

Лекция 3

*Представление гармонических
колебаний
и монохроматических волн в
комплексном виде*

$$\underline{E}(\vec{r}, t) = a \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) = a \frac{1}{2} \left\{ e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta)} + e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta)} \right\}$$

$$= A e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + A^* e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = A e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \text{K.C.}$$

$$A = \frac{1}{2} a e^{-i\delta}, \quad A^* = \frac{1}{2} a e^{i\delta},$$

$$\underline{E}(\vec{r}, t) = a \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \delta) = a \frac{1}{2} \left\{ e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \delta)} + e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \delta)} \right\}$$

$$= A e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} + A^* e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} = \cancel{A e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}} + \text{к.с.}$$

можно выбрать и:

$$A^* e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} + \text{к.с.}$$

Комплексная амплитуда у скалярной волны означает наличие начальной фазы и медленно-меняющейся фазы.

Комплексное число +
комплексно сопряжённое =
удвоенной действительной
части.

Для всех *линейных* операций
(суммирование,
интегрирование, вычитание,
дифференцирование,
использование граничных
условий и т. д., но *не умножение*
и возведение в степень) можно
не писать комплексно
сопряженной части

т.е. вместо действительного
выражения использовать
комплексную запись для поля

$$E(\vec{r}, t)$$

$$E(\vec{r}, t) = A e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{ или } E(\vec{r}, t) = A^* e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

Достоинство комплексного представления колебательных и волновых процессов состоит в *простоте* обращения с показательной функцией по сравнению с тригонометрическими функциями.

Если в конечном результате
отделить действительную часть
(удвоив амплитуду) от мнимой,
то получится тот же результат,
что и при использовании
тригонометрических функций.

*Векторный характер
электромагнитных волн*

(векторные волны)

Поскольку напряженность
электрического поля - величина
векторная, то и ЭМВ - величина
векторная.

$$\vec{E} = \vec{A} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

Если \vec{A} - вещественная

величина, то это уравнение
плоской монохроматической
линейно поляризованной волны.

Если \vec{A} - комплексная, то

поляризация *эллиптическая*.

Математическое отступление

Вектор в прямоугольной системе координат

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

скалярное произведение векторов

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

векторное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы 3×3

$$\begin{vmatrix} \boxed{i} & \boxed{j} & \boxed{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \boxed{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \boxed{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \boxed{k}$$

Ротор

$$\operatorname{rot}(\vec{V}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial & \partial & \partial \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Дивергенция

$$\operatorname{div}(V) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Градиент

$$\mathit{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

Поперечность ЭМВ.

Ортогональность

\vec{E} и \vec{H}

Рассмотрим плоские волны в диэлектрике:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Уравнение Максвелла для ПЛОСКИХ ВОЛН:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Уравнение Максвелла для ПЛОСКИХ ВОЛН:

$$rot_x \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}_X = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} =$$

$$= E_z(+ik_y) - E_y(+ik_z) = -i(E_y k_z - E_z k_y) = -i[\vec{E} \vec{k}]_x$$

$$E_z = E_{0z} e^{-i[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]} .$$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = i \vec{E} \vec{k}$$

Т.К. $\frac{\partial E_x}{\partial x} = iE_x k_x$ И Т.Д.

Таким образом

$$\text{rot } \vec{E} = -i [\vec{E} \vec{k}]$$

и $\text{div } \vec{E} = i \vec{E} \vec{k}$

а $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$

Уравнения Максвелла имеют

ВИД:

$$-i[\vec{H} \vec{k}] = -\frac{\varepsilon}{c} i\omega \vec{E} \quad +i \vec{H} \vec{k} = 0$$

$$-i[\vec{E} \vec{k}] = +\frac{\mu}{c} i\omega \vec{H} \quad +i \vec{E} \vec{k} = 0$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Уравнения Максвелла имеют

ВИД:

$$i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} [\vec{H} \vec{n}] = \frac{\epsilon}{c} i \omega \vec{E} \quad \sqrt{\mu} [\vec{H} \vec{n}] = \sqrt{\epsilon} \vec{E}$$

$$\vec{H} \vec{n} = 0$$

Уравнения Максвелла имеют

ВИД:

$$i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu} [\vec{E} \vec{n}] = -\frac{\mu}{c} i \omega \vec{H} \quad \sqrt{\epsilon} [\vec{E} \vec{n}] = -\sqrt{\mu} \vec{H}$$

$$\vec{E} \vec{n} = 0$$

Отсюда следует, что

$$\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{H} \perp \vec{n}$$

т.е. перпендикулярны
направлению распространения
ВОЛНЫ

$$\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{H} \perp \vec{n}$$

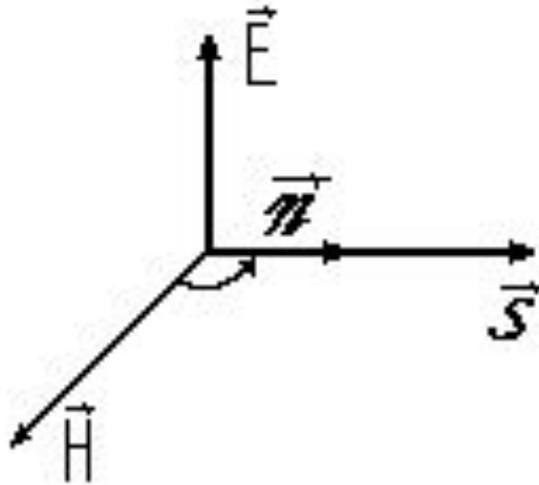
Таким образом, ЭМВ - волны поперечные.

Итак, $\vec{E} \perp \vec{H}$

взаимно перпендикулярные
векторы.

$\vec{n}, \vec{E}, \vec{H}$

*образуют правовинтовую
систему.*



$\vec{n}, \vec{E}, \vec{H}$
образуют правовинтовую
систему.

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H \quad , \text{ т.е. ОТНОШЕНИЕ}$$

численных значений векторов

$$\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{H}$$

от времени не зависит, т.е. эти векторы обладают одинаковыми фазами.

В бегущей ЭМВ векторы

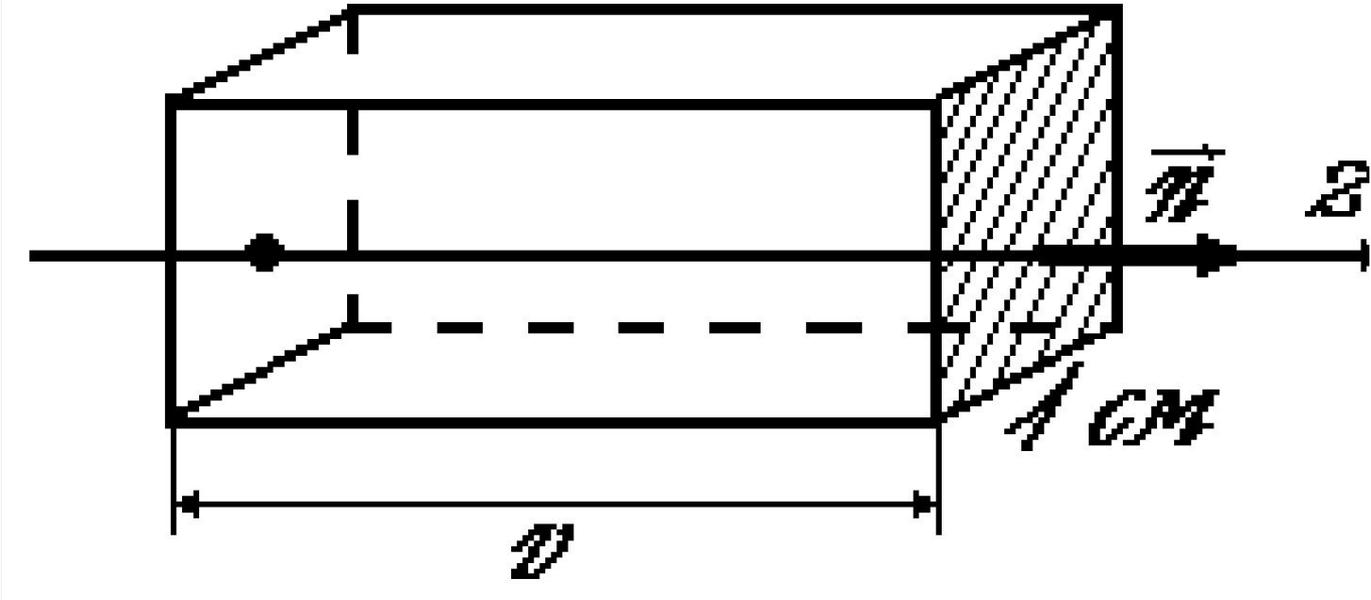
$$\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{H}$$

изменяются синхронно.

Энергия, переносимая ЭМВ

Найдем количество энергии, которое протекает в 1 сек через площадку в 1 см, которая перпендикулярна направлению распространения волны \vec{n} . Для этого построим на площадке параллелепипед (цилиндр), ось которого параллельна \vec{n} .

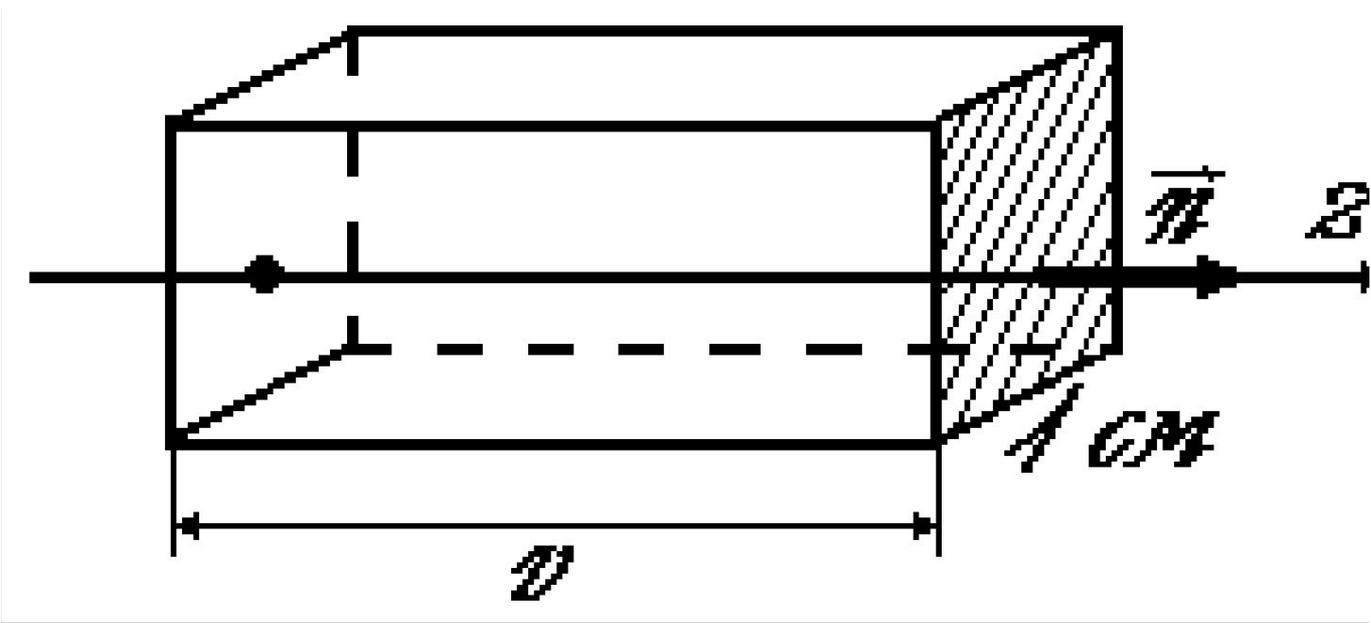
Тогда количество энергии,
которое протекает через
основание параллелепипеда
(цилиндра) в 1 сек, равно
энергии содержащейся в части
параллелепипеда (цилиндра)
длиной V



Следовательно, поток энергии

$$S = u \cdot v \quad ,$$

где u — плотность энергии
(энергия в единице объёма).



$$u = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{4\pi} = \frac{\varepsilon \cdot E}{4\pi} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} H = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{4\pi} EH$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$S = uv = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c\sqrt{\epsilon}}{4\pi} E^2 \quad (\mu \approx 1)$$

$$\vec{S} = uv \vec{n} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$$

Вектор Умова-Пойтинга

\vec{S}

совпадает с \vec{n} только в

изотропной среде

$$S = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon} E_0^2 \cos^2(\omega \cdot t - kz) = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon} E_0^2 \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega \cdot t - kz)]$$

Вектор Умова-Пойтинга \vec{S}

изменяется от значения $S_{min} = 0$

$$\text{до } S_{max} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon} E_0^2$$

Таким образом, поток энергии колеблется с удвоенной частотой по сравнению с

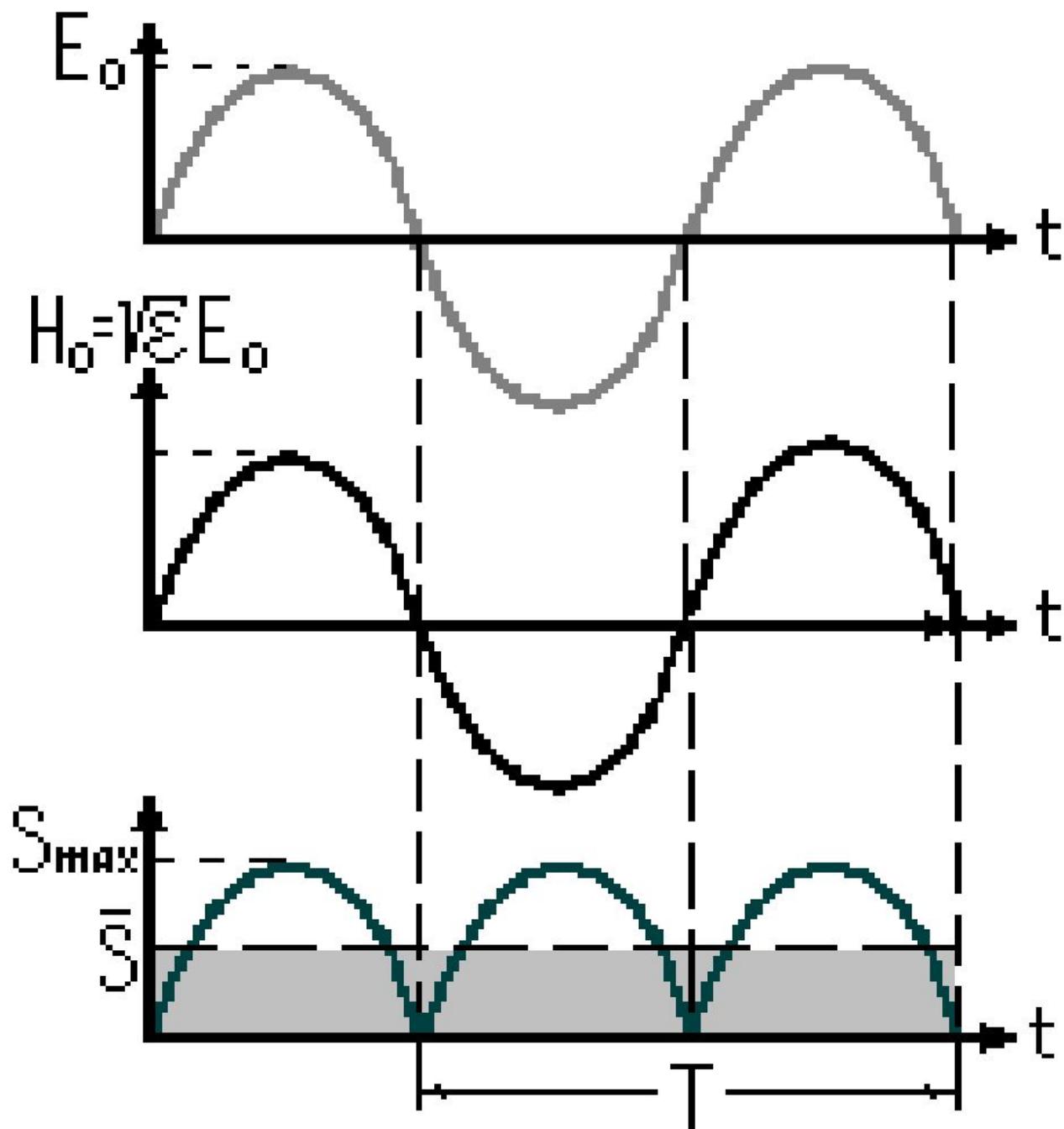
$$\vec{E} \quad \text{и} \quad \vec{H}$$

около среднего значения

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon} E_0^2$$

принимая положительные
значения (включая $S = 0$).

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon} E_0^2$$



Поток энергии пропорционален
квадрату амплитуды поля ЭМВ.

Это общее и очень важное
соотношение, на котором
фактически основывается
возможность регистрации ЭМВ
различными приёмниками.
Практически все приёмники света
в той или иной степени
инерционны.

Поэтому они регистрируют
среднее значение квадрата
амплитуды поля

$$\overline{E_0^2}$$

(квадратичный детектор).

Световое давление

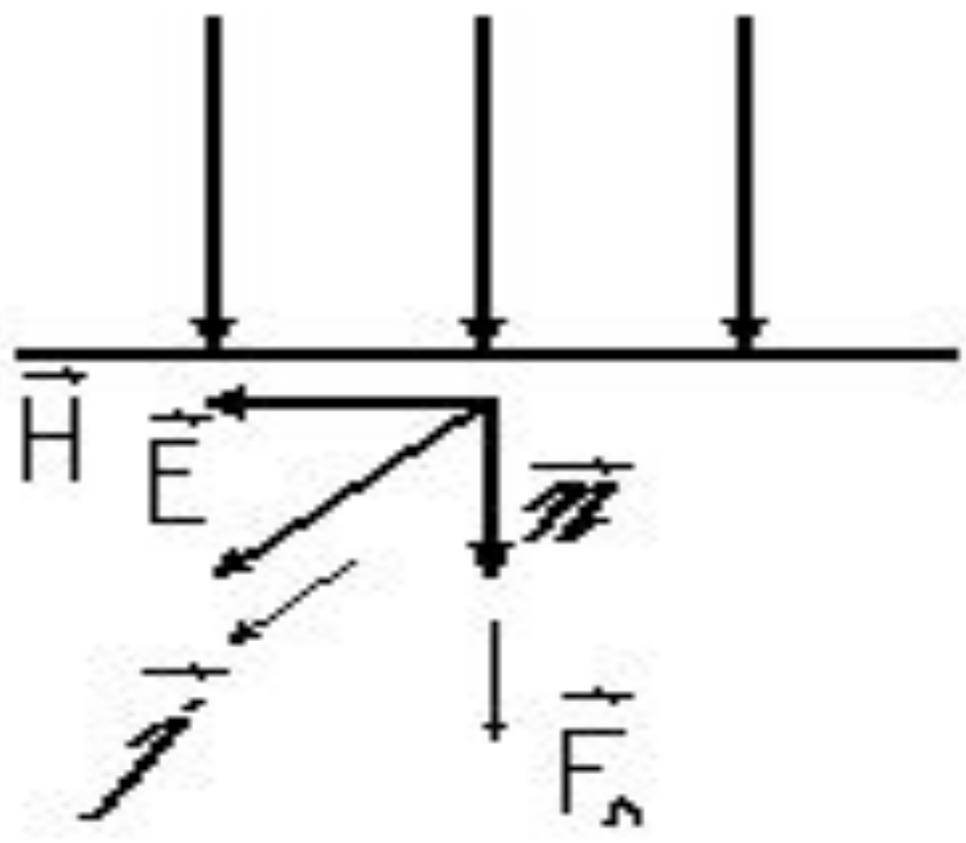
Поскольку свет электромагнитная *поперечная* волна, то падая на поверхность проводника (зеркально отражающего или поглощающего тела), он должен производить следующие действия:

электрический вектор, лежащий в плоскости освещенной поверхности, вызывает ток в направлении этого вектора

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СВЕТОВОЙ
 ВОЛНЫ ДЕЙСТВУЕТ НА ВОЗНИКШИЙ
 ТОК ПО ЗАКОНУ АМПЕРА (СИЛА
 ЛОРЕНЦА) ТАК, ЧТО НАПРАВЛЕНИЕ
 ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЫ СОВПАДАЕТ С
 НАПРАВЛЕНИЕМ
 РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА:

$$\vec{F}_L = \frac{1}{c} [jH] \rightarrow \vec{F}_L = \frac{\sigma}{c} [EH], \quad \vec{F}_L \parallel \vec{S}$$



Таким образом, взаимодействие между светом и отражающим или поглощающим его телом приводит к возникновению давления на тело. Сила давления зависит от интенсивности света.

Для случая, когда световые лучи образуют параллельный пучок, давление p по вычислению Максвелла равняется плотности световой энергии u (тело поглощает всю энергию, абсолютно чёрное тело):

$$p = u$$

Если часть энергии отражается, то давление увеличивается в

$(1 + R)$ раз, так как при отражении света, вектор \vec{E} снова вызывает ток, а вектор \vec{H} действует на ток и появляется сила, направленная в ту же сторону (так как при отражении вектора развернулись):

$$p = u(1 + R)$$

где R – коэффициент отражения
→ тела,
для идеального зеркала

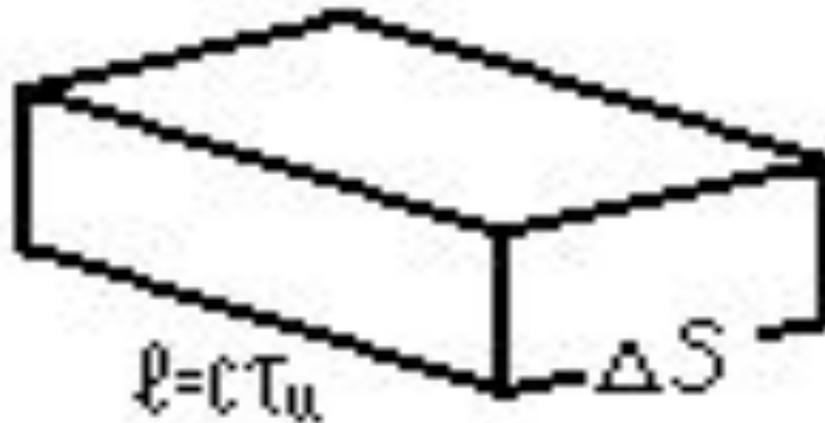
$$R=1 \quad \rightarrow \quad p=2u$$

Примеры:

- 1. Для силы, с которой солнечные лучи в яркий день давят на чёрной поверхности, Максвелл вычислил величину  4 мГ.
- 2. Опыты П. Н. Лебедева (1899–1900 гг.). Он с точностью порядка 20% измерил величину, рассчитанную Максвеллом. Он использовал очень чувствительные крутильные весы в сосуде с откаченным воздухом. Свет воспринимался тонкими и лёгкими крылышками.

Примеры:

- 3. Оценим давление света от лазерного импульса длительностью τ_u и мощностью $P=1\text{МВт}$



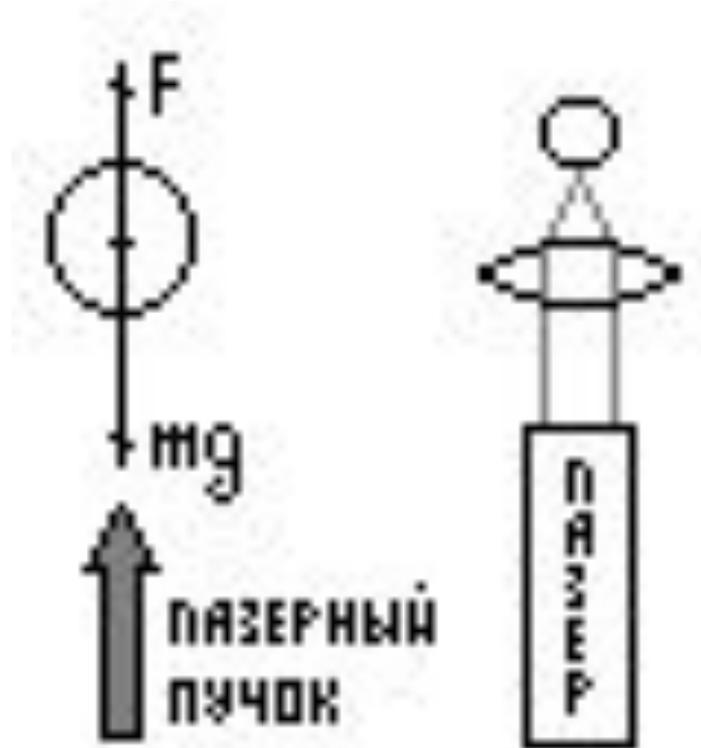
$$u = \frac{W}{V} = \frac{P\tau_{\text{ш}}}{\Delta S \cdot l} = \frac{P\tau_{\text{ш}}}{\Delta S c \tau_{\text{ш}}},$$

$$\Delta S = \pi \cdot r^2, r = 1\text{MM}, p = u = \frac{P}{\pi \cdot c} \approx 10 \frac{\text{H}}{\text{M}^2} \rightarrow \frac{\text{K}}{\text{M}^2} \Gamma.$$

Примеры:

- 4. Левитация – это управление движением малой частицы с помощью лазерного пучка вопреки силе тяжести.

Расчет сделан для эритроцита.



$$F = mg; F = p \cdot \Delta S = u \cdot \Delta S; u = \frac{P}{\Delta S \cdot c} \rightarrow F = \frac{P}{c};$$

$$m = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \rho; \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \rho \cdot g = \frac{P}{c}; P = \frac{4}{3} \pi r^3 c \rho g$$

при $r=10$ мкм, $\rho = \rho_{H_2O}$ $P \approx 12$ мВт.

*полностью поглощается
частицей. В принципе можно
организовать не только
удержание, но и движение
частиц:*

Лазерный пинцет.