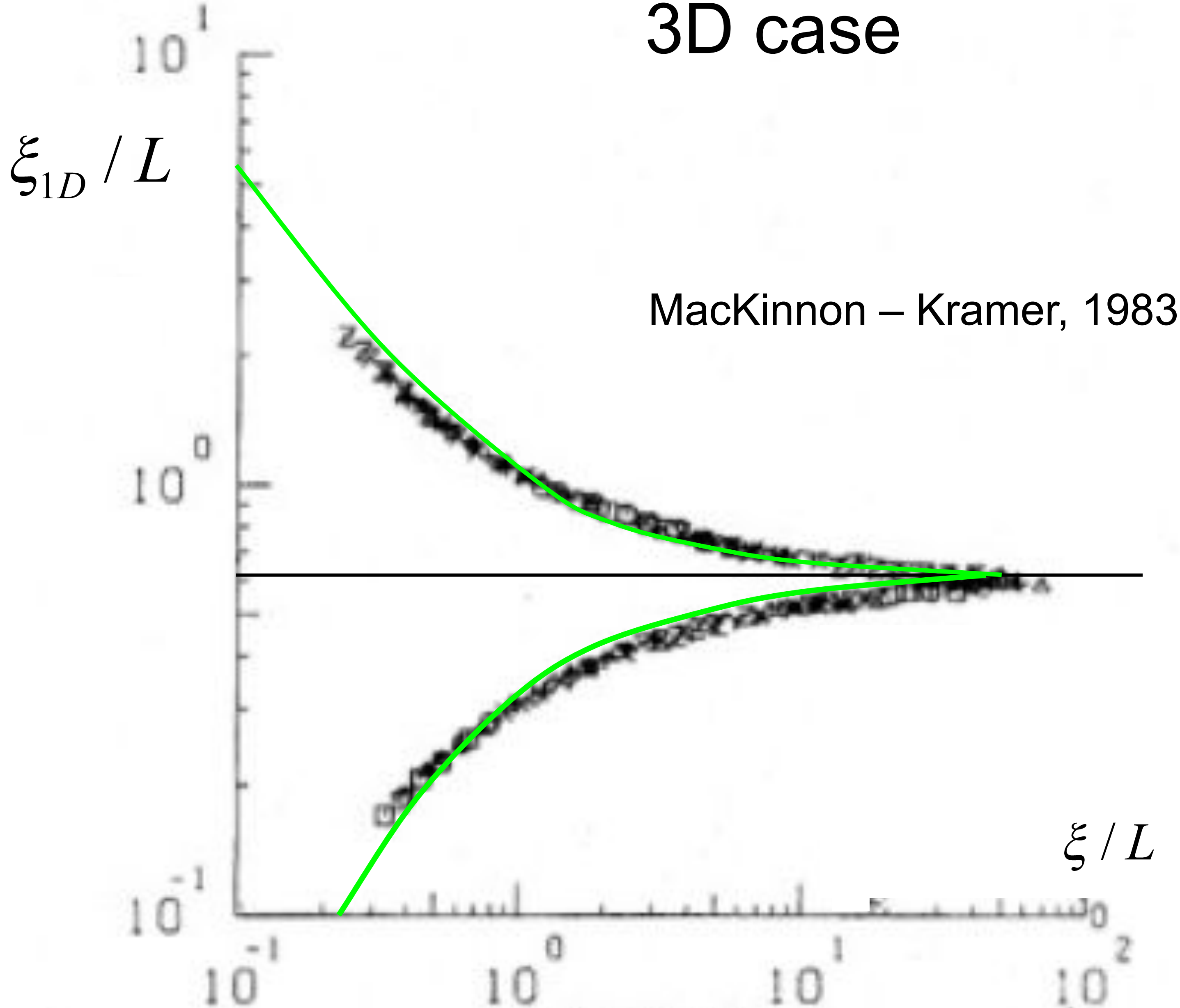
или для зависимостей от L

$$y = \frac{\xi_{1D}}{L} = \begin{cases} \sim \tau L^{d-2}\,, & y \gg 1 \\ y^* + const \cdot \tau L^{d-2}\,, & y \to y^* \\ \xi/L\,, & y \ll 1 \end{cases}$$

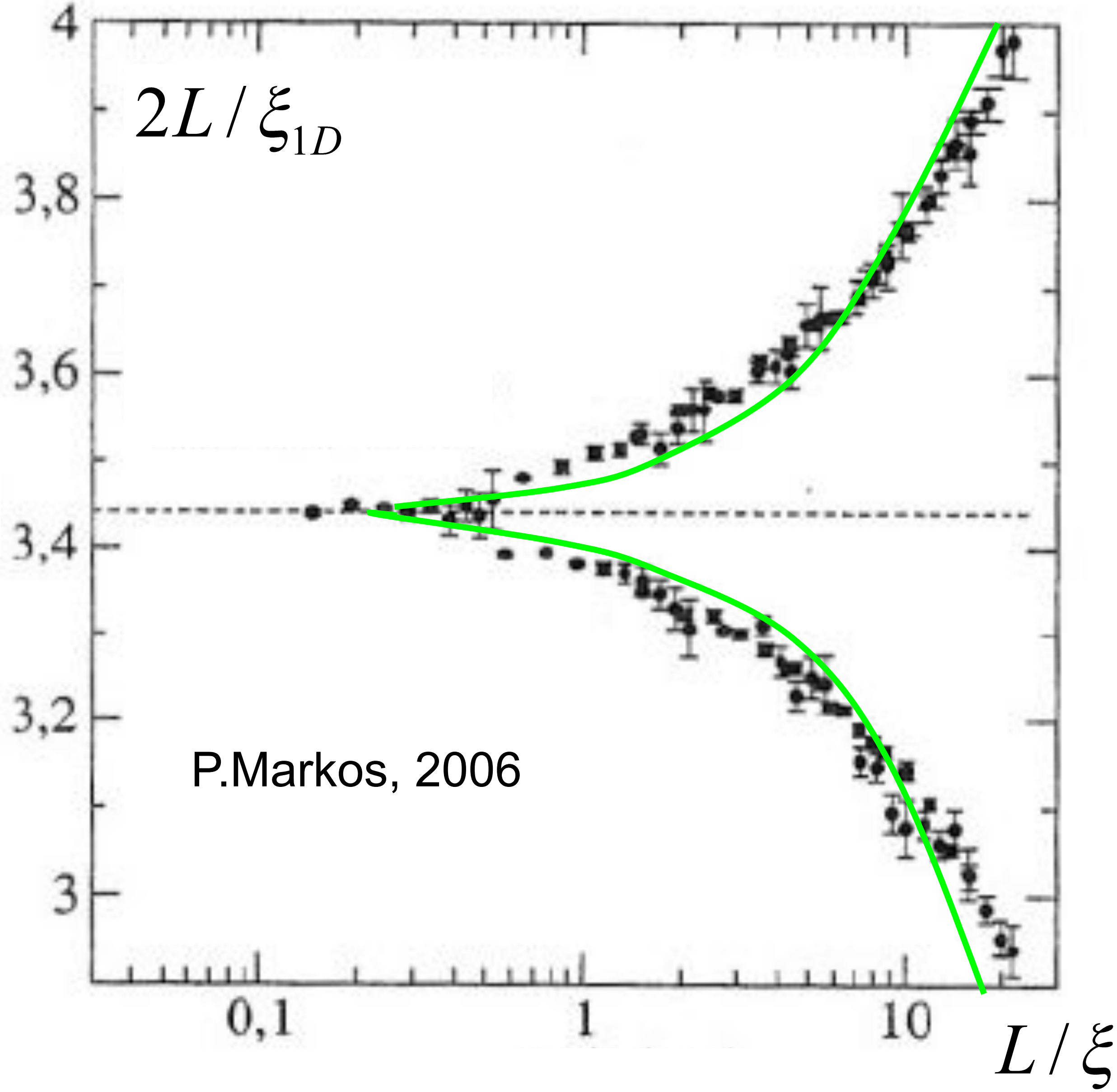




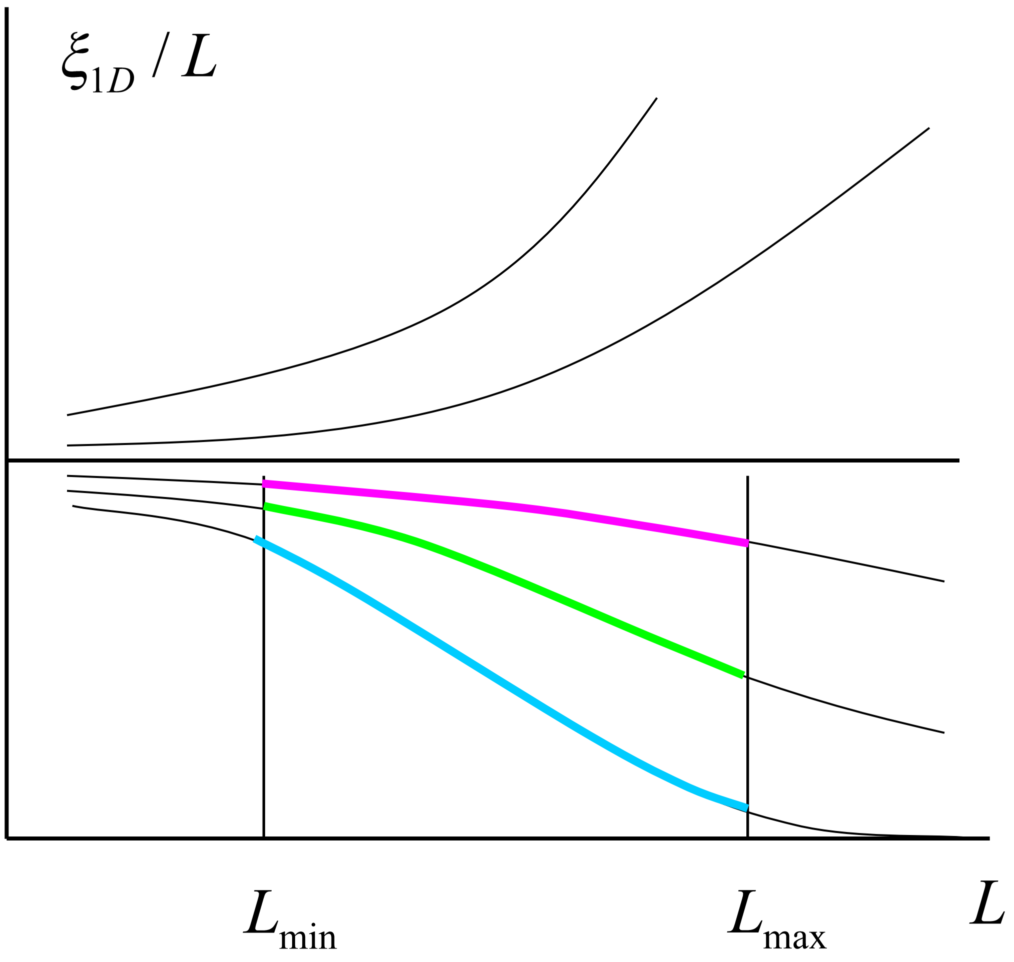
3D case



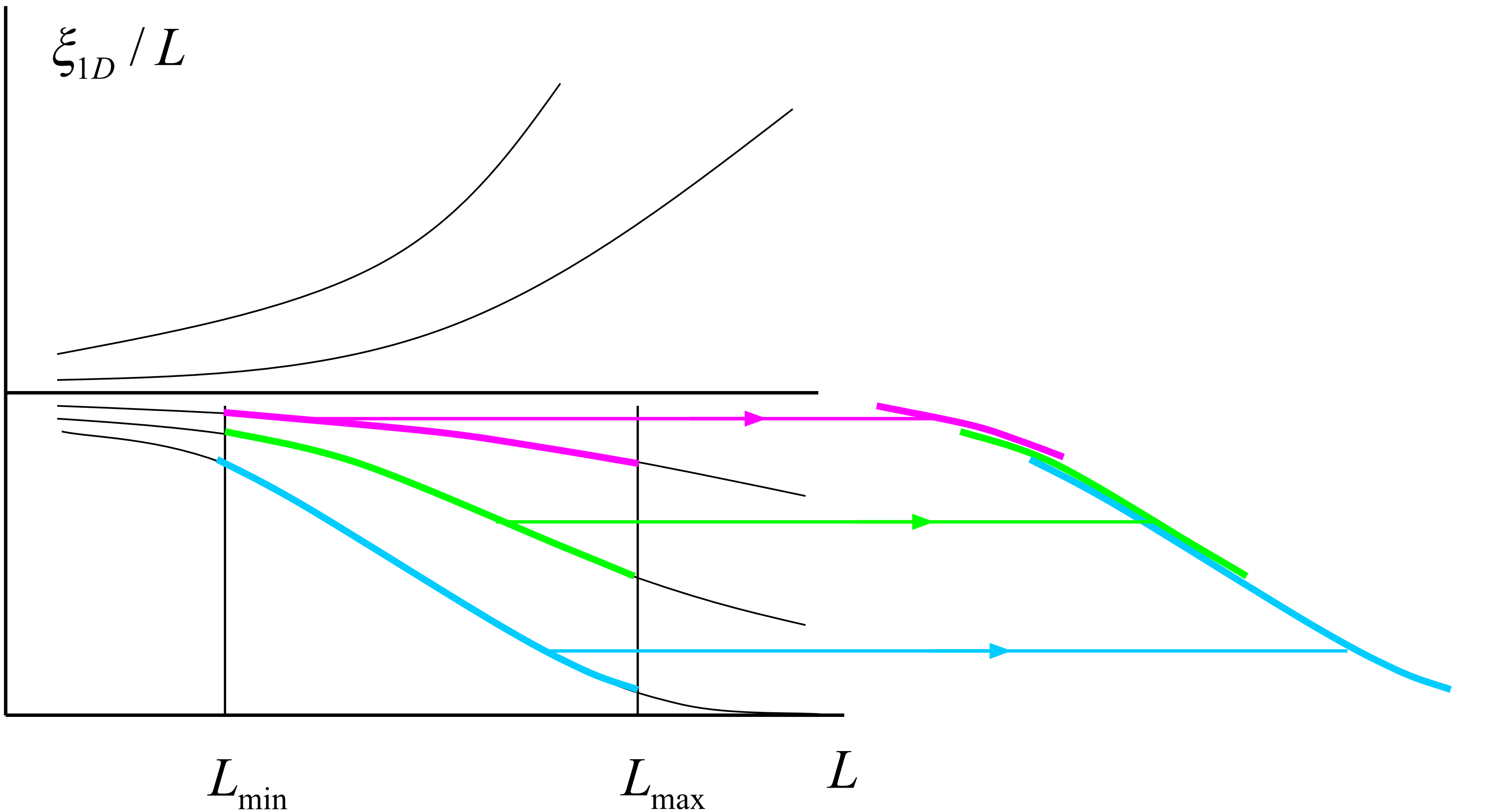
3D case



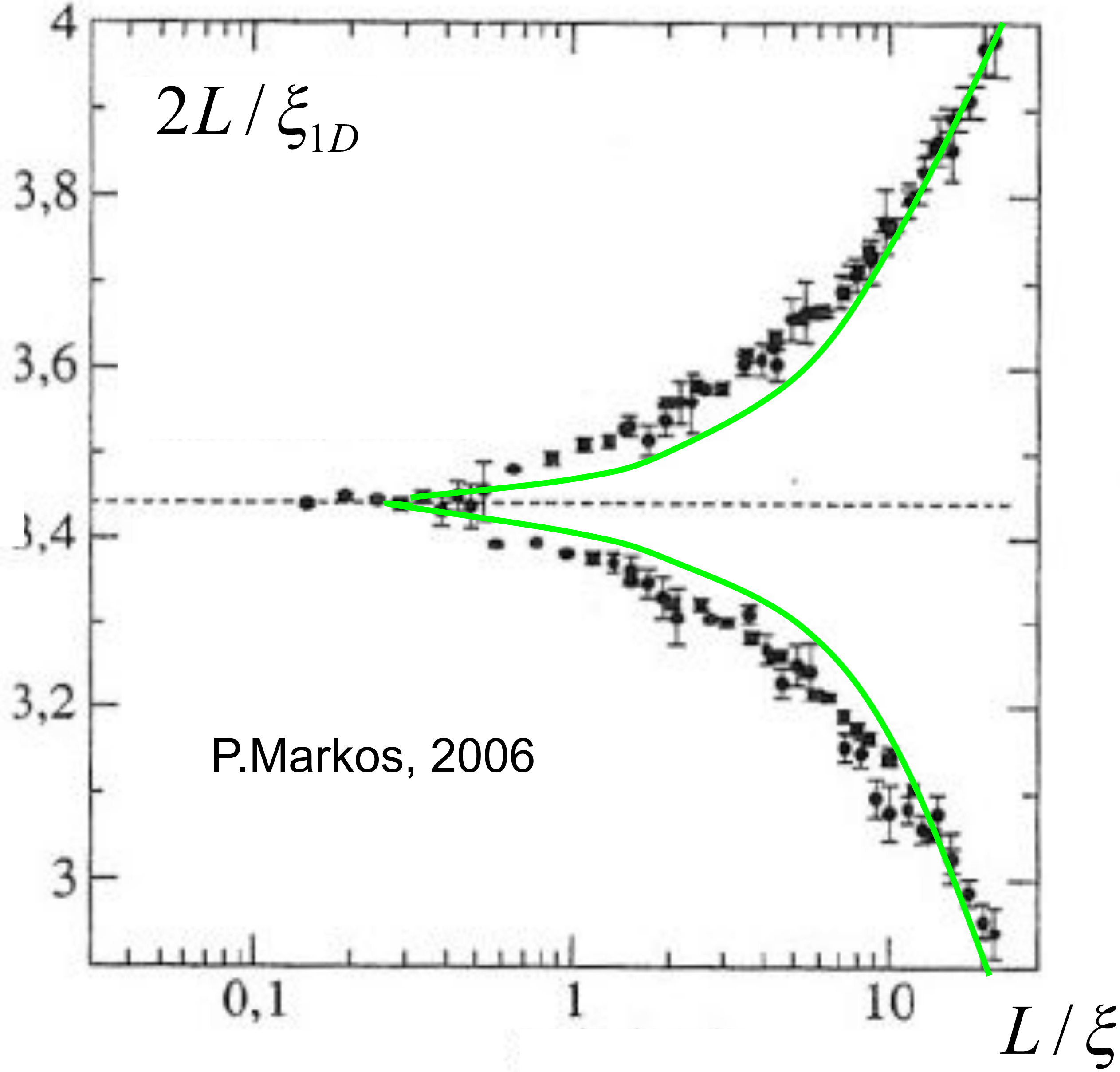
Построение скейлинговых кривых



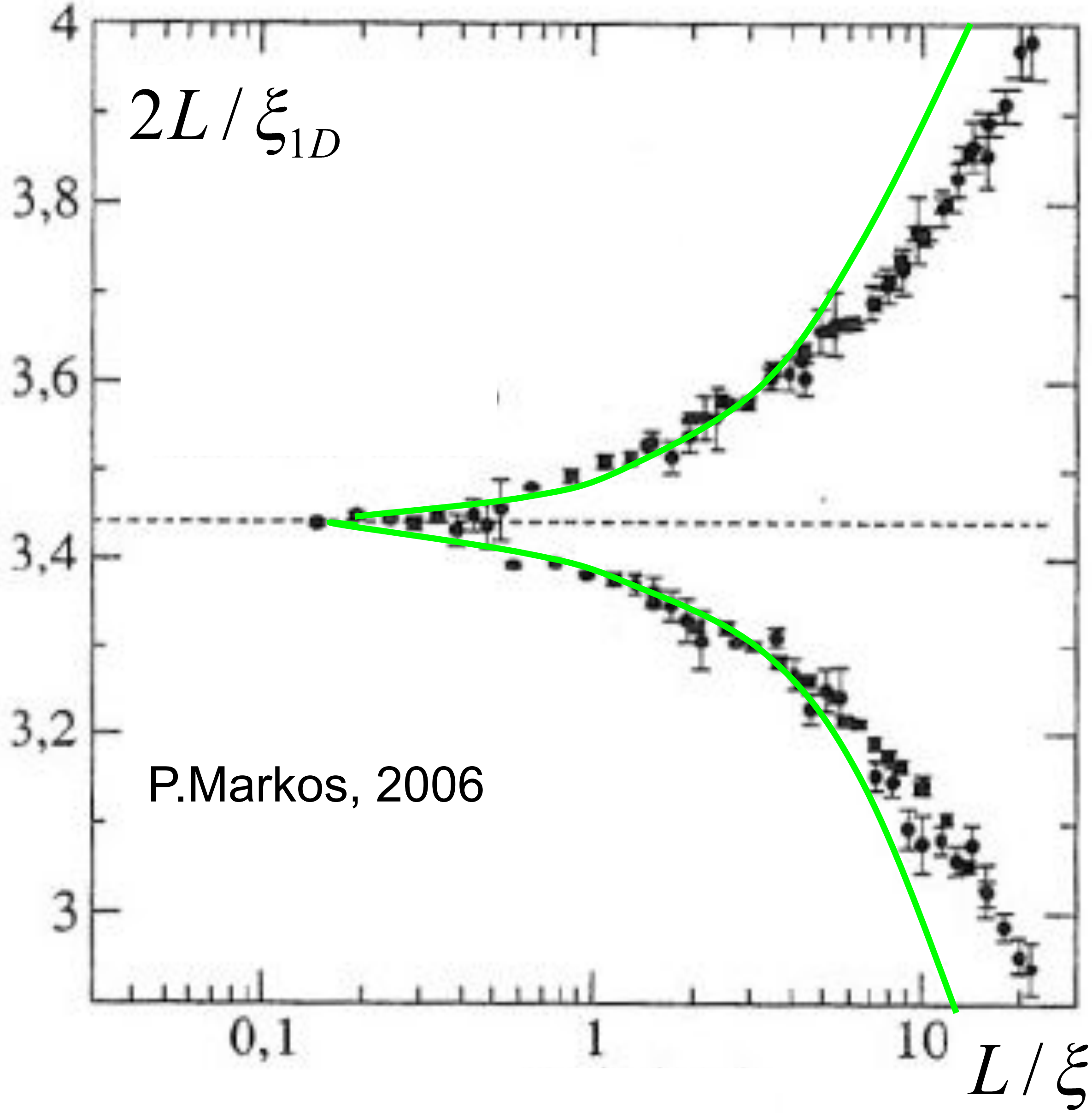
Построение скейлинговых кривых



3D case



3D case



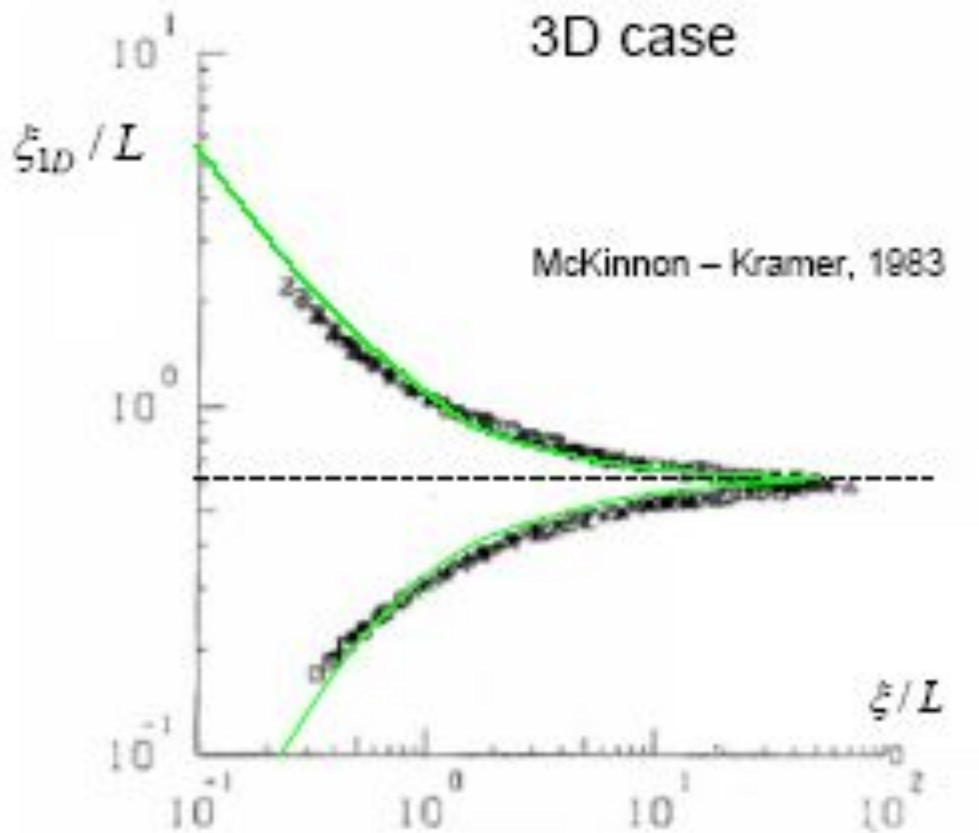
Почему численные эксперименты всегда дают $\nu > 1$?

A. MacKinnon, B. Kramer,
Phys. Rev. Lett. **47**, 1546 (1981).

$$\nu = 1.2 \pm 0.3$$

A. MacKinnon, B. Kramer,
Z. Phys. **53**, 1 (1983).

$$\nu = 1.50 \pm 0.05$$



Ситуация в окрестности перехода

Стандартные представления:

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = F\left(\frac{L^{1/\nu}}{\xi^{1/\nu}}\right) = F\left(\tau L^{1/\nu}\right) \approx A_0 + A_1 \tau L^{1/\nu} + \ldots$$

На самом деле:

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = y^* + A\left(\frac{L}{a}\right)^{d-2}\left[\tau - b_d \frac{a^2}{\xi_{1D}^2}\right] + O\left(\frac{a}{L}\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{\xi_{1D}}{L}\right)'_\tau = A_0 L^{d-2} + A_1 L^{d-6}}$$

В общем случае:

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = y^* + \tau\left\{A_0 L^{1/\nu} + A_1 L^{\omega_1} + A_2 L^{\omega_2} + \ldots\right\} + B_1 L^{-y_1} + B_2 L^{-y_2} + \ldots$$

В теории Вольхардта – Вольфле при d=3 :

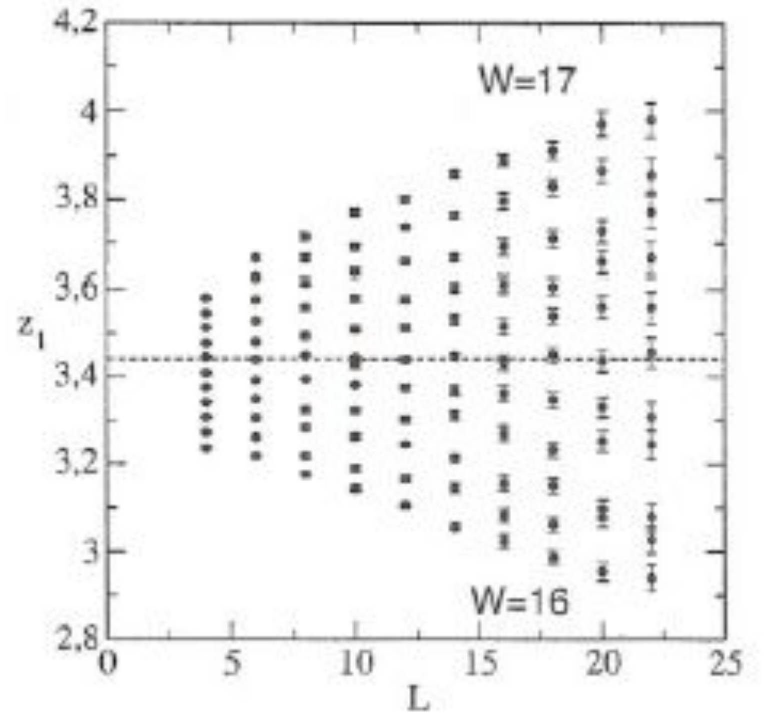
$$\frac{\xi_{1D}}{L} - y^* = A\tau \left(L + L_0\right)$$

(с точностью до членов, исчезающих при $L \to \infty$).

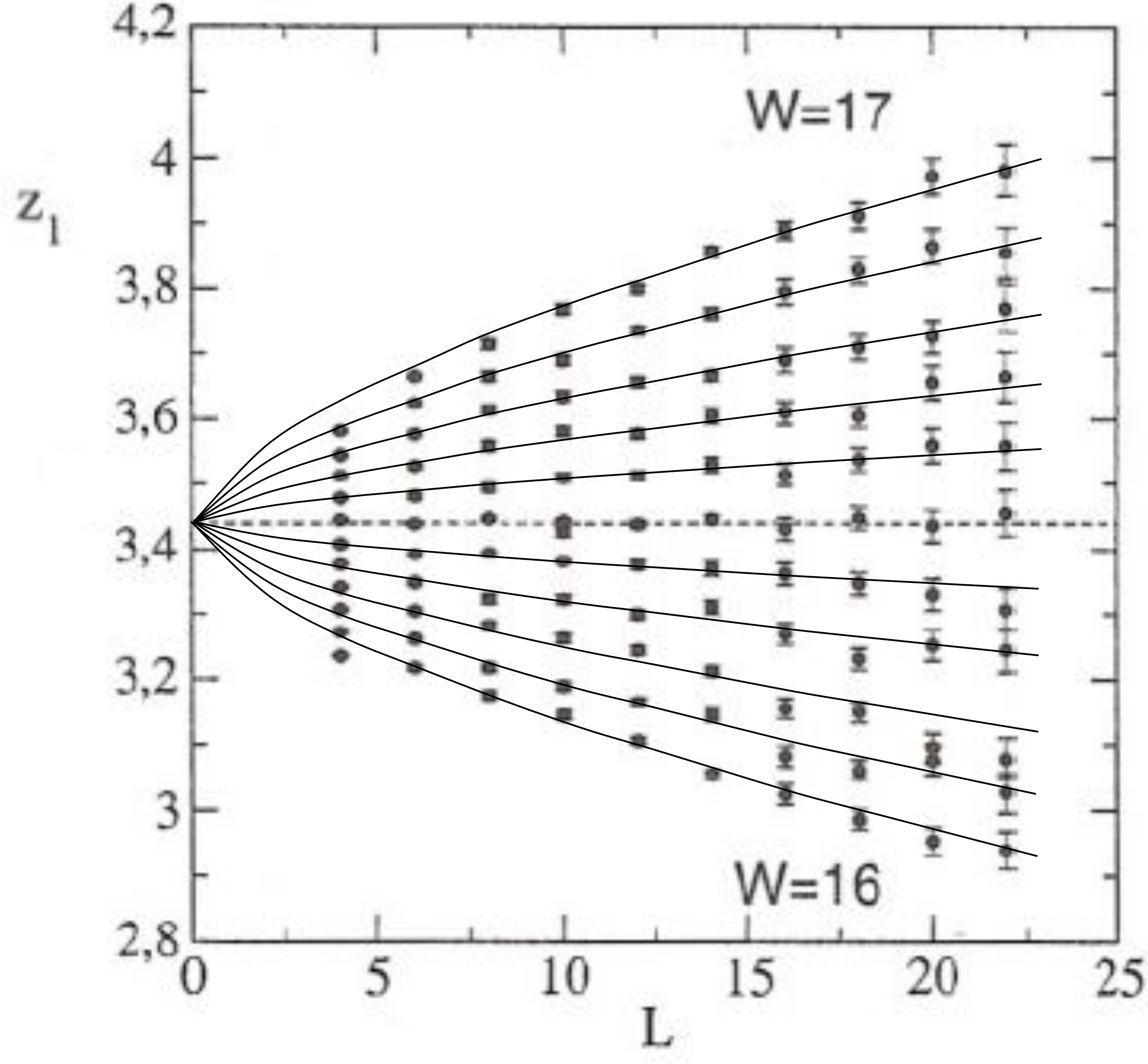
Вместо стандартного

$$\frac{\xi_{1D}}{L} - y^* = A\tau\, L^{1/\nu}$$

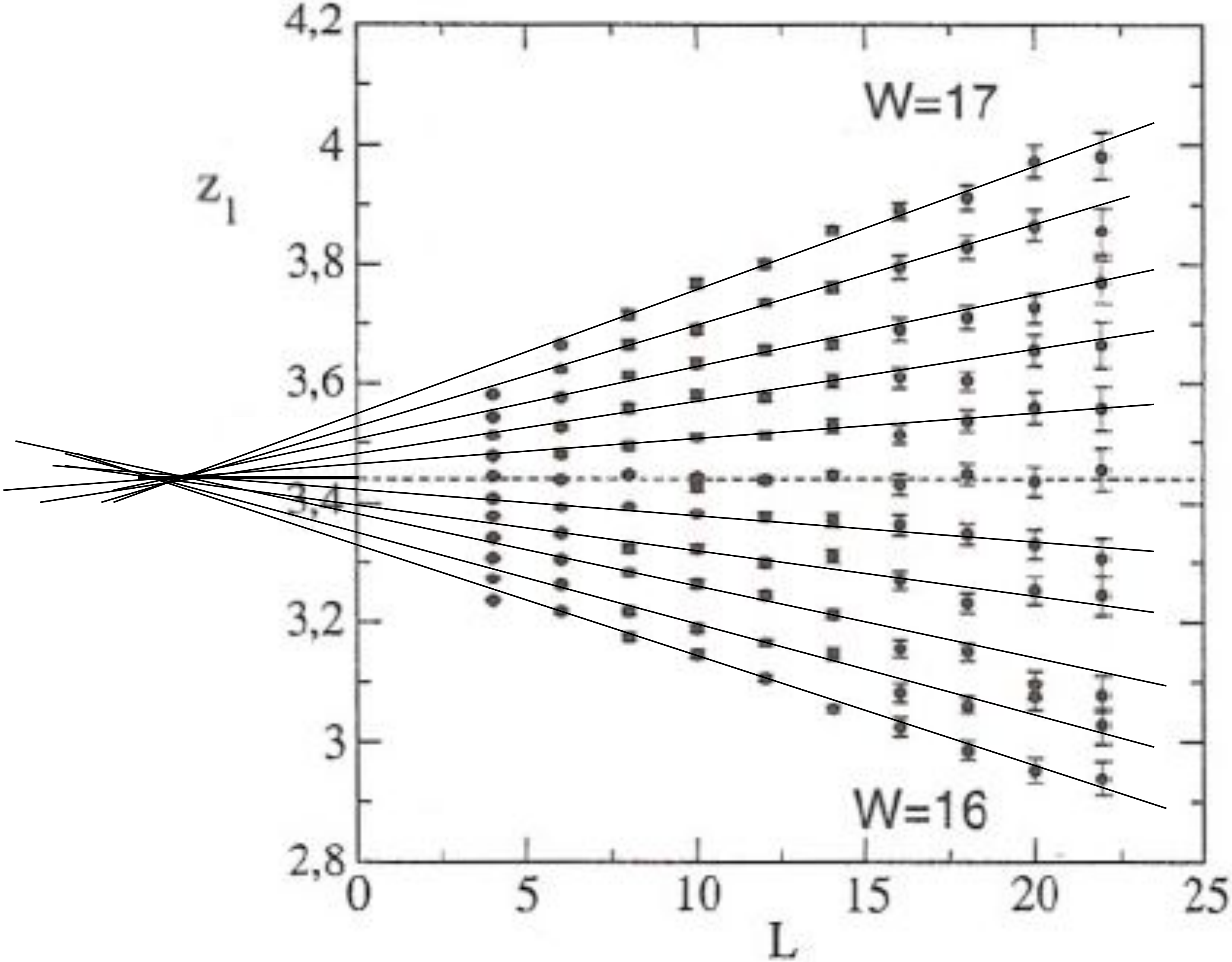
P.Markos, 2006



Fitting by $cL^{0.63}$



Fitting by $c(L+L_0)$



$L_0 \approx 5$

Скейлинг для высших размерностей

Меняется ситуация с интегралом

$$I_2(m) = \frac{1}{\pi L^{d-1}} \sum_{\substack{q_\perp \neq 0 \\ |q_\perp| < \Lambda}} \left(\frac{1}{\sqrt{m^2 + q_\perp^2}} \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{\sqrt{m^2 + q_\perp^2}} - \frac{1}{|q_\perp|} \operatorname{arctg} \frac{\Lambda}{|q_\perp|} \right)$$

Теперь нельзя устремлять $\Lambda \to \infty$, но зато есть сходимость на нижнем пределе

$$I_2(m) = \begin{cases} -cm^2\Lambda^{d-4} + O\left(m^{d-4}\right), & m \geq L^{-1} \\ -cm^2\Lambda^{d-4} + O\left(L^{4-d}\right), & m \leq L^{-1} \end{cases}$$

так что вычисление возможно аналитически при произвольных значениях mL .

d>4

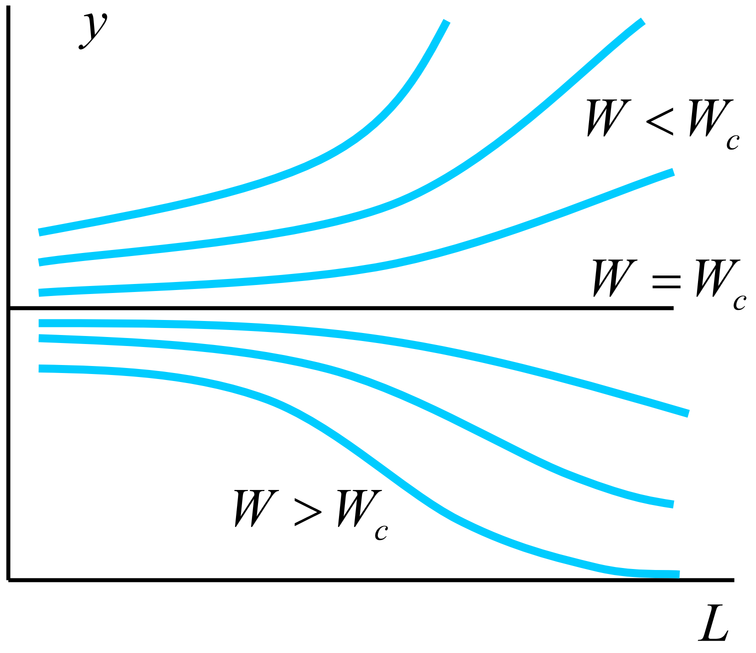
Получается скейлинговое соотношение

$$\pm\frac{1}{x^2} = y - \frac{1}{y^2}$$

в переменных

$$y = \frac{\xi_{1D}}{L}\left(\frac{a}{L}\right)^{(d-4)/3}$$

$$x = \frac{\xi}{L}\left(\frac{a}{L}\right)^{(d-4)/3}$$



d=4

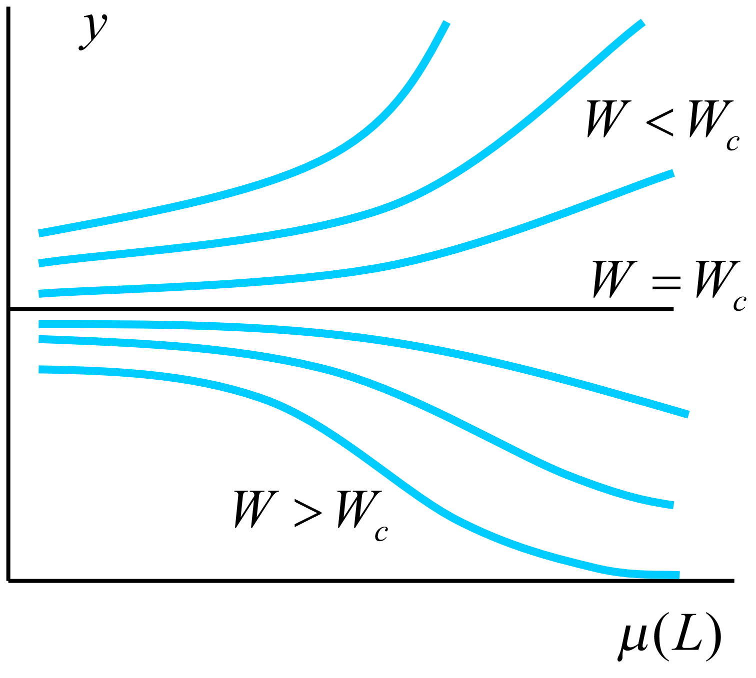
Получается скейлинговое соотношение

$$\pm\frac{1}{x^2} = y - \frac{1}{y^2}$$

в переменных

$$y = \frac{\xi_{1D}}{L}\left[\ln(L/a)\right]^{-1/3}$$

$$x = \frac{\xi}{\left[\ln(\xi/a)\right]^{1/2}}\frac{\left[\ln(L/a)\right]^{1/6}}{L}$$



Возникает «модифицированная длина»

$$\mu(L) = L\left[\ln(L/a)\right]^{-1/6}$$

d = 4 - ε

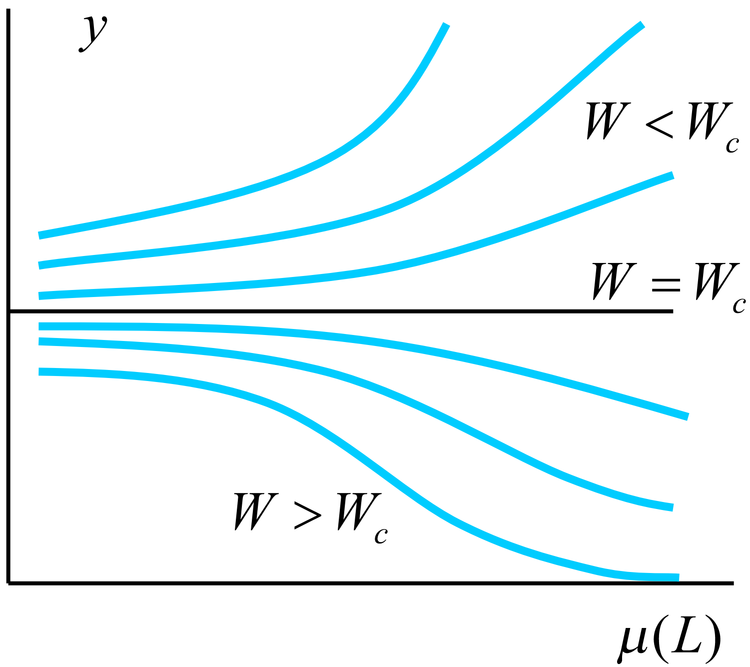
Получается скейлинговое соотношение

$$\pm\frac{1}{x^2} = y - \frac{1}{y^2}$$

в переменных

$$y = \frac{\xi_{1D}}{L}\left[\frac{\epsilon}{1-(L/a)^{-\epsilon}}\right]^{1/3}$$

$$x = \frac{\epsilon^{1/3}(\xi/a)}{[(\xi/a)^{\epsilon}-1]^{1/2}}\,\frac{[1-(L/a)^{-\epsilon}]^{1/6}}{(L/a)^{1-\epsilon/2}}$$



Возникает «модифицированная длина»

$$\mu(L) = L^{1-\epsilon/2}\,[1-(L/a)^{-\epsilon}]^{-1/6}$$

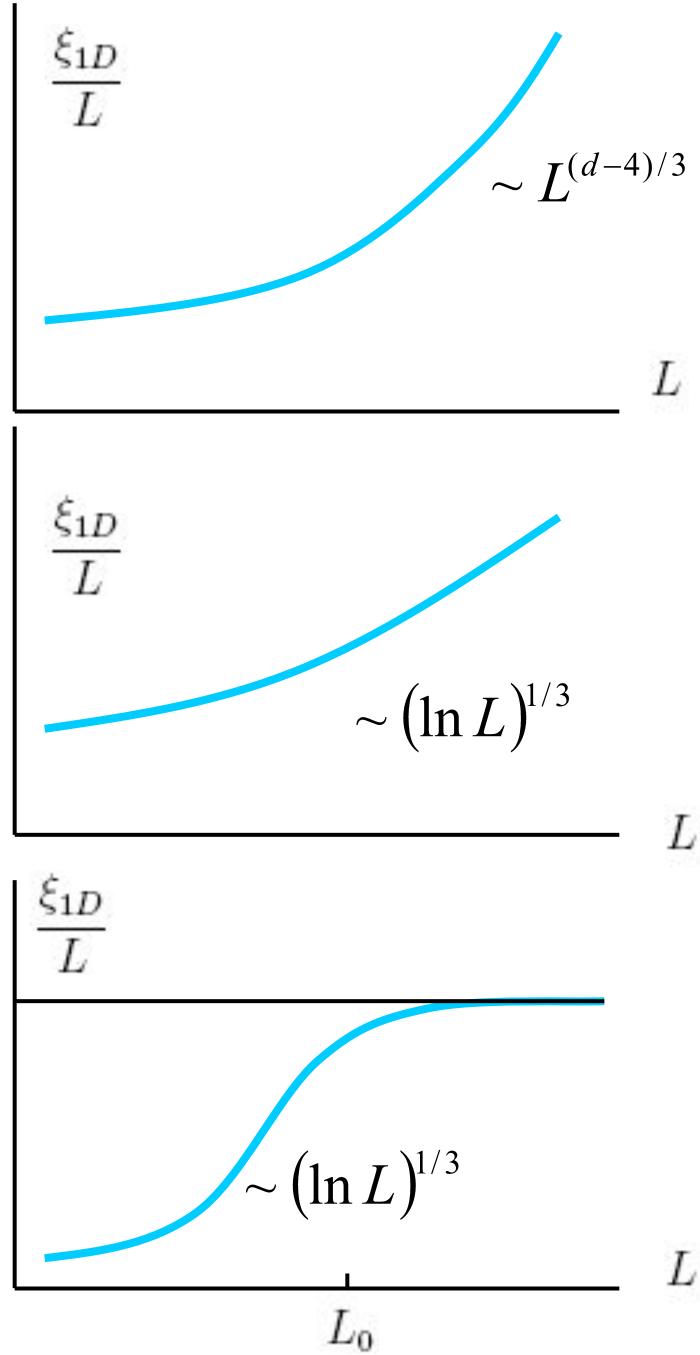
Поведение в точке перехода для «стандартного» скейлингового параметра

$$\frac{\xi_{1D}}{L} \sim \left(\frac{L}{a}\right)^{(d-4)/3}, \qquad d > 4$$

$$\frac{\xi_{1D}}{L} \sim \left(\ln\frac{L}{a}\right)^{1/3}, \qquad d = 4$$

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = \left[\frac{1-(L/a)^{-\epsilon}}{\epsilon}\right]^{1/3}, \quad d = 4-\epsilon$$

$$L_0 \sim a \exp\{const/\epsilon\}$$



Другие варианты конечно-размерного скейлинга

$$Q = F\left(\frac{L}{\xi}\right)$$

1. Квазиодномерные системы
2. Статистика уровней
3. Распределение кондактансов
4. Средний кондактанс
5. Параметр Таулеса («ускорение уровней»)
6. Inverse participation ratios

$$\frac{\xi_{1D}}{L} = y^* + \tau\left\{A_0 L^{1/\nu} + A_1 L^{\omega_1} + A_2 L^{\omega_2} + \ldots\right\} + B_1 L^{-y_1} + B_2 L^{-y_2} + \ldots$$

$$\frac{\xi_{1D}}{L} - y^* = A\tau\ \left(L + L_0\right)$$

Статистика уровней

I.Kh.Zharekeshev, B.Kramer, PRL, 79, 717 (1997)

Размеры до 100^3

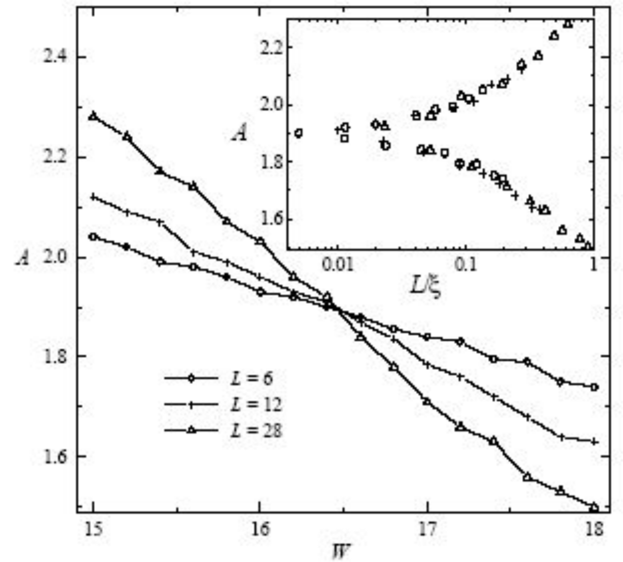


FIG. 4. Scaling variable A as a function of the disorder W for different L, showing critical behavior near the MIT. Inset: the one-parameter dependence of A on $L/\xi(W)$.

validity of (7). As one can see in Fig. 4 of [20], dependence Q on τ is only approximately close to linear, but in fact it is an essentially broken line. To demonstrate a situation, we give in a Table an average slope of dependence Q on τ and its fluctuations in the interval $16 < W < 17$, which corresponds to a condition $\tau(L/a)^{1/\nu} \lesssim 1$.

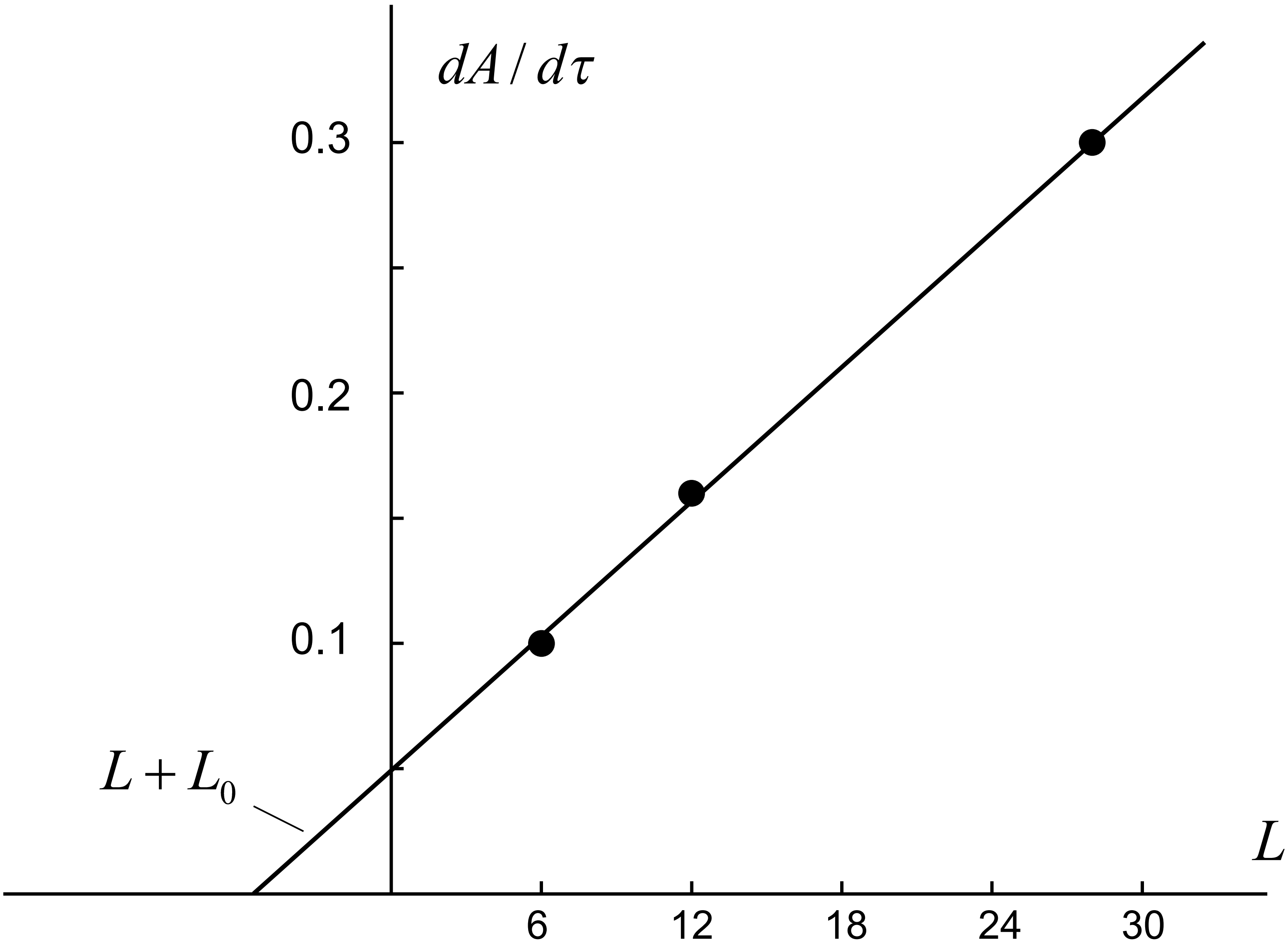
Table

Slope of dependence Q on τ (arbitrary units)

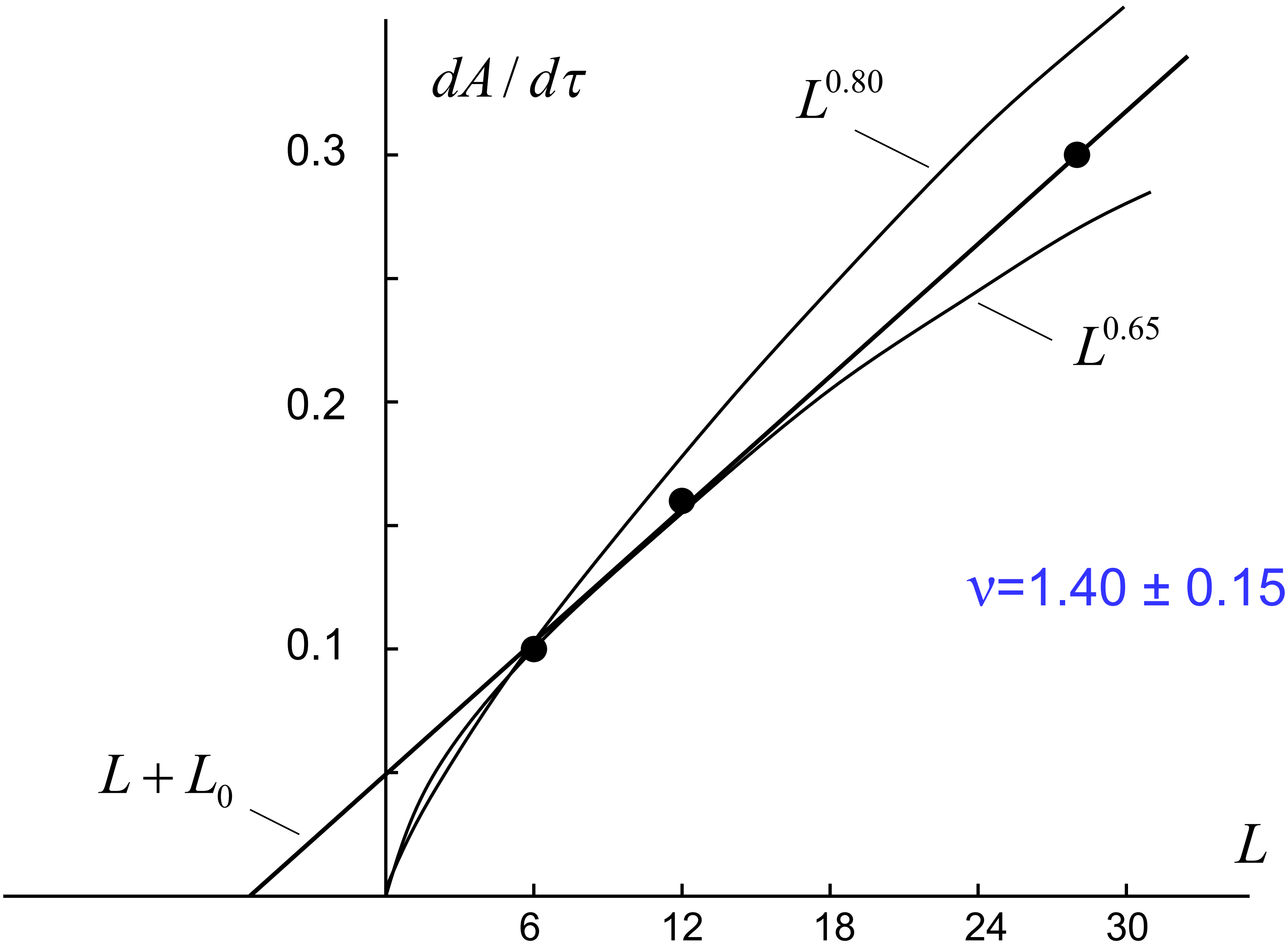
	$L = 28$	$L = 12$	$L = 6$
Average value	0.30	0.16	0.10
Least value for $16 < W < 17$	0.20	0.10	0.04
Largest value for $16 < W < 17$	0.42	0.25	0.12

With the use of the average slope, we indeed obtain $\nu \approx 1.4$, as it was reported in [20]. With real uncertainties taken into account, we can have any value of ν in the interval $0.7 \div 3.0$. Authors of [20] give essentially smaller error, relying on the averaging procedure.

I.M.Suslov, cond-mat/0105325

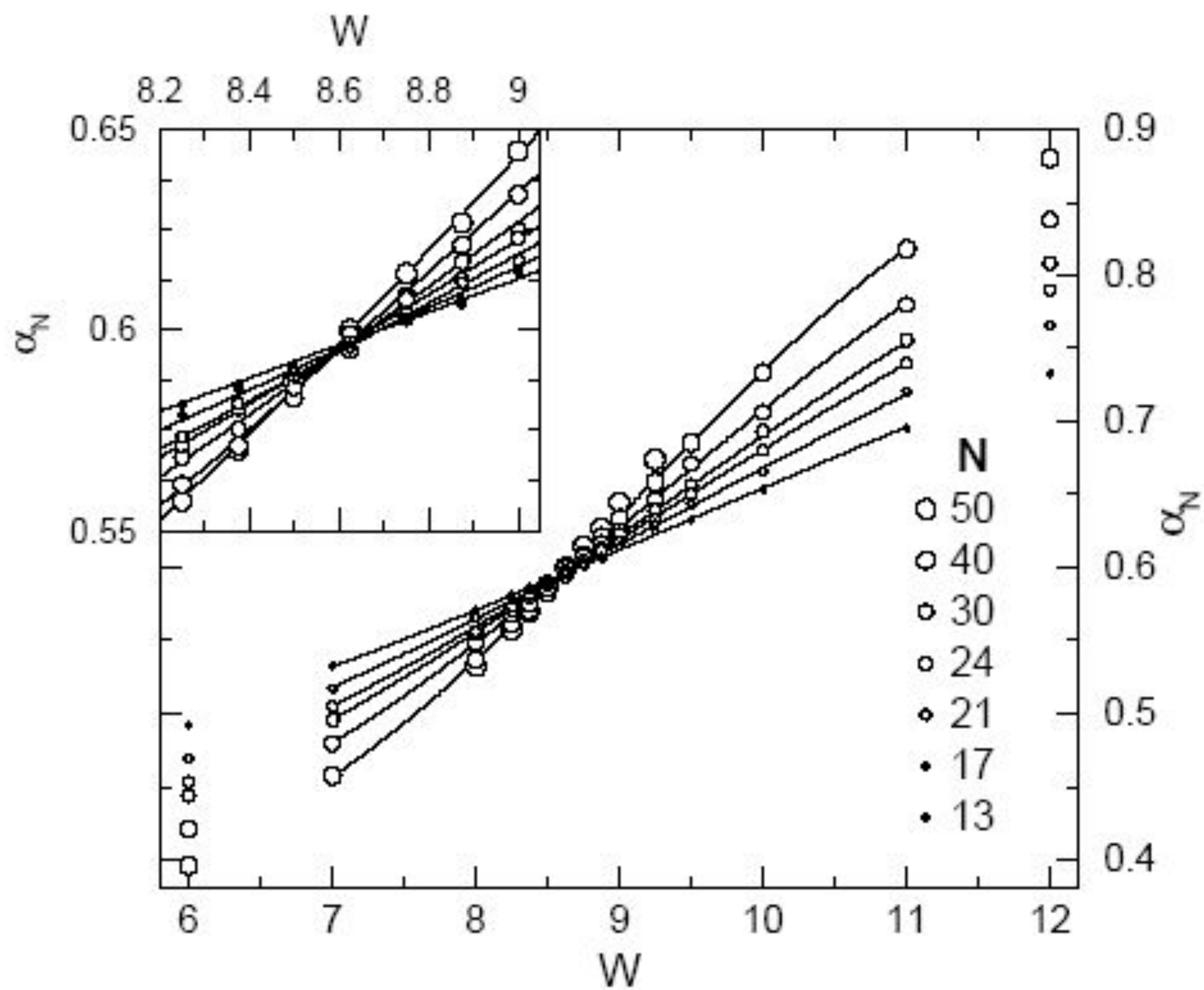


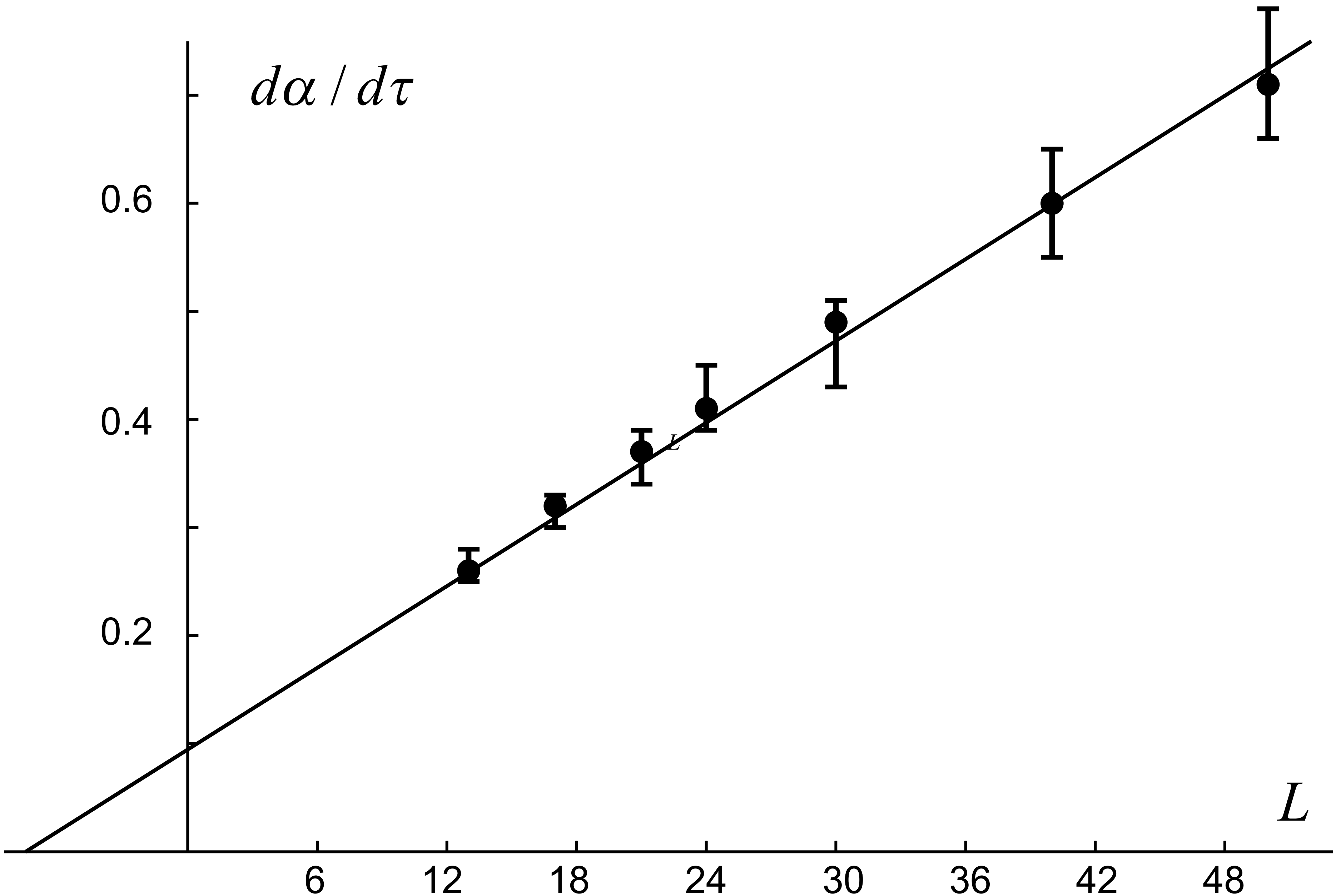
dA / dτ
0.3
0.2
0.1
L + L0
L
6
12
18
24
30



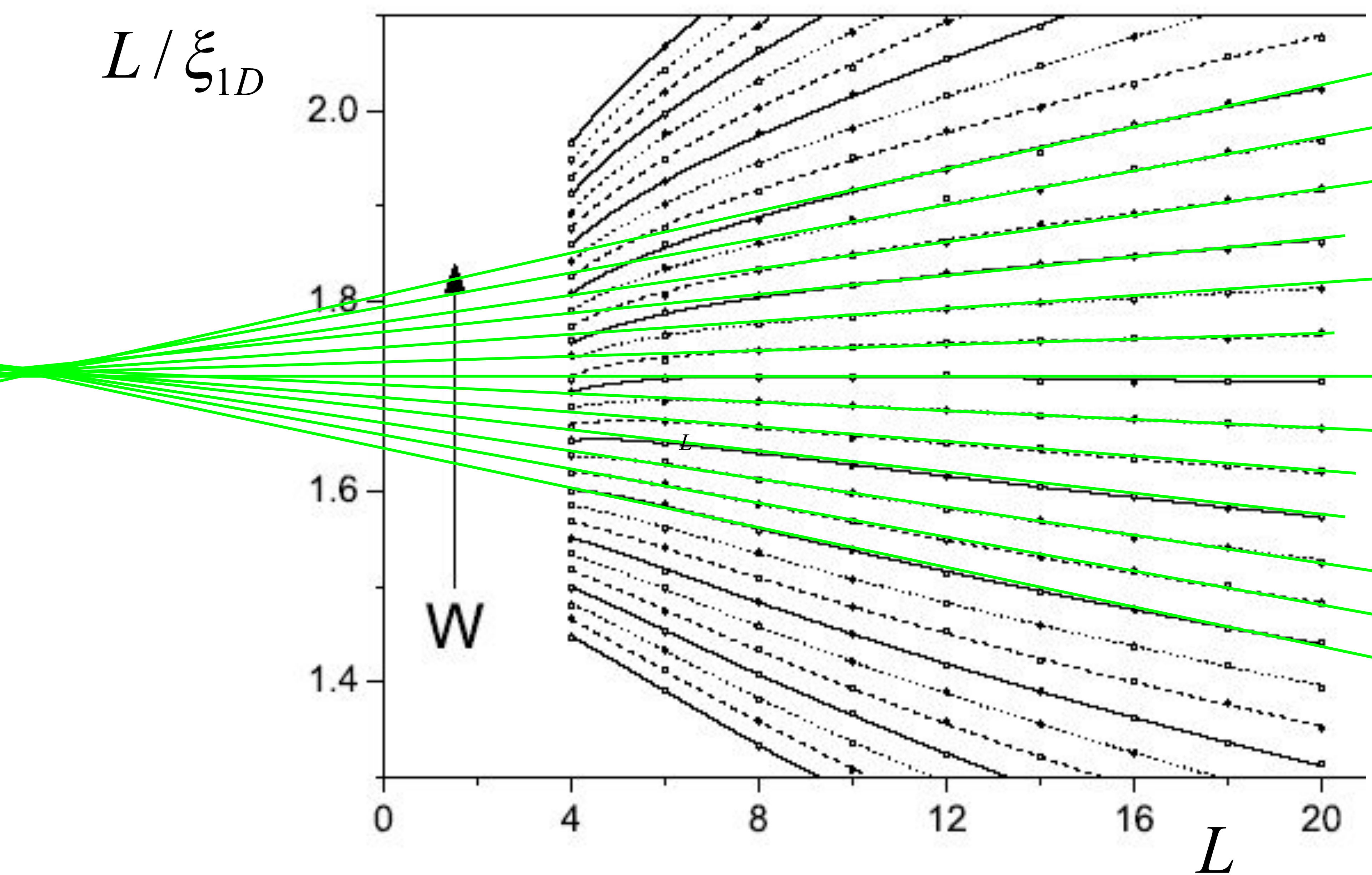
dA / dτ
0.3
0.2
0.1
L^0.80
L^0.65
ν=1.40 ± 0.15
L + L_0
L
6
12
18
24
30

F. Milde, R. A. Romer, M. Schreiber, Phys. Rev. B **61**, 6028 (2000).





$d\alpha / d\tau$
0.6
0.4
0.2
L
L
6
12
18
24
30
36
42
48



B.Kramer et al, 2010

ν=1.57±0.02