Лекция 3

Представление гармонических колебаний и монохроматических волн в комплексном виде

$$E(\vec{r},t)=a\cdot cos(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\delta)=a\frac{1}{2}\{e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\delta)}+e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\delta)}\}$$

$$=Ae^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}+A^{*}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}=Ae^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}+\text{к.с.}$$

$$A=\frac{1}{2}ae^{-i\delta},\ A^{*}=\frac{1}{2}ae^{i\delta},$$

$$E(\vec{r},t)=a\cdot\cos(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\delta)=a\frac{1}{2}\{e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\delta)}+e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\delta)}\}$$

$$=Ae^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}+A^{*}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}=\cancel{Ae^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}}+\text{к.с.}$$

можно выбрать и: $A^{*}e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}+\text{к.с.}$

Комплексная амплитуда у скалярной волны означает наличие начальной фазы и медленно-меняющейся фазы.

Комплексное число + комплексно сопряжённое = удвоенной действительной части.

Для всех *линейных* операций (суммирование, интегрирование, вычитание, дифференцирование, использование граничных условий и т. д., но *не умножение и возведение в степень*) можно *не писать* комплексно сопряженной части т.е. вместо *действительного* выражения использовать *комплексную* запись для поля

$$E(\vec{r},t)$$

$$E(\vec{r},t)= Ae^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}$$ или $$E(\vec{r},t)= A^{*} e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}.$$

Достоинство комплексного представления колебательных и волновых процессов состоит в *простоте* обращения с показательной функцией по сравнению с тригонометрическими функциями.

Если в конечном результате отделить действительную часть (удвоив амплитуду) от мнимой, то получится тот же результат, что и при использовании тригонометрических функций.

Векторный характер электромагнитных волн

(векторные волны)

Поскольку напряженность электрического поля - величина векторная, то и ЭМВ - величина векторная.

$$\vec{E} = \vec{A}\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r})}.$$

Если $\vec{A}$ - *вещественная* величина, то это уравнение плоской монохроматической *линейно* поляризованной волны.

Если $\vec{A}$ -*комплексная*, то поляризация *эллиптическая*.

Математическое отступление

Вектор в прямоугольной системе координат

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

скалярное произведение векторов

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

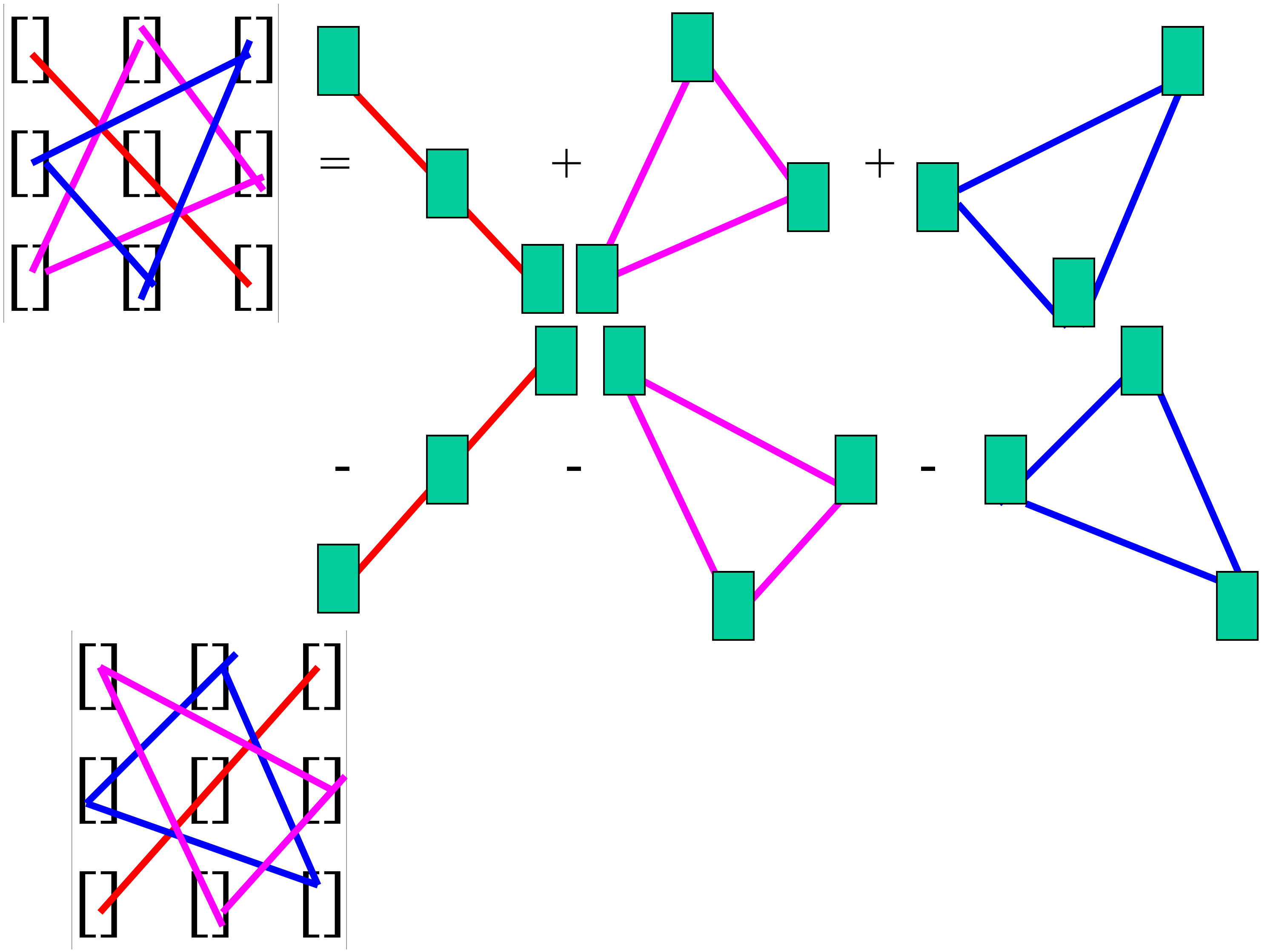
$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

векторное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы 3^x3

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$



Ротор

$$rot(\vec{V}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Дивергенция

$$div(\vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Градиент

$$grad(U) = \frac{\partial U_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\vec{k}$$

Поперечность ЭМВ.

Ортогональность

$\vec{E}$ ***и*** $\vec{H}$

Рассмотрим плоские волны в диэлектрике:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}\,)}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}\,)}$$

Уравнение Максвелла для плоских волн:

$$rot\,\vec{E} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

Уравнение Максвелла для плоских волн:

$$rot_x \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}_X = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} =$$

$$= E_z(+ik_y) - E_y(+ik_z) = -i(E_y k_z - E_z k_y) = -i[\vec{E}\,\vec{k}]_x$$

$$E_z = E_{0z} e^{-i[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]}.$$

$$rot\,\vec{E} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = i\,\vec{E}\,\vec{k}$$

т.к. $\frac{\partial E_x}{\partial x} = iE_x k_x$ **и т.д.**

Таким образом

$$rot\,\vec{E} = -i[\vec{E}\,\vec{k}\,]$$

и $$div\,\vec{E} = i\,\vec{E}\,\vec{k}$$

а $$\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial t} = -i\omega\,\vec{E}$$

Уравнения Максвелла имеют вид:

$$-i[\vec{H}\,\vec{k}\,] = -\frac{\varepsilon}{c} i\omega \vec{E} \qquad +i\,\vec{H}\,\vec{k} = 0$$

$$-i[\vec{E}\,\vec{k}\,] = +\frac{\mu}{c} i\omega \vec{H} \qquad +i\,\vec{E}\,\vec{k} = 0$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Уравнения Максвелла имеют вид:

$$i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\,[\vec{H}\,\vec{n}\,] = \frac{\varepsilon}{c} i\omega\,\vec{E}$$

$$\sqrt{\mu}\,[\vec{H}\,\vec{n}\,] = \sqrt{\varepsilon}\,\vec{E}$$

$$\vec{H}\,\vec{n} = 0$$

Уравнения Максвелла имеют вид:

$$i\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\,[\vec{E}\,\vec{n}\,] = -\frac{\mu}{c}i\omega\,\vec{H} \qquad \sqrt{\varepsilon}[\vec{E}\,\vec{n}] = -\sqrt{\mu}\,\vec{H}$$

$$\vec{E}\,\vec{n} = 0$$

Отсюда следует, что

$$\vec{E} \quad \text{и} \;, \vec{H} \perp \vec{n}$$

т.е. перпендикулярны направлению распространения волны

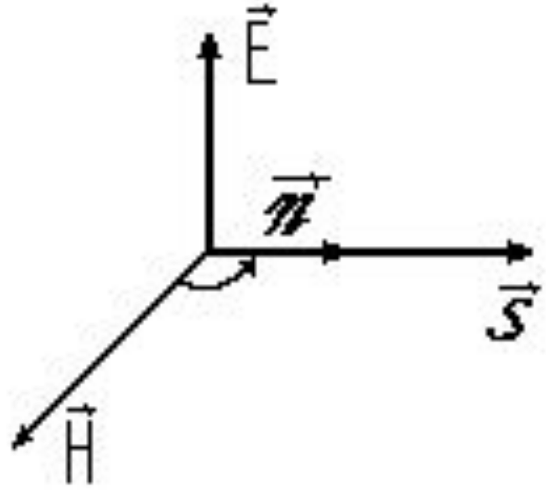
$$\vec{E} \text{ и }, \vec{H} \perp \vec{n}$$

Таким образом, ЭМВ - волны поперечные.

Итак, $\vec{E} \perp \vec{H}$ взаимно перпендикулярные векторы.

$\vec{n}, \vec{E}, \vec{H}$

образуют правовинтовую систему.



$$\vec{n}, \vec{E}, \vec{H}$$

образуют правовинтовую систему.

$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$, т.е. отношение

численных значений векторов

$\vec{E}$ и $\vec{H}$

от времени не зависит, т.е. эти векторы обладают одинаковыми фазами.

В бегущей ЭМВ векторы

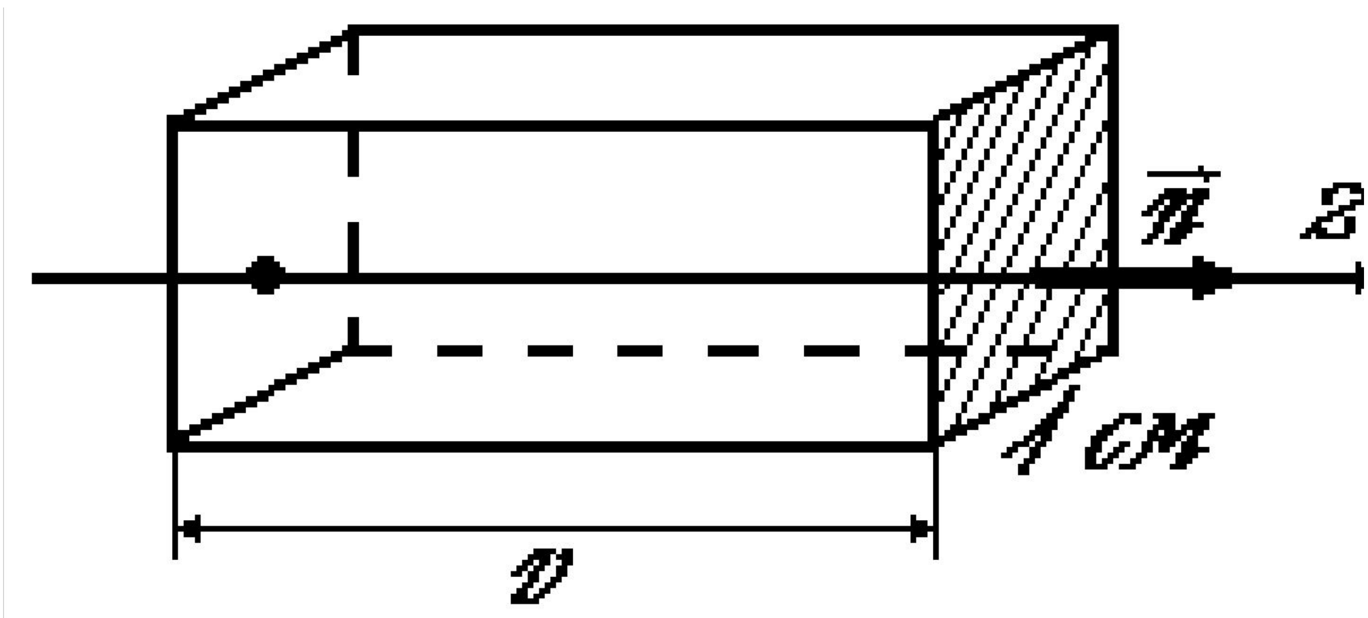
$$\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{H}$$

изменяются синхронно.

Энергия, переносимая ЭМВ

Найдем количество энергии, которое протекает в 1 сек через площадку в 1 см, которая перпендикулярна направлению распространения волны $\vec{n}$. Для этого построим на площадке параллелепипед (цилиндр), ось которого параллельна $\vec{n}$.

Тогда количество энергии, которое протекает через основание параллелепипеда (цилиндра) в 1 сек, равно энергии содержащейся в части параллелепипеда (цилиндра) длиной ν

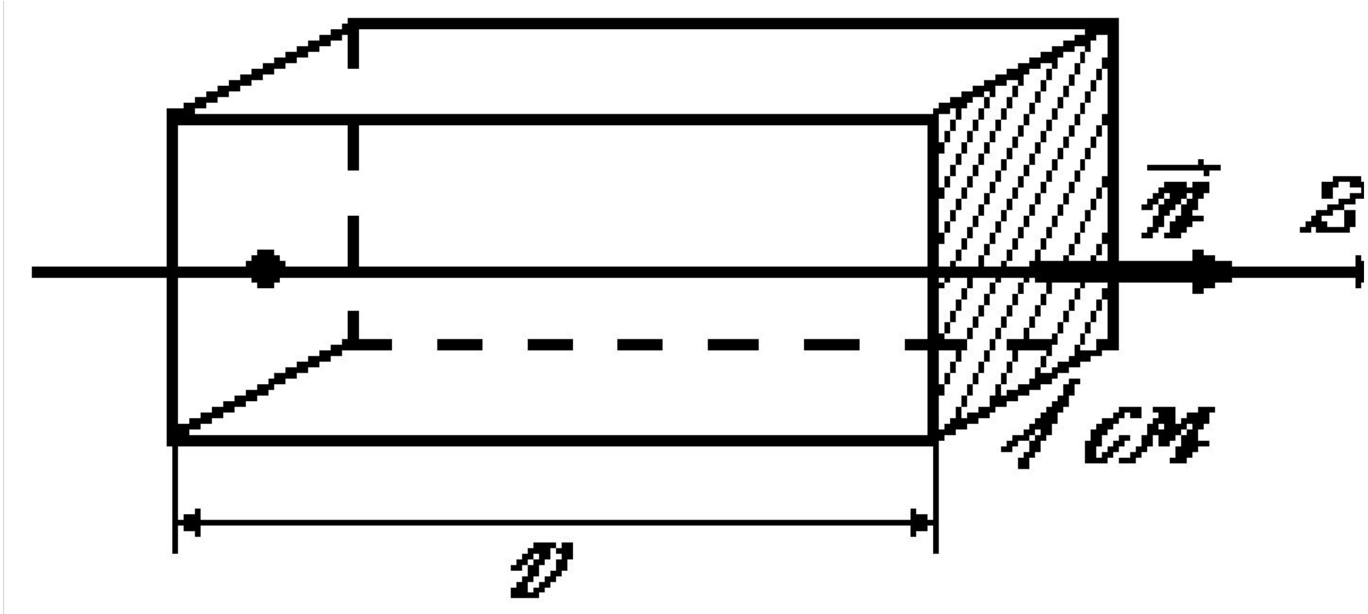


$\vec{m}$
z
1 см
D

Следовательно, поток энергии

$$S = u \cdot v \quad ,$$

где $u -$ плотность энергии (энергия в единице объёма).



$$u = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{4\pi} = \frac{\varepsilon \cdot E}{4\pi} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} H = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi} EH$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$S = uv = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\pi} E^2 \qquad (\mu \approx 1)$$

$$\vec{S} = uv\,\vec{n} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\,\vec{H}]$$

Вектор Умова-Пойтинга $\vec{S}$

совпадает с $\vec{n}$ *только в*

изотропной среде

$$S = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}E_0^2\cos^2(\omega\cdot t - kz) = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}E_0^2\frac{1}{2}[1+\cos 2(\omega\cdot t - kz)]$$

Вектор ***Умова-Пойтинга*** $\vec{S}$

изменяется от значения $S_{min} = 0$

до $S_{max} = \dfrac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}E_0^2$

Таким образом, поток энергии колеблется с удвоенной частотой по сравнению с

$\vec{E}$ и $\vec{H}$

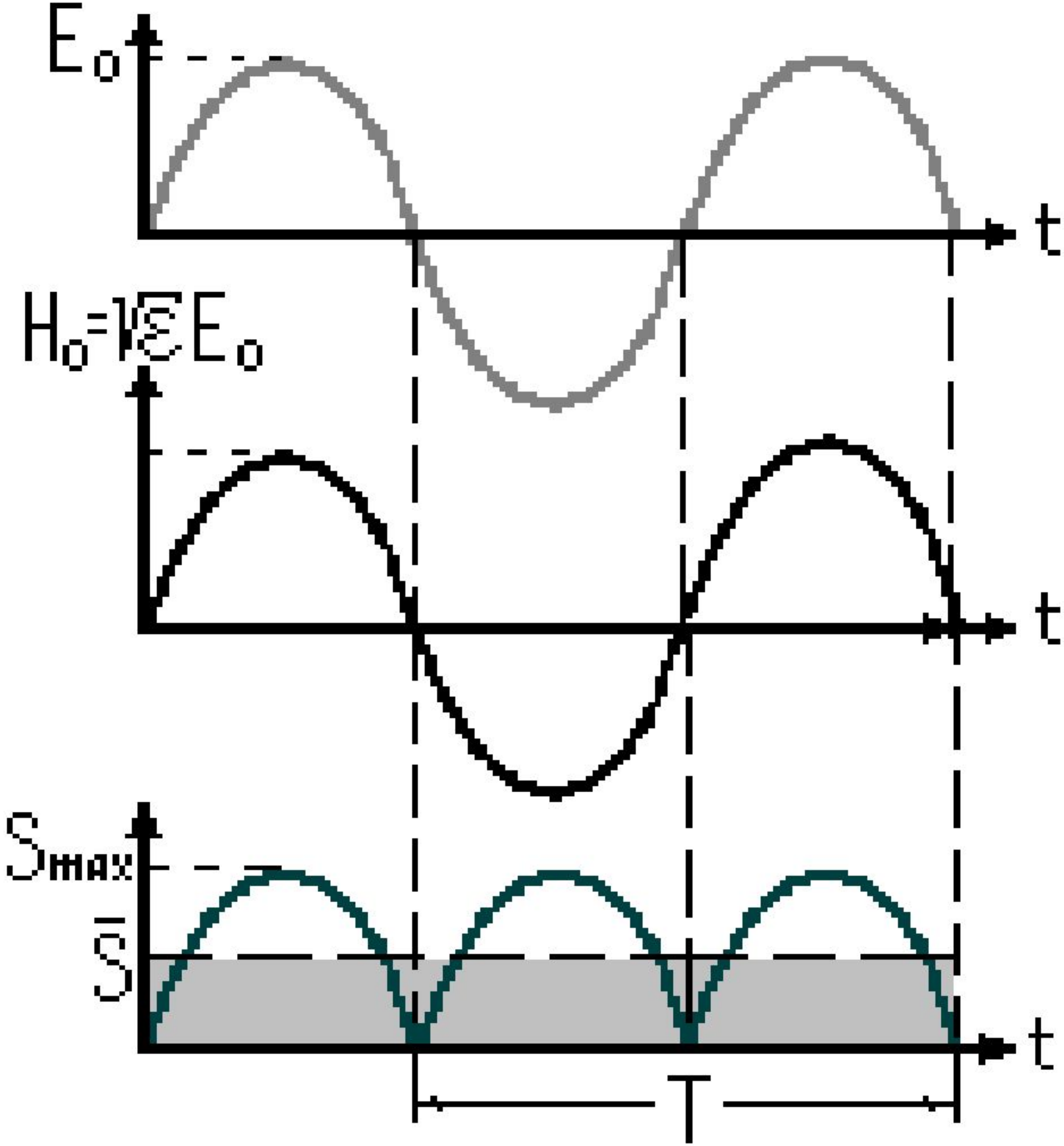
около среднего значения

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon}E_0^2$$

принимая положительные

значения (включая $S = 0$).

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon}E_0^2$$



E_0
t
$H_0=\sqrt{\varepsilon}E_0$
t
S_{max}
$\bar{S}$
t
T

Поток энергии пропорционален *квадрату амплитуды* поля ЭМВ. Это общее и очень важное соотношение, на котором фактически основывается возможность регистрации ЭМВ различными приёмниками. Практически все приёмники света в той или иной степени инерционны.

Поэтому они регистрируют среднее значение квадрата амплитуды поля

$$\overline{E}_0^2$$

(квадратичный детектор).

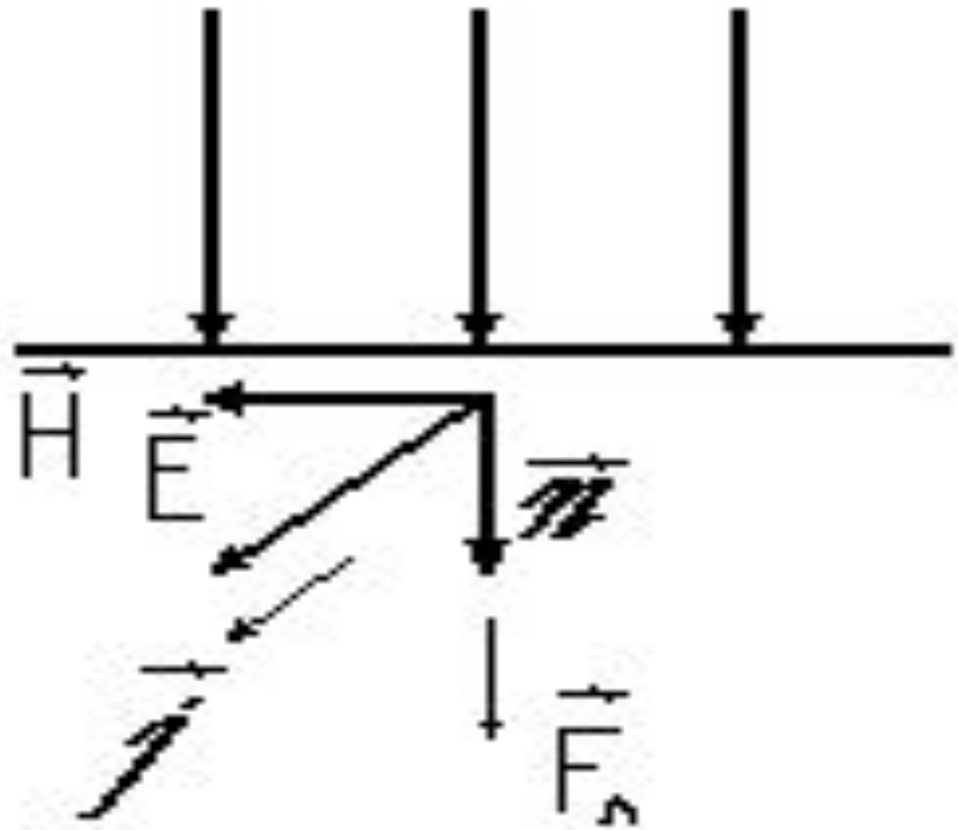
Световое давление

Поскольку свет электромагнитная *поперечная* волна, то падая на поверхность проводника (зеркально отражающего или поглощающего тела), он должен производить следующие действия:
электрический вектор, лежащий в плоскости освещенной поверхности, вызывает ток в направлении этого вектора

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

магнитное поле световой волны действует на возникший ток по закону Ампера (сила Лоренца) так, что направление действующей силы совпадает с направлением распространения света:

$$\vec{F}_{л} = \frac{1}{c}[\vec{j}\vec{H}] \rightarrow \vec{F}_{л} = \frac{\sigma}{c}[\vec{E}\vec{H}], \quad \vec{F}_{л} \parallel \vec{S}$$


$\vec{H}$
$\vec{E}$
$\vec{n}$
$\vec{j}$
$\vec{F}_{л}$

Таким образом, взаимодействие между светом и отражающим или поглощающим его телом приводит к возникновению давления на тело. Сила давления зависит от интенсивности света.

Для случая, когда световые лучи образуют параллельный пучок, давление p по вычислению Максвелла равняется плотности световой энергии u (тело поглощает всю энергию, абсолютно чёрное тело):

$$p = u$$

Если часть энергии отражается, то давление увеличивается в

$(1+R)$ раз, так как при отражении света, вектор $\vec{E}$ снова вызывает ток, а вектор $\vec{H}$ действует на ток и появляется сила, направленная в ту же сторону (так как при отражении вектора развернулись):

$$p = u(1 + R)$$

где R – коэффициент отражения

→ тела,

для идеального зеркала

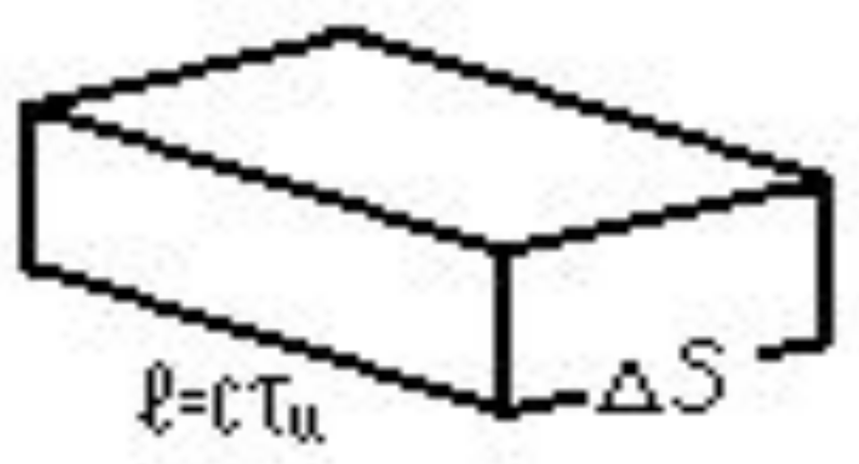
$$R=1 \quad \rightarrow p=2u$$

Примеры:

- *1. Для силы, с которой солнечные лучи в яркий день давят на чёрной поверхности, Максвелл вычислил величину ,4 мГ.*
- *2. Опыты П. Н. Лебедева (1899−1900 гг.). Он с точностью порядка 20% измерил величину, рассчитанную Максвеллом. Он использовал очень чувствительные крутильные весы в сосуде с откаченным воздухом. Свет воспринимался тонкими и лёгкими крылышками.*

<u>Примеры</u>:

- *3. Оценим давление света от лазерного импульса длительностью* $\tau_и$ *и мощностью P=1МВт*



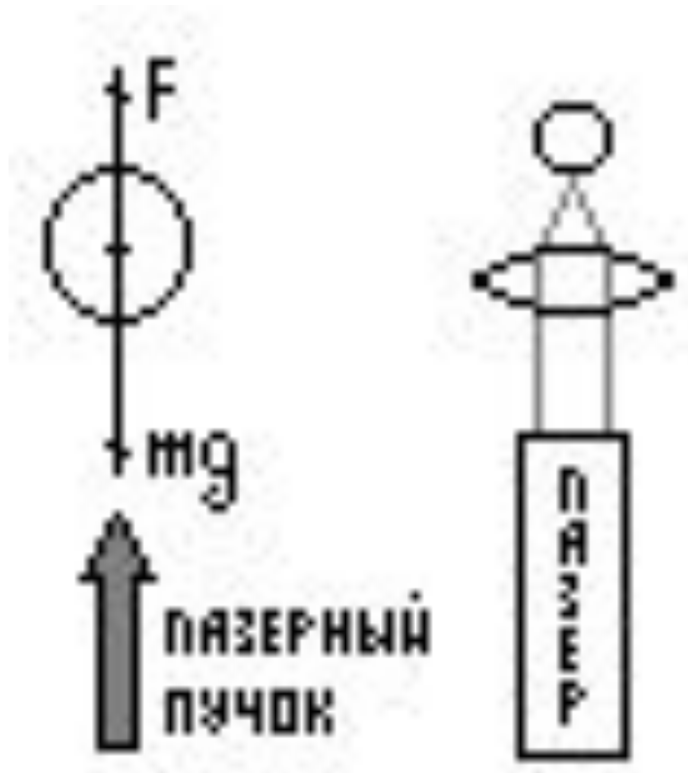
$$u = \frac{W}{V} = \frac{P\tau_{и}}{\Delta S \cdot l} = \frac{P\tau_{и}}{\Delta S c \tau_{и}},$$

$$\Delta S = \pi \cdot r^2,\ r = 1\,\text{мм},\ p = u = \frac{P}{\pi r^2 c} \approx 10\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \sim \frac{\text{кГ}}{\text{м}^2}.$$

Примеры:

- *4. Левитация– это управление движением малой частицы с помощью лазерного пучка вопреки силе тяжести.*

Расчет сделан для эритроцита.



$$F = mg\,;\; F = p \cdot \Delta S = u \cdot \Delta S\,;\; u = \frac{P}{\Delta S \cdot c} \rightarrow F = \frac{P}{c}\,;$$

$$m = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \rho \;\;;\;\; \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \rho \cdot g = \frac{P}{c} \;\;;\; P = \frac{4}{3}\pi \;\; r^3 c \rho \;\; g$$

при $r=10$ *мкм,* $\rho = \rho_{H_2O}$ $P \approx 12$*мВт.*

полностью поглощается частицей. В принципе можно организовать не только удержание, но и движение частиц:

Лазерный пинцет.