Воротницкий Ю.И.

Исследование операций

Введение

0. Введение.
Общие сведения.

- Объем курса – 34 часа лекции
  24 часа лабораторные занятия
  14 часов – КСР
- Лабораторные занятия и КСР проводятся в классе ПЭВМ и выполняются в среде пакета Mathematica
- Форма отчетности – экзамен (5 семестр)
- Преподавание обеспечивает кафедра кибернетики
- Лектор – Воротницкий Юрий Иосифович

0. Введение.
Цели и задачи дисциплины.

- Ознакомить с фундаментальными основами дисциплины «Исследование операций», методами и конструктивными вычислительными алгоритмами решения задач поиска оптимальных решений.
- Определить множество задач в области информационно-коммуникационных технологий, решаемых методами дисциплины.
- Сформировать навыки формализации, разработки математических моделей и реализации вычислительных алгоритмов типовых задач исследования операций.

0. Введение.
Литература.

Основная

1. Таха Х. Введение в исследование операций.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.
2. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990.
3. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1986.
4. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1982.

Дополнительная

1. Ахо А.В., Хопкрофт Дж.Э., Ульман Дж.Д. Структуры данных и алгоритмы. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2000.
2. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983.
3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975

0. Введение.
0.1. **Предмет дисциплины.**

- **Исследование операций** – дисциплина, изучающая методы построения последовательности действий (операций), приводящих к нахождению оптимальных решений в условиях наличия альтернатив и ограничений.
- Наличие оптимального решения предполагает существование критерия отбора альтернатив.
- В общем случае в задачах принятия решений альтернативы описываются определенным набором переменных (параметров), которые используются при формализации критерия оптимальности и ограничений в виде математических функций.

0. Введение.
0.1 **Основные понятия.**

- **Изменяемые переменные** (переменные решения – decision variables) – переменные, оптимальные значения которых должны быть найдены в ходе решения математической модели задачи исследования операций:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- **Целевая функция** (objective function) – функция, вычисляющая количественное выражение критерия оптимальности:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_l)$$

Эта функция достигает экстремума, когда ее аргументы принимают значения, описывающие оптимальное решение задачи в соответствии с заданным критерием. Эта функция зависит как от изменяемых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так и от параметров задачи $a_1, a_2, \ldots, a_l$, которые принимают фиксированные значения, определяемые ее условием.

0. Введение.

0.1. **Основные понятия.**

- **Ограничения** (constraints) – неравенства или равенства, определяющие область допустимых значений (ОДЗ) изменяемых переменных, в которой осуществляется поиск решения (экстремума целевой функции).Часто выделяют два специфических типа ограничений:

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_{j1,} c_{j2}, \ldots, c_{jr}) \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_j \,,$$

$$j = 1,2,\ldots,m.$$

  - простые ограничения сверху (simple upper bound):

$$x_i \le u_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

  - неотрицательность переменных (nonnegativity restrictions):

$$x_i \ge 0 \;, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

0. Введение.
0.1. **Основные понятия.**

- **Математическая модель** (model) – результат формализации задачи исследования операций. Включает в себя множество изменяемых переменных, целевую функцию и ограничения, записанные в виде математических соотношений или заданные соответствующими вычислительными алгоритмами.
- **Параметры модели** (parameters) – множество параметров $\{a_k, b_j, c_{sj}, u_i\}$, входящих в структуру целевой функции и функций ограничений. Значения этих параметров определяются условием решаемой задачи и должны быть заданы при формировании математической модели.

0. Введение.
0.2. **Задача выбора операторов мобильной связи и тарифных планов.**

- Предположим, что нам необходимо выбрать операторов мобильной связи и тарифные планы для организации персональной системы мобильной связи.
- Известны:
  - среднемесячный объем разговоров с абонентами мобильных сетей Velcom, МТС, Belcel, республиканской телефонной сети,
  - тарифные планы операторов,
  - стоимость приемлемого мобильного телефона
  - требуемый срок окупаемости его приобретения,
  - максимальное количество телефонов,
  - предельная сумма разовых вложений в приобретение телефонов.

0. Введение.
0.2. **Задача выбора операторов мобильной связи и тарифных планов.** Варьируемые параметры и целевая функция

- Варьируемые параметры:
  - массив бинарных переменных x_i, $i=1,...,n.$ $x_i=\{1,0\}$.
  - Количество элементов массива n равно количеству существующих тарифных планов у всех операторов.
  - Значение 1 означает приобретение телефона и подключение к соответствующему тарифному плану соответствующего оператора.
- Функция, описывающая критерий оптимальности (целевая функция) – суммарные затраты в месяц

$$F(x_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i$$

здесь A_i – затраты в месяц на подключение по i-му тарифному плану

0. Введение.
0.2. **Задача выбора операторов мобильной связи и тарифных планов.** Структура месячных затрат (Velcom и МТС)

- Затраты в месяц по i-му тарифному плану для операторов Velcom и МТС определяются следующим образом:

$$A_i = \sum_{j=1}^{4} T_{ij} + B_i + P_i;$$

здесь $T_{ij} = v_j t_{ij}$ – стоимость j-го типа трафика объема vj, если он направлен на подключение по i-му тарифному плану (трафик направляется, если существует подключение по этому плану, т.е. $x_i = 1$, и тариф t_{ij} по этому плану наименьший из тарифов существующих подключений);

- B_i – ежемесячная абонентская плата по i-му плану;
- $P_i = S_i / d$ – ежемесячные отчисления за стоимость телефона S_i для i-го подключения из расчета окупаемости за d месяцев.

0. Введение.
0.2. **Задача выбора операторов мобильной связи и тарифных планов.** Структура месячных затрат (Belcel)

- Затраты в месяц по i-му тарифному плану для оператора Belcel определяются следующим образом:

$$A_i = M_i + P_i,$$

здесь M_i – ежемесячная оплата за разговоры определяется как

$$M_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{4} T_{ij}, & \text{если } B_i < \sum_{j=1}^{4} T_{ij}, \\ B_i, \text{ если } B_i \geq \sum_{j=1}^{4} T_{ij}. \end{cases}$$

- T_{ij} - стоимость j-го трафика, если он направлен на подключение по i-му тарифному плану;
- B_i – ежемесячная предоплата по i-му плану;
- $P_i = S_i/d$ – ежемесячные отчисления за стоимость телефона S_i для i-го подключения из расчета окупаемости за d месяцев.

0. Введение.
0.2. **Задача выбора операторов мобильной связи и тарифных планов.** Ограничения

- Ограничения в нашем случае принимают следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq X$$

где X – максимально приемлемое число телефонов

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \leq C$$

- здесь c_i – стоимость приемлемого телефона для i-го подключения, C – предельная сумма разовых вложений в стоимость телефонов.

0. Введение.
0.2. **Задача выбора операторов мобильной связи и тарифных планов.** Математическая модель задачи

- Окончательно математическая модель задачи оптимального выбора операторов мобильной связи и тарифных планов выглядит следующим образом:

$$\min F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i, \quad x_i = \{0,1\};$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le X;$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \le C.$$

0. Введение.
0.2. **Задача выбора операторов мобильной связи и тарифных планов.** Алгоритм и программная реализация

- Учитывая ограниченное число возможных вариантов оптимальное решение данной задачи может быть найдено путем полного перебора всех возможных вариантов
- Программная реализация метода была выполнена в среде пакета Microsoft Excel.
- Исходные данные заносятся в электронную таблицу, в ней же выполняется расчет целевой функции и функций, задающих ограничения.
- Перебор параметров выполняется с помощью небольшой программы, написанной на встроенном языке Microsoft Visual Basic.
- Ссылка на соответствующую книгу Excel размещена здесь.

0. Введение.
0.2. **Задача выбора операторов мобильной связи и тарифных планов.** Некоторые замечания

- Как это обычно бывает, рассмотренная нами формулировка задачи предполагает наличие целого ряда упрощающих предположений. В частности, нами не учитывались:
  - Качество связи
  - Интервал тарификации
  - Покрытие территории Беларуси
  - Возможность роуминга и тарифы на него
  - Функциональность и другие потребительские качества доступных телефонов
  - Человеческий фактор
  - И многое другое…
- Отметим, что варьируемые параметры в нашей задаче могли принимать только дискретные (бинарные) значения. Мы имели дело с задачей дискретной оптимизации.

0. Введение.

0.3. **Многовариантность математических моделей.** Задача нахождения коробки максимального объема заданной площади поверхности

- Рассмотрим почти «школьную» задачу построения оптимального решения: найти длину a, ширину b и высоту c прямоугольного параллелепипеда, имеющего наибольший объем V при заданной площади поверхности S.
- Математическая модель задачи:
  Варьируемые параметры – a, b, c. Необходимо найти максимум целевой функции $F(a,b,c)=V(a,b,c)=abc$
  $$max\ F(a,b,c);$$
  при ограничениях в виде равенства и неравенств:
  $$2ab+2ac+2bc=S;$$
  $$a > 0;\ b > 0;\ c > 0;$$
- Такую модель «школьными» методами решить невозможно (хотя интуитивно понятно, что решением будет куб). Оптимальное решение может быть найдено с помощью специальных методов нелинейного программирования, в частности реализованных в MS Excel (см. соответствующую книгу Excel)

0. Введение.
0.3. **Многовариантность математических моделей.** Задача нахождения коробки требуемого объема заданной площади поверхности

- **Модифицируем задачу:** требуется найти длину a, ширину b и высоту c прямоугольного параллелепипеда, имеющего заданный объем V при заданной площади S.
- Математическая модель задачи:
  Варьируемые параметры – a, b, c.
  Необходимо найти минимум целевой функции

$$\min F(a,b,c)$$
$$F(a,b,c)=(abc-V)^2$$

  при ограничениях:

$$2ab+2ac+2bc=S$$
$$a > 0;\ b > 0;\ c > 0;$$

- Эта модель оказывается «не по зубам» стандартным алгоритмам решения задач Excel.

0. Введение.

0.3. **Многовариантность математических моделей.** Задача нахождения коробки требуемого объема заданной площади поверхности

- **Переформулируем математическую модель:**
- Варьируемые параметры - a, b.
- Необходимо найти минимум целевой функции

$$\min F(a,b)$$

$$F(a,b)=(abc-V)^2$$

где $c=(S-2ab)/2(a+b)$

при ограничениях:

$$a > 0;\ b > 0;\ a+b < S;$$

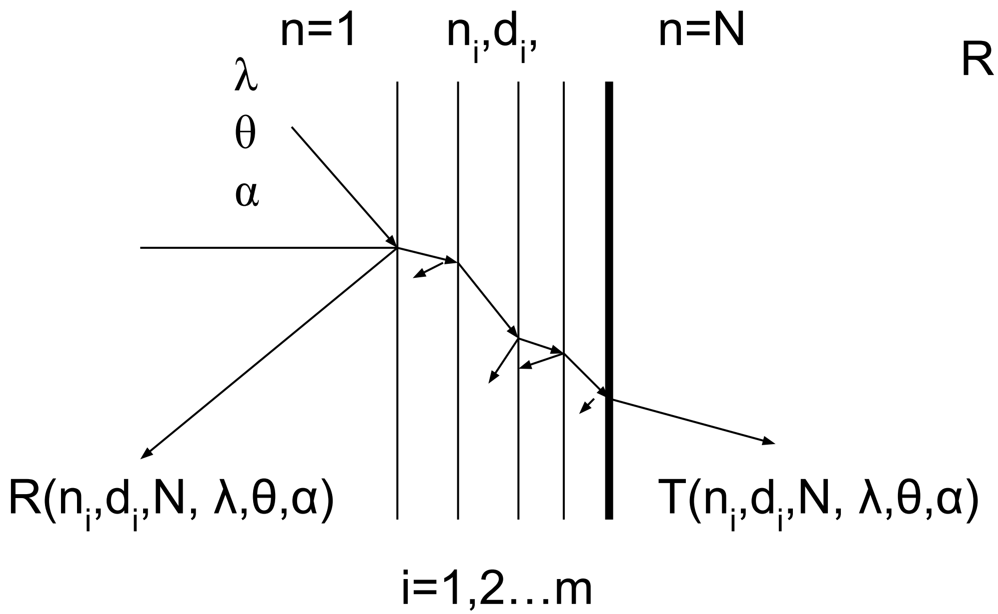
- Эта задача решается в Excel без малейших проблем, хотя, очевидно, что она имеет несколько решений и соответственно целевая функция имеет не один минимум.
- Кстати, при решении ограничения можно не учитывать, так как априори очевидно, что минимум функции лежит внутри области допустимых значений переменных a и b.

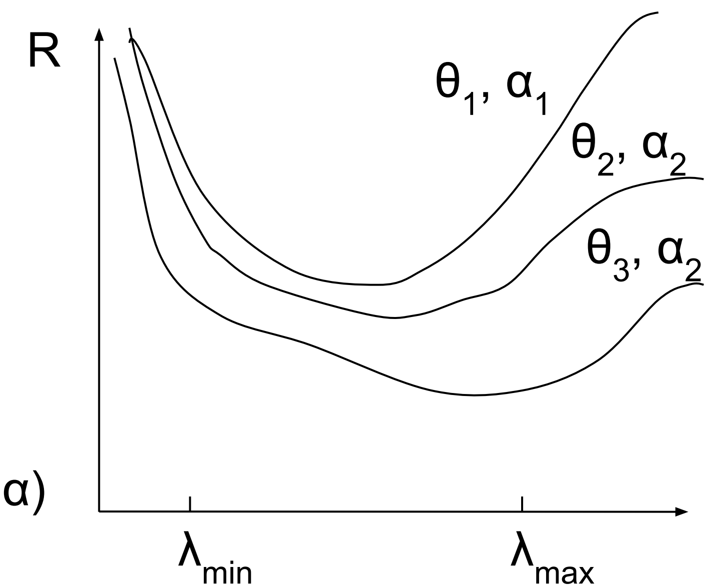
0. Введение.

0.4. **Последовательность решения задач исследования операций.**

Постановка задачи проектирования просветляющего оптического покрытия

- **Характерный пример более сложной задачи – нахождение оптимальных параметров широкополосного просветляющего оптического покрытия**





- Требуется минимизировать энергетический коэффициент отражения от покрытия в диапазоне длин волн, углов падения и поляризации

0. Введение.

0.4. **Последовательность решения задач исследования операций.**

Формализация задачи

- Пусть покрытие состоит из непоглощающих диэлектрических слоев, характеризуемых толщинами d_i и показателями преломления n_i.
- На плоскослоистое покрытие под углом θ падает плоская электромагнитная волна, длина волны λ, угол поляризации α.
- Известна рекурсивная формула для расчета энергетического коэффициента отражения $R=R(n_i,d_i,N,\lambda,\theta,\alpha)$.
- Варьируемые параметры: n_i,d_i, i=1,2…m. Альтернативные решения отличаются значениями варьируемых параметров.
- Необходимо минимизировать средний в заданном диапазоне длин волн $\lambda_{min} \le \lambda \le \lambda_{max}$, углов падения $\theta_{min} \le \theta \le \theta_{max}$ и углов поляризации $\alpha_{min} \le \alpha \le \alpha_{max}$
- Суммарная тощина покрытия ограничена величиной D_{max}
- Показатели преломления материалов слоев лежат в диапазоне, определяемом выбранными материалами для нанесения просветляющих слоев, диапазон толщин слоев ограничен технологическими возможностями.

0. Введение.

0.4. **Последовательность решения задач исследования операций.**

Математическая модель

$$\min F(n_i, d_i), \quad i = 1,2 \ldots m;$$

$$F(n_i, d_i) = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} R(n_i, d_i, N, \lambda, \theta, \alpha)\, d\alpha\, d\theta\, d\lambda, \qquad i = 1,2 \ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_i \leq D_{\max}$$

$$n_{\max} \leq n_i \leq n_{\min}, \qquad i = 1,2 \ldots m$$

$$d_{\max} \leq d_i \leq d_{\min}, \qquad i = 1,2 \ldots m$$

0. Введение.
0.5. **Структурная и параметрическая оптимизация**

- Процедура поиска оптимального решения может быть реализована двумя способами:
  - В первом случае поиск оптимального решения достигается путем нахождения оптимальных значений (обычно – доставляющих минимум или максимум целевой функции) варьируемых параметров задачи. В этом случае говорят о **параметрической оптимизации**.
  - Во втором случае для нахождения оптимального решения варьируют структуру оптимизируемого объекта. Такая оптимизация называется **структурной**. Обычно структурная оптимизация сочетается с оптимизацией параметрической.

0.6. **Методы исследования операций**

- Все модели исследования операций можно разделить на группы по следующим основным признакам:
  - Вид модели
    - детерминированные
    - вероятностные
  - Тип варьируемых переменных:
    - дискретные
    - непрерывные
  - Вид целевой функции и ограничений:
    - линейные
    - нелинейные
- **Для их решения используются:**
  - **Методы оптимизации**
  - **Методы имитационного моделирования**
  - **Эвристические подходы**

0.6. Методы исследования операций
Наука и искусство

- Этапы реализации методов исследования операций:
  - **Формализация исходной проблемы**
  - **Построение математической модели**
  - **Поиск оптимального решения (решение модели)**
  - **Проверка адекватности модели**
  - **Реализация решения**
- Из всех этапов только третий достаточно точно определен и прост в силу хорошо проработанной математической теории. Выполнение остальных этапов в значительной мере является искусством, а не наукой, и процедуры выполнения этих этапов не строго детерминированы.
- На всех этапах, предшествующих получению оптимального решения математической модели, успех зависит от опыта и творчества всей команды (специалистов-аналитиков и заказчиков задачи принятия решений), занимающейся решением задачи исследования операций

0.7. Этапы реализации методов исследования операций

- **Формализация исходной проблемы**
  - предполагает исследование предметной области, где возникла рассматриваемая проблема
  - описание возможных альтернативных решений
  - выбор варьируемых параметров
  - определение критерия оптимальности и задание целевой функции
  - построение системы ограничений
- **Построение математической модели**
  - перевод формализованной задачи на язык математических соотношений
  - попытка построить математическую модель как одну из стандартных математических моделей
  - если модель очень сложная и не приводится к стандартному типу, ее следует упростить, либо применить эвристический подход, либо методы имитационного моделирования

0.7. Этапы реализации методов исследования операций

- **Поиск оптимального решения (решение модели)**
  - Применение известных методов оптимизации, методов имитационного моделирования или эвристических подходов
  - Исследование чувствительности оптимального решения к отклонению варьируемых параметров
- **Проверка адекватности модели**
  - Оценка полученного решения: имеет ли оно смысл и приемлемо ли интуитивно
  - Сравнение полученного решения с известными ранее моделями или поведением реальной системы
- **Реализация решения**
  - Перевод результатов решения модели в рекомендации, комплекты технической документации или другие документы, понятные для лиц принимающих решение – заказчиков решения исходной проблемы

1. Линейное программирование

1. Линейное программирование
1.1. **Постановка задачи**

- **Линейное программирование (ЛП) –** это метод математического моделирования, разработанный для *оптимизации* использования *ограниченных* ресурсов.
- Модель линейного программирования, как и любая задача исследования операций включает три основных элемента:
  - **Переменные,** которые следует определить,
  - **Целевая функция,** подлежащая минимизации (или максимизации)
  - **Ограничения,** которым должны удовлетворять переменные
- Линейное программирование оперирует с линейными моделями, то есть **целевая функция и функции левой части ограничений должны быть линейными:**

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

1. Линейное программирование.

1.2. Графическое решение задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг

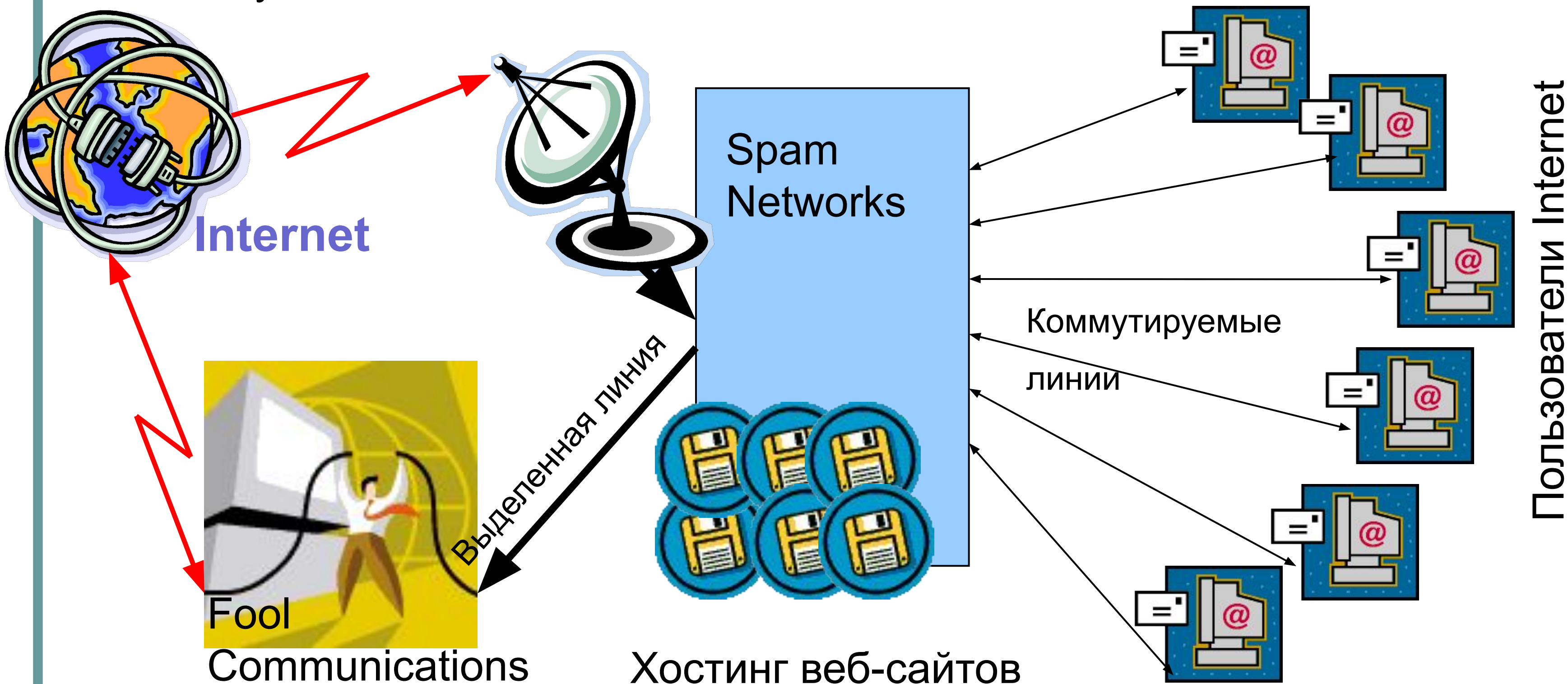
- **Телекоммуникационная компания Spam Networks** оказывает два основных вида услуг: подключение пользователей по коммутируемым каналам по безлимитному плану в Internet и хостинг веб-сайтов.
- Для организации доступа в Internet компания покупает асимметричный трафик:
  - исходящий у оператора Fool Communications по цене 6 долларов за 1 Кбит/с, пропускная способность выделенной линии – до 2 Мбит/с
  - входящий трафик через собственную приемную спутниковую тарелку по цене 0,8 доллара за 1 Кбит/с, максимальный объем – 2 Мбит/с
- Для предоставления услуги хостинга одного сайта необходимо зарезервировать 2 Кбит/с на передачу и 1 Кбит/с на прием. Месячный доход от услуги составляет 8 долларов.
- Для предоставления услуги доступа в Internet необходимо зарезервировать 4 Кбит/с на прием и 1 Кбит/с на передачу. Месячный доход от услуги составляет 6 долларов.

1. Линейное программирование.

1.2. Графическое решение задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг

- Кроме того, количество портов на сервере удаленного доступа ограничено 32 портами, что не позволяет оказывать услуги доступа в Internet более чем 480 клиентам.



1.2. Графическое решение задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: формализация исходной проблемы

- **Множество возможных альтернатив** – различное число сопровождаемых веб-сайтов и количество подключаемых пользователей Internet
- **Варьируемые параметры** – число сопровождаемых сайтов x_1 и число пользователей Internet x_2. Хотя параметры являются целочисленными, эту задачу можно попытаться решить в вещественных числах и затем округлить решение до ближайших целых.
- **Цель –** получение максимального дохода: $F(x_1, x_2)=8x_1+6x_2$
- **Ограничения:** общий объем входящего трафика меньше или равен предельно возможному, общий объем исходящего трафика меньше или равен пропускной способности канала, число подключаемых пользователей меньше или равно емкости портов x 12-15 – средний коэффициент использования. Число сопровождаемых сайтов и число пользователей неотрицательны.

1. Линейное программирование.

1.2. Графическое решение задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: математическая модель

$$\max F(x_1, x_2);$$

$$F(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2;$$

$$x_1 + 4x_2 \le 2048;$$

$$2x_1 + x_2 \le 2048;$$

$$x_2 \le 480;$$

$$x_1 \ge 0;$$

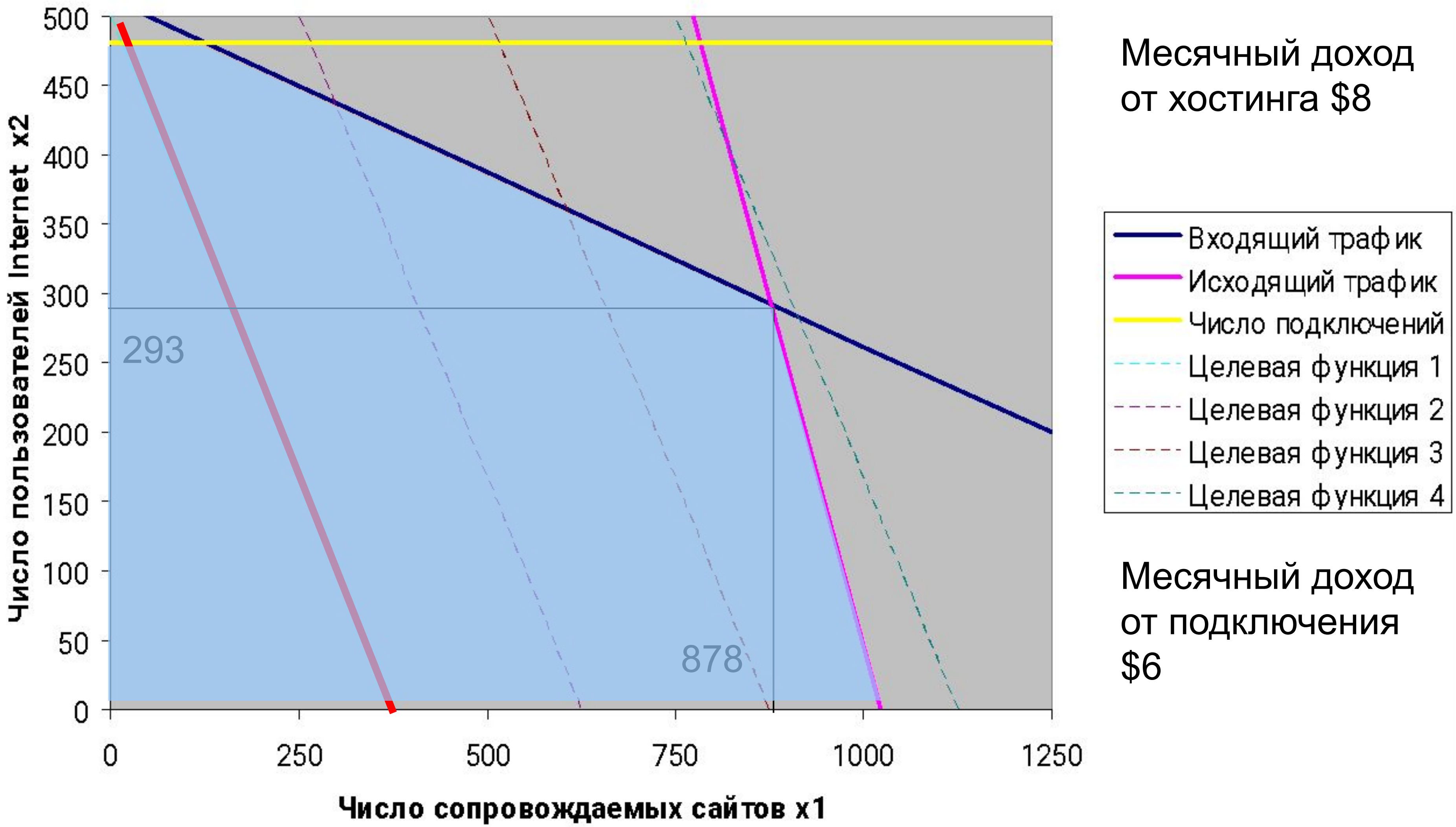
$$x_2 \ge 0.$$

- **Данная модель – классическая модель линейного программирования.**
- Замечание: хотя мы и назвали задачу: «оптимизация структуры услуг…», это – типичная задача параметрической оптимизации.
- Рассмотрим графическое решение этой модели (модель решается в электронной таблице Excel: см. соответствующую книгу).

1. Линейное программирование.

1.2. Графическое решение задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: решение



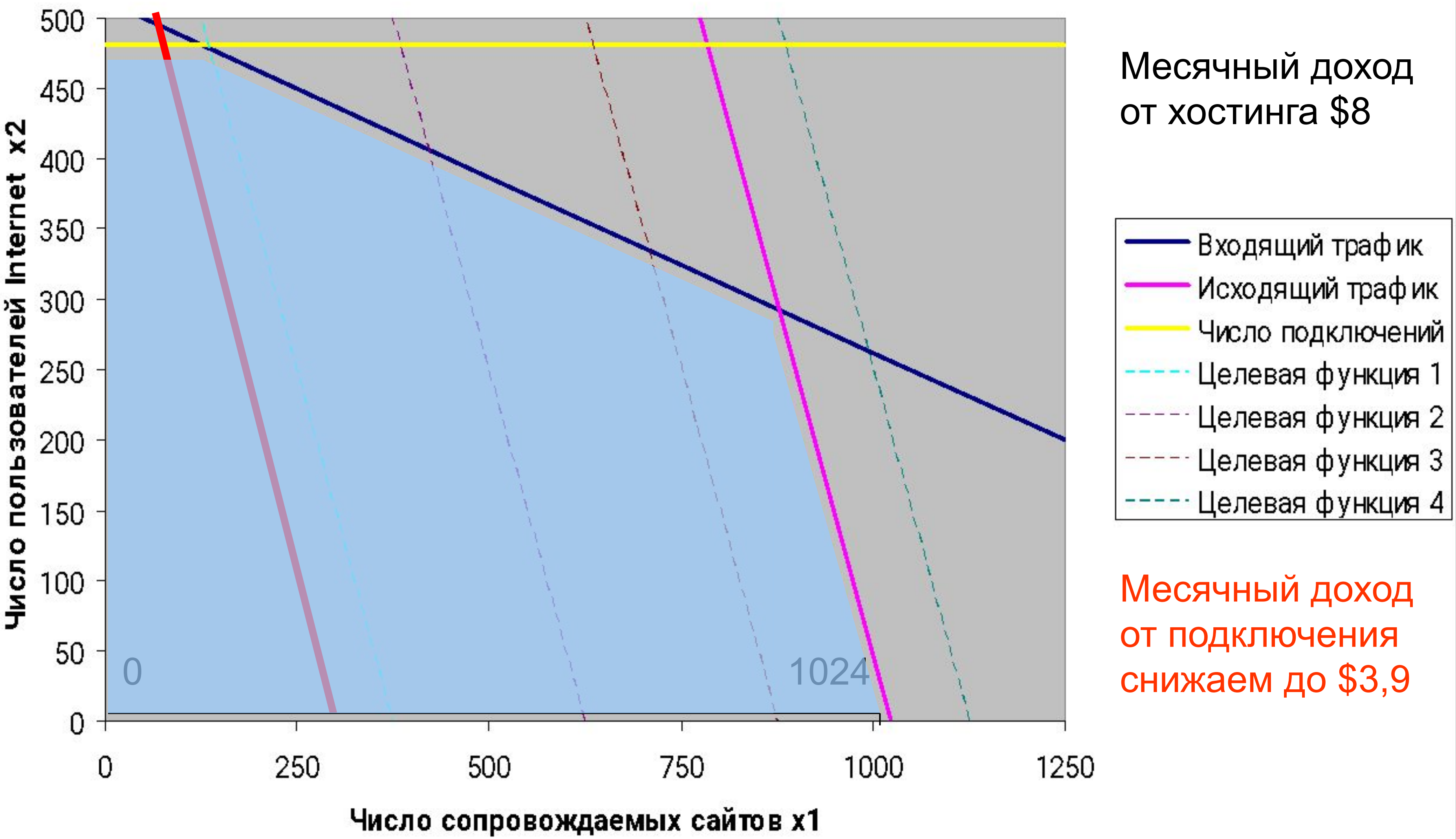
Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

1. Линейное программирование.

1.3.Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение коэффициентов целевой функции



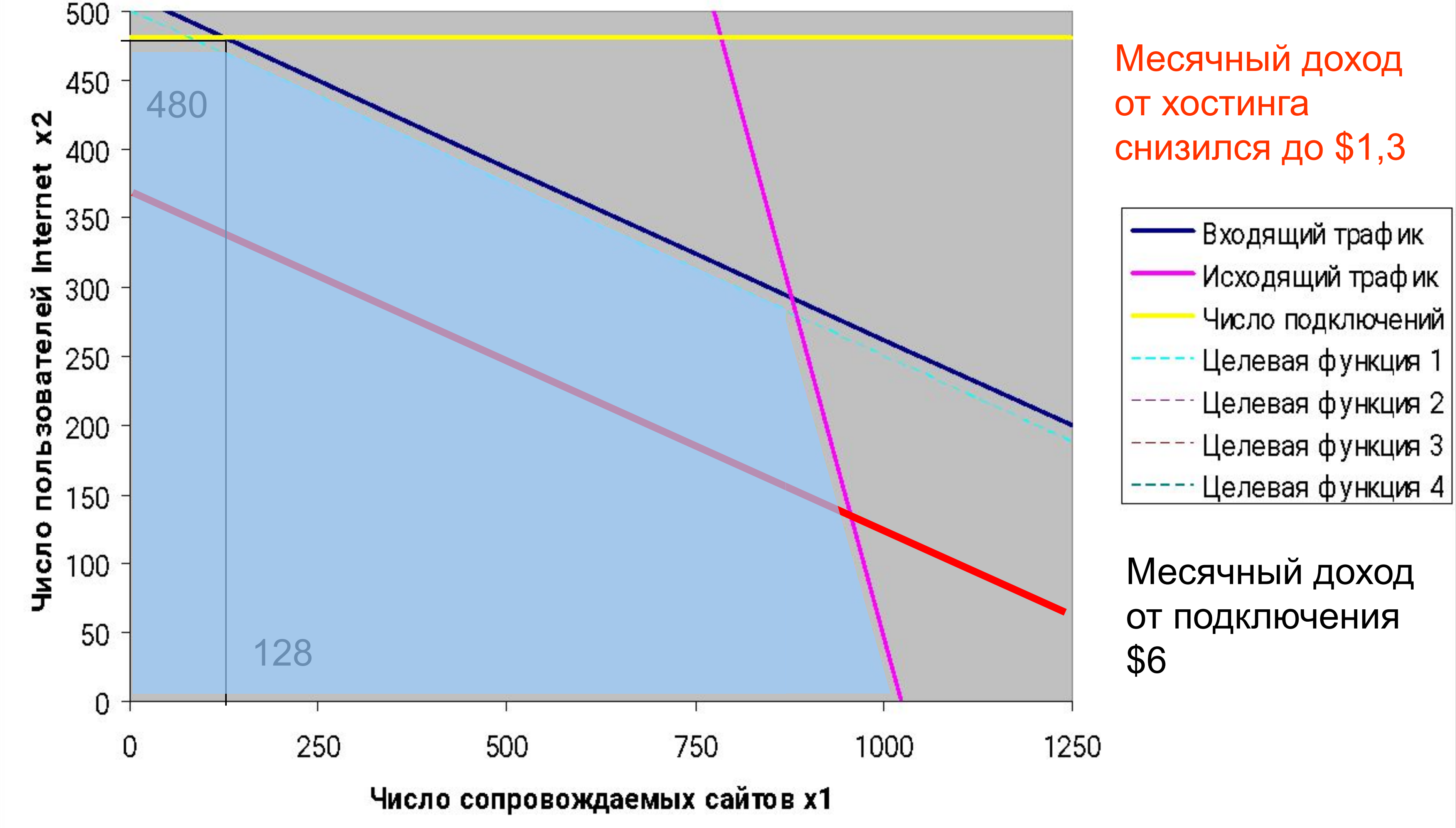
Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения снижаем до $3,9

1. Линейное программирование.

1.3.Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение коэффициентов целевой функции



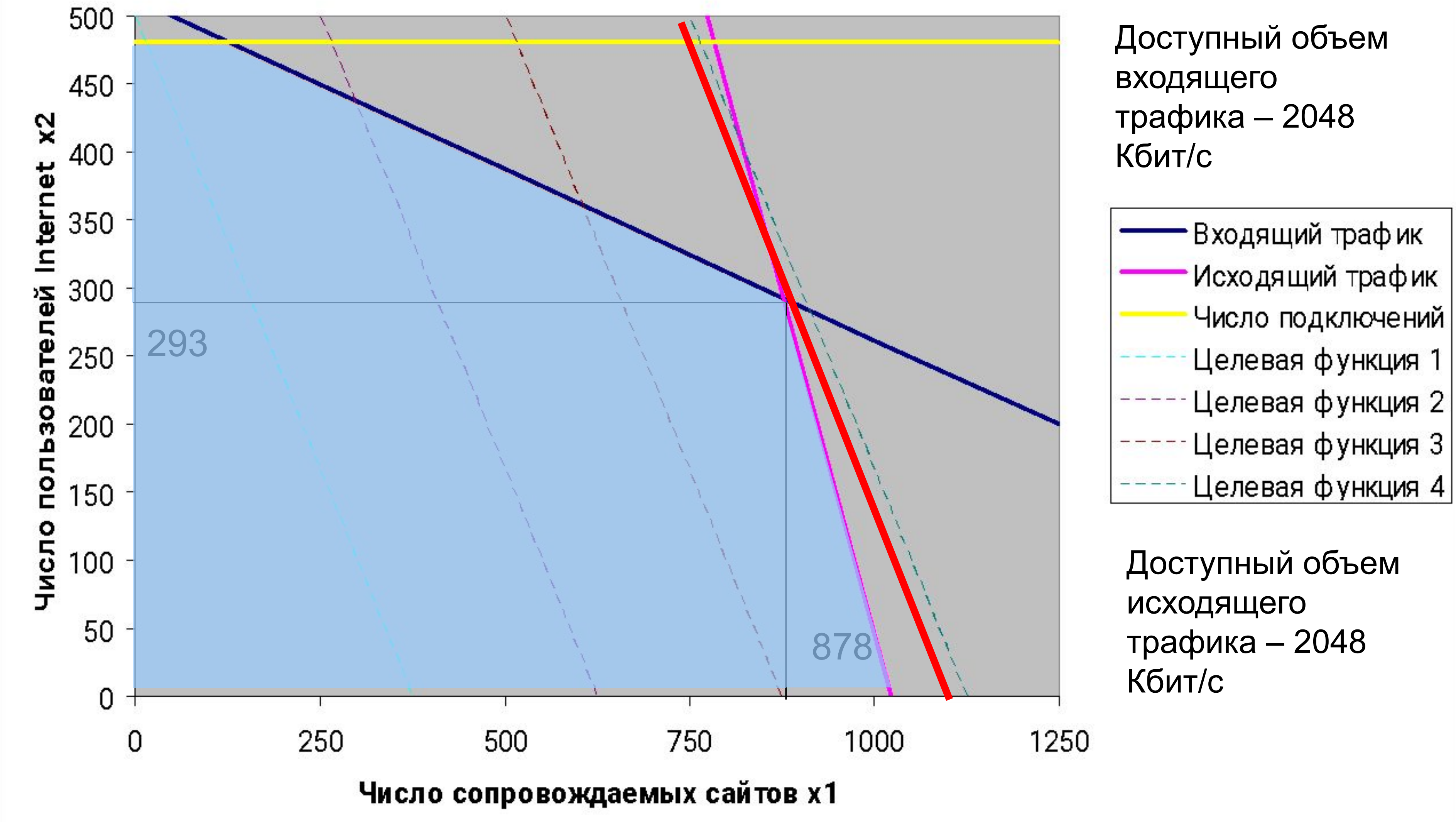
Месячный доход от хостинга снизился до $1,3

Месячный доход от подключения $6

1. Линейное программирование.

1.3.Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение ограничений (исходные ограничения)



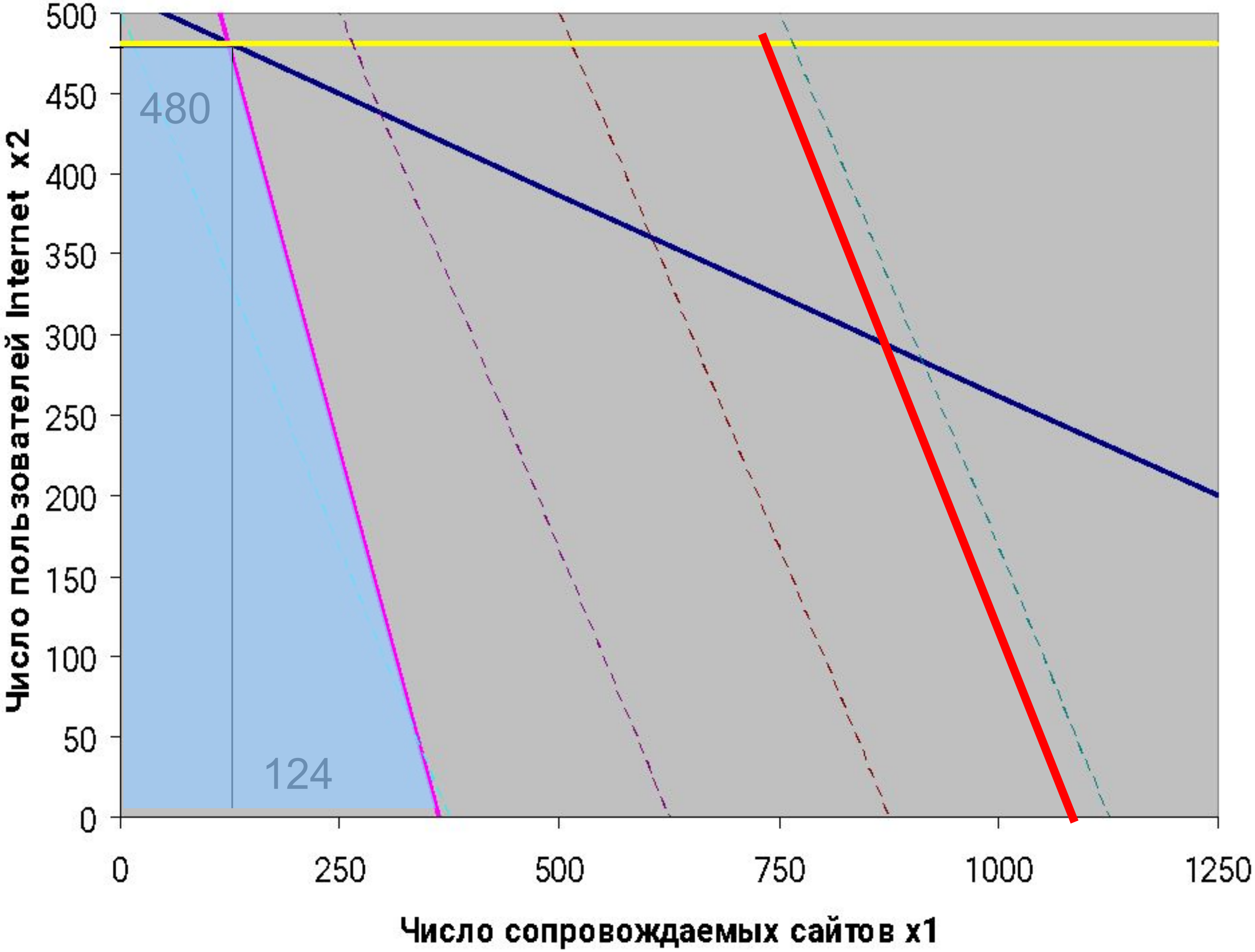
Доступный объем входящего трафика – 2048 Кбит/с

Доступный объем исходящего трафика – 2048 Кбит/с

1. Линейное программирование.

1.3.Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение ограничений (сокращение трафика)



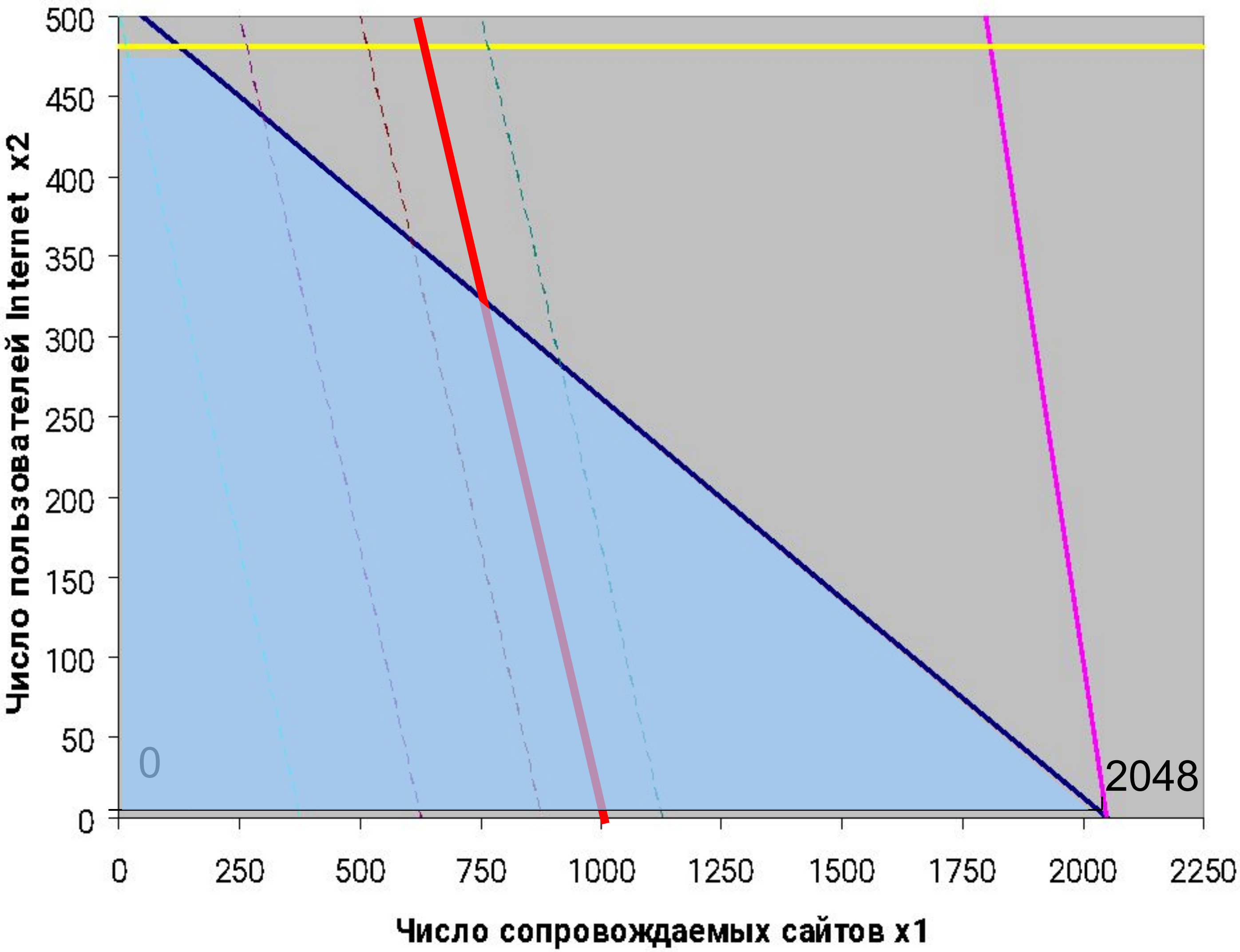
Доступный объем входящего трафика – 2048 Кбит/с

Доступный объем исходящего трафика сократился до 728 Кбит/с

1. Линейное программирование.

1.3.Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение ограничений (увеличение доступного трафика)



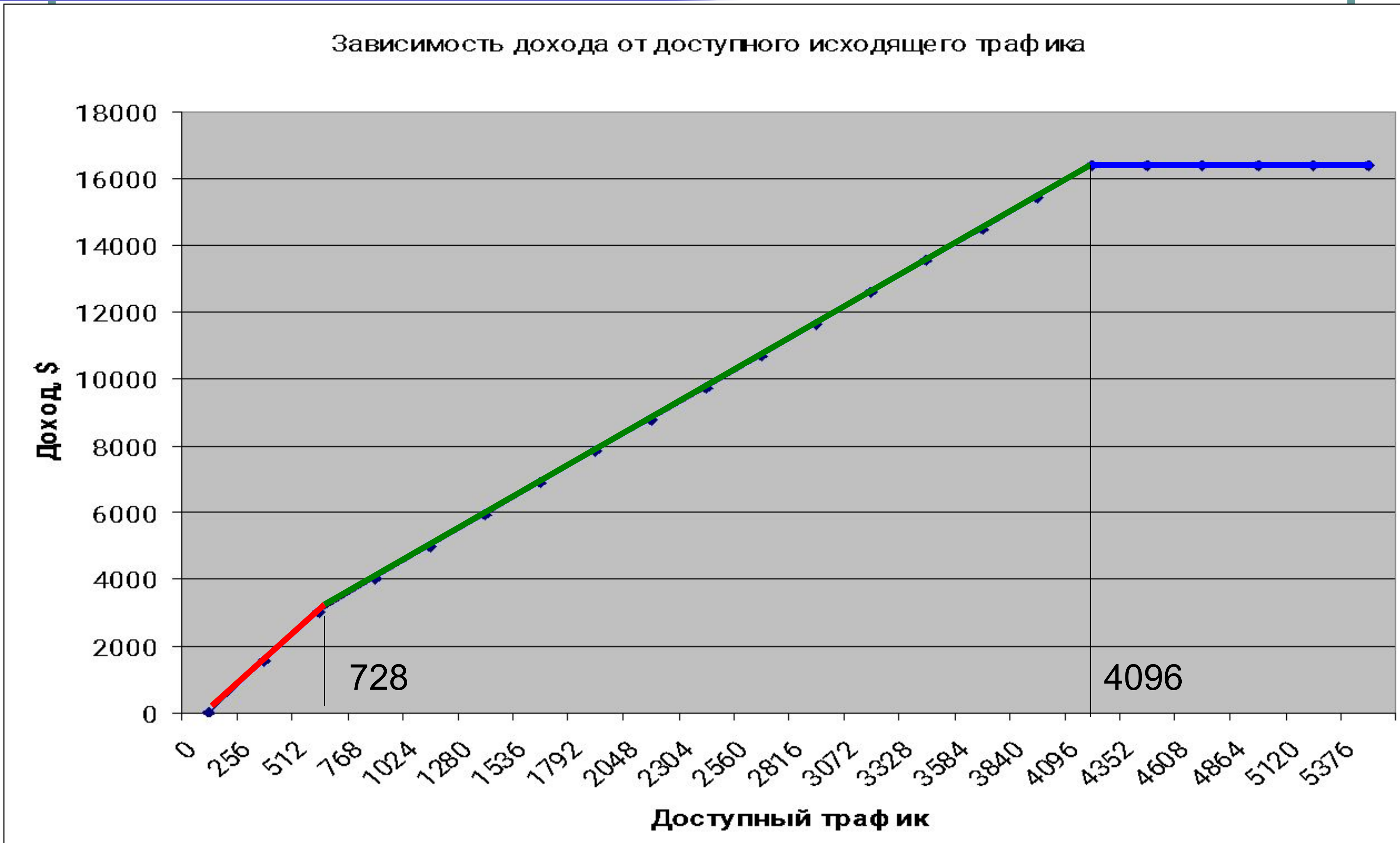
Доступный объем входящего трафика – 2048 Кбит/с

Доступный объем исходящего трафика увеличился до 4096 Кбит/с

1. Линейное программирование.

1.3.Графическое исследование чувствительности решения

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: изменение ограничений. Стоимость ресурса.



1.4.Принципы построения аналитических методов решения задачи ЛП

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг: Анализ результатов поиска решения

- **Интуитивно очевидно, что оптимальное решение может находиться только в угловых точках пространства допустимых решений.** На этом основан симплексный алгоритм решения задач линейного программирования.
- При анализе чувствительности наблюдаются **качественные изменения** при переходе с одной ветви решения на другую. Необходимо особенно тщательно анализировать чувствительность, если решение находится в окрестности таких точек
- **Графическое решение возможно только в простейших случаях –** при числе варьируемых параметров не более 2 и небольшом числе ограничений.
- **В общем случае необходимо построение эффективного вычислительного алгоритма для решения задачи линейного программирования.**

1. Линейное программирование.

1.4.Принципы построения аналитических методов решения задачи ЛП

Методика поиска оптимального решения

- Оптимальное решение задачи ЛП всегда ассоциируется с угловой точкой пространства решений (**крайней точкой** множества).
- Для построения симплекс-метода необходимо вначале выполнить **алгебраическое описание** крайних точек пространства решений.
- Для реализации этого перехода сначала надо **привести задачу ЛП к *стандартной форме***, преобразовав неравенства ограничений в равенства путем введения дополнительных переменных.
- Стандартная форма позволяет алгебраически получить **базисные решения**, (используя систему уравнений, порожденную ограничениями). Эти базисные решения полностью определяют **все крайние точки** пространства решений.

- **Симплекс-метод позволяет найти оптимальное решение среди всех базисных.**

1. Линейное программирование.
1.5.Стандартная форма задачи ЛП
шаг 1

- **Все ограничения** (включая ограничения неотрицательности переменных) **преобразуются в равенства с неотрицательной правой частью.**
  - *Неравенства любого типа* (со знаками ≤ или ≥) *можно преобразовать в равенства* путем добавления в левую часть неравенств дополнительных переменных – остаточных или избыточных.

$$f(\vec{x}) \le b \Leftrightarrow f(x) + y_k = b, \;\; y_k \ge 0;$$
$$f(\vec{x}) \ge b \Leftrightarrow f(x) - z_l = b, \;\; z_l \ge 0;$$

  остаточные переменные y_k обычно интерпретируются как количество неиспользованных ресурсов, а избыточные переменные z_l – как превышение левой части неравенства над заданным минимально допустимым значением.
  - *Правую часть равенства всегда можно сделать неотрицательной путем умножения равенства на -1.*
  - Кстати, неравенство вида ≤ также преобразуется в неравенство вида ≥ (и наоборот) посредством умножения обоих частей неравенства на -1.

1.5.Стандартная форма задачи ЛП

шаг 2

- **Все варьируемые переменные должны быть неотрицательными.**
  - Преобразование **неположительных** переменных в неотрицательные:

$$x_i \le 0 \;\Rightarrow\; x_i^- := -x_i \;\Rightarrow\; x_i^- \ge 0;$$

  - Назовем переменную **свободной**, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Преобразование свободных переменных в неотрицательные можно выполнить следующим образом:

$$x_i^+ - x_i^- := x_i \;\Rightarrow\; x_i^+ \ge 0,\; x_i^- \ge 0;$$

    причем одну из двух переменных x_i^- или x_i^+ можно полагать равной нулю. Например, если $x=3$, то ее можно представить в виде $x_i^+ =3,\ x_i^- =0$. Если $x=-5$, то $x_i^+ =0,\ x_i^- =-5$.
  - Такие преобразования должны быть выполнены во всех неравенствах и целевой функции
  - После решения задачи с переменными x_i^- и x_i^+ значения исходных переменных восстанавливаются с помощью обратной подстановки.

1. Линейное программирование.
1.5.Стандартная форма задачи ЛП
шаг 3

- **Целевую функцию следует минимизировать или максимизировать**
  - Задача

$$\max F(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)^T$$

эквивалентна задаче

$$\min - F(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)^T$$

и наоборот

1. Линейное программирование.

1.5.Стандартная форма задачи ЛП

Математическая модель в стандартной форме

$$\max F(x_1, x_2);$$
$$F(x_1, x_2) = 8x_1+6x_2;$$
$$x_1+4x_2 \le 2048;$$
$$2x_1+x_2 \le 2048;$$
$$x_2 \le 480;$$
$$x_1 \ge 0;$$
$$x_2 \ge 0.$$

$$\max F(x_1, x_2);$$
$$F(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2;$$
$$x_1+4x_2 + y_1 = 2048;$$
$$2x_1+x_2 + y_2 = 2048;$$
$$x_2 + y_3 = 480;$$
$$x_1 \ge 0; \; x_2 \ge 0;$$
$$y_1 \ge 0; \; y_2 \ge 0; \; y_3 \ge 0;$$

1. Линейное программирование.

1.5.Стандартная форма задачи ЛП

Математическая модель в стандартной форме (после переобозначения переменных)

$$x_3 = y_1, \qquad x_4 = y_2, \qquad x_5 = y_3;$$

$$\max\ F(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T;$$

$$F(\vec{x}) = 8x_1 + 6x_2,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2048,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 2048,$$

$$x_2 + x_5 = 480,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

1. Линейное программирование.

1.6.Понятие базисного решения задачи ЛП

Допустимые базисные решения

- Задача ЛП в стандартной форме содержит m линейных равенств с n неизвестными переменными (m<n).
- Разделим n переменных на два множества:
  - n-m переменных, которые положим равными нулю;
  - оставшиеся m переменных, значения которых определяются как решение системы из m линейных уравнений с m переменными.
- Если решение полученной СЛАУ единственное, то соответствующие m переменных называют **базисными**, а остальные n-m нулевых переменных - **небазисными**. В этом случае результирующие значения переменных составляют **базисное решение**.
- Если все переменные принимают неотрицательные значения, то такое базисное решение называют **допустимым**, в противном случае – **недопустимым.**
- Нетрудно видеть, что количество всех допустимых базовых решений для m уравнений с n неизвестными не превосходит

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

1.6.Понятие базисного решения задачи ЛП

Свободные переменные и базисные решения

- Свободные переменные мы определили как переменные, которые могут принимать любые действительные значения (положительные, нулевые и отрицательные).
- В стандартной форме записи задачи ЛП свободная переменная x_i должна быть представлена как разность двух неотрицательных переменных:

$$x_i^+ - x_i^- := x_i \;\Rightarrow\; x_i^+ \geq 0,\; x_i^- \geq 0;$$

Из определения базисного решения очевидно, что невозможна ситуация, когда x_i^+ и x_i^- являются одновременно базисными переменными, что вытекает из их зависимости.

- Это означает, что в любом базисном решении по крайней мере одна из переменных x_i^+ и x_i^- должна быть небазисной, то есть нулевой.
- Ранее было показано, что при этом переменная x_i может принимать любое действительное значение (если $x=3$, то ее можно представить в виде $x_i^+ =3$, $x_i^- =0$; если $x=-5$, то $x_i^+ =0$, $x_i^- =-5$).

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Идея алгоритма

- *Можно доказать*, что решение задачи ЛП может достигаться только в одной из угловых точек ОДЗ варьируемых параметров (в крайней точке пространства решений).
- *Можно доказать*, что базисные решения полностью определяют все крайние точки пространства решений.
- Тогда решение может быть найдено путем перебора всех допустимых базисных решений, что неэффективно.
- Алгоритм симплекс-метода находит оптимальное решение, рассматривая ограниченное количество допустимых базисных решений.
- Алгоритм начинается с некоторого допустимого базисного решения и затем пытается найти другое базисное решение, улучшающее значение целевой функции.
- Для этого необходимо:
  - ввести в число базисных переменную, которая ранее была небазисной (это возможно, если ее возрастание ведет к увеличению целевой функции);
  - одну из текущих базисных переменных сделать нулевой (небазисной): это необходимо, чтобы получить систему m уравнений с m неизвестными.

1.7. Основы симплекс-метода

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг. Математическая модель.

- Вспомним математическую формулировку задачи

$$\max F(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T;$$

$$F(\vec{x}) = 8x_1 + 6x_2,$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2048,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 2048,$$

$$x_2 + x_5 = 480,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

x_1 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 – число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 – неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 – неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_4 – неиспользуемая емкость портов

1.7. Основы симплекс-метода

Оптимизация структуры телекоммуникационных услуг. Система уравнений

- Перепишем уравнения в виде:

$$
\begin{aligned}
1F &- 8x_1 - 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0, \\
0F &+ 1x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 2048, \\
0F &+ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2048, \\
0F &+ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 480,
\end{aligned}
$$

x_1 – число сопровождаемых сайтов,
x_2 – число подключаемых пользователей к Internet,
x_3 – неиспользуемая пропускная способность спутникового канала,
x_4 – неиспользуемая пропускная способность исходящего канала,
x_4 – неиспользуемая емкость портов

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Исходная таблица

- Задачу ЛП в стандартной форме можно представить в виде таблицы:

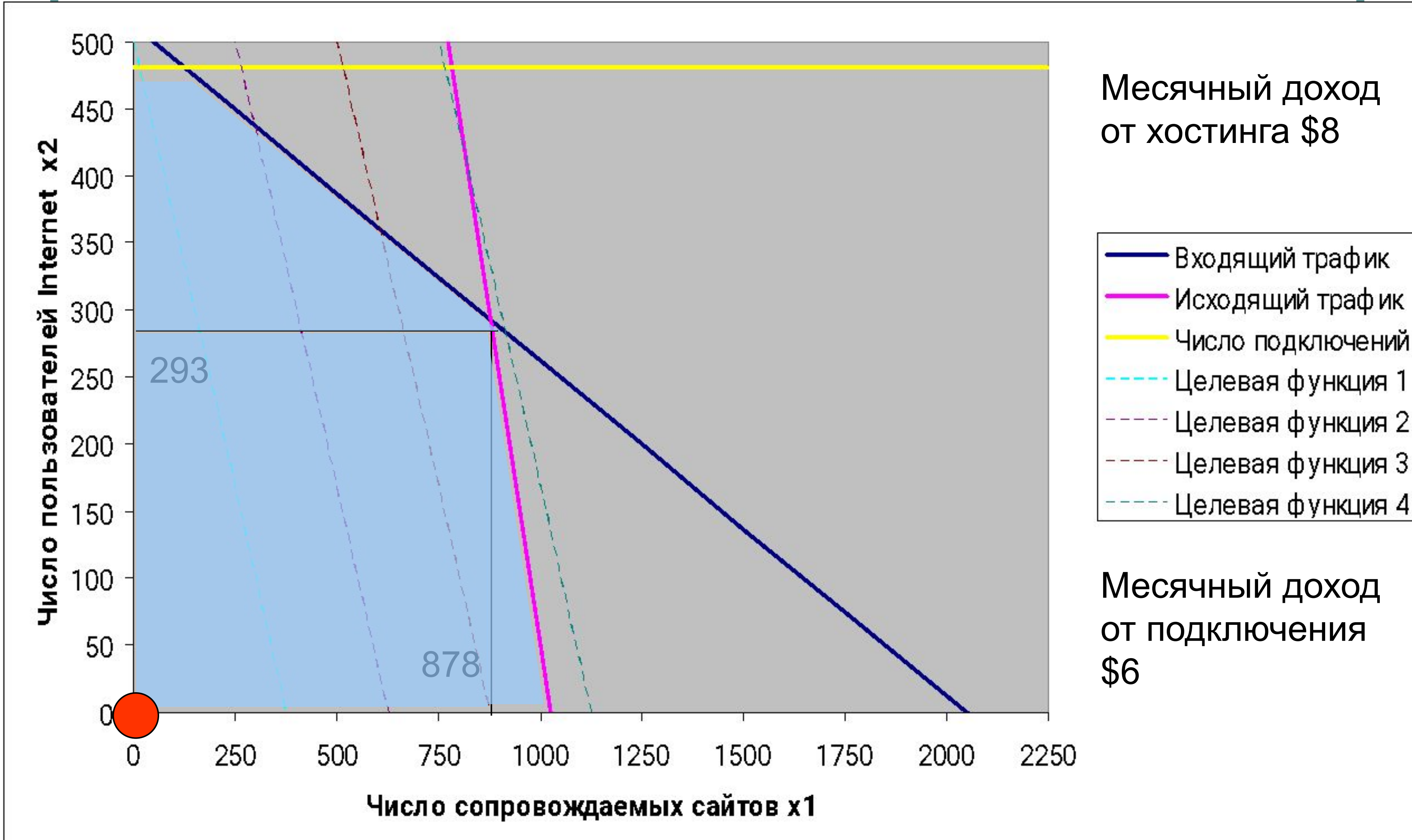
Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	-8	-6	0	0	0	F	0
1	0	1	4	1	0	0	x_3	2048
2	0	2	1	0	1	0	x_4	2048
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

- Решение: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=2048$; $x_4=2048$; $x_5=480$.

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Начальное допустимое базисное решение на графике



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Определение вводимой в базис переменной

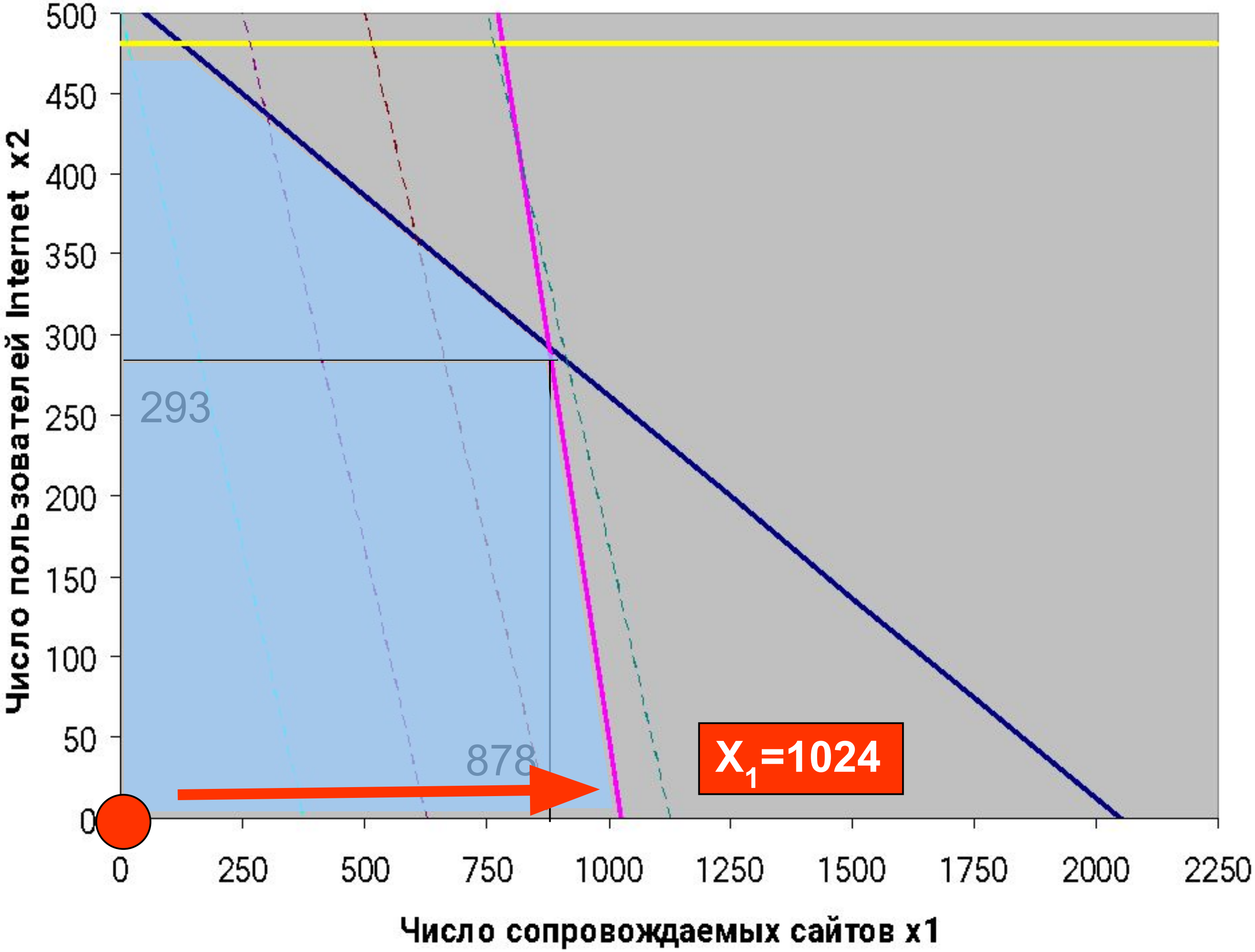
Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	-8	-6	0	0	0	F	0
1	0	1	4	1	0	0	x_3	2048
2	0	2	1	0	1	0	x_4	2048
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

- Вводим в базис переменную, отрицательный коэффициент при которой в F-строке таблицы (положительный коэффициент в целевой функции) наибольший по абсолютной величине. Это - x_1.

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Графическое нахождение наибольшего значения, которое может принять вводимая переменная.



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

1.7. Основы симплекс-метода

Алгебраическое нахождение наибольшего значения, которое может принять вводимая переменная.

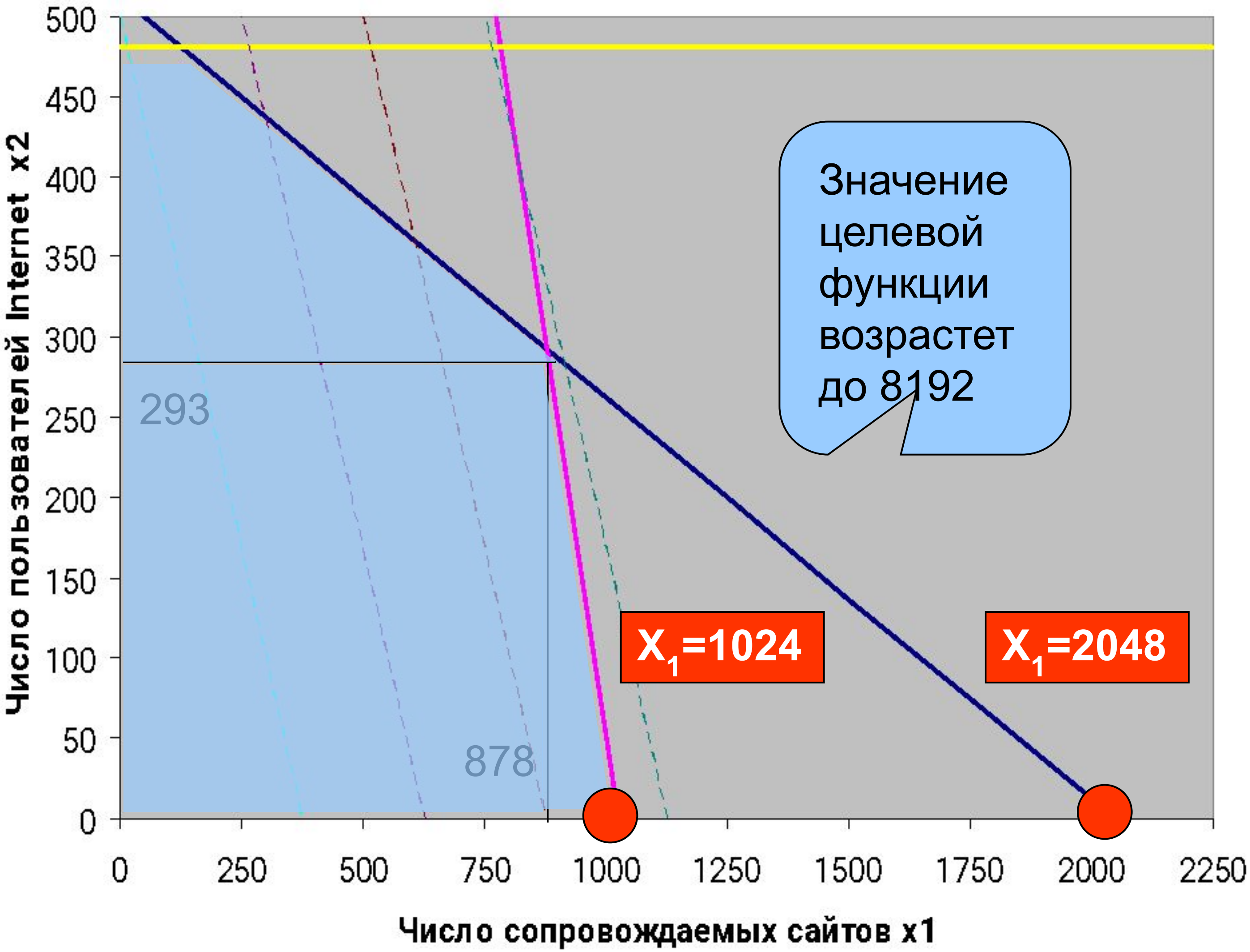
- Симплекс-метод должен определять новую точку алгебраически.
- Эта точка – точка пересечения прямых, соответствующих ограничениям, с координатной осью, соответствующей вводимой переменной (в данном случае – с осью $0x_1$.
- Алгебраически эта точка – отношение правой части равенства (столбца «Решение») к коэффициенту при вводимой переменной (x_1).
- Разумеется, нас интересуют только **неотрицательные** отношения.
- Чтобы точка лежала внутри ОДЗ надо из всех положительных выбрать **наименьшее** значение

x_1	Базис	Решение	Отношение (точка пересечения)
1	x_3	2048	2048/1=2048
2	x_4	2048	2048/2=1024 (минимум)
0	x_5	480	480/0=∞ (не подходит)

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Алгебраическое нахождение наибольшего значения, которое может принять вводимая переменная: графическая иллюстрация.



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Выбор исключаемой из базиса переменной

- Исключается та переменная, которой в найденной нами точке в таблице соответствовало наименьшее неотрицательное отношение.
- В рассматриваемом случае это – переменная x_4 (отношение равно 1024).
- Критерий исключения таков, потому что именно в этом случае в новом базисном решении переменная x_1 автоматически получит наилучшее из возможных значение 1024.
- Вычисление нового базисного решения основано на методе исключения переменных (метод Гаусса-Жордана)

1.7. Основы симплекс-метода

Определение ведущего столбца, ведущей строки и ведущего элемента

- **Ведущий столбец** – столбец, соответствующий вводимой в базис переменной.
- **Ведущая строка** – строка, соответствующая исключаемой переменной.
- **Ведущий элемент** – элемент, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	-8	-6	0	0	0	F	0
1	0	1	4	1	0	0	x_3	2048
2	0	2	1	0	1	0	x_4	2048
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

1. Линейное программирование.
1.7. Основы симплекс-метода
Вычисление нового базисного решения: шаг 1.

- **Вычисление элементов новой ведущей строки**
- Новая ведущая строка = Текущая ведущая строка / ведущий элемент

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	-8	-6	0	0	0	F	0
1	0	1	4	1	0	0	x_3	2048
2	0/2=0	2	1/2=½	0/2=0	1/2=½	0/2=0	x_4	2048/2 =1024
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

1. Линейное программирование.
1.7. Основы симплекс-метода
Вычисление нового базисного решения: шаг 2.

- **Вычисление элементов остальных строк**
- Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце x Новая ведущая строка)

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	-8	-6	0	0	0	F	0
1	0	1	4	1	0	0	x_3	2048
2	0	1	½	0	½	0	x_1	1024
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

1.7. Основы симплекс-метода

Вычисление нового базисного решения: шаг 2.

- **Вычисление элементов остальных строк**
- Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце х Новая ведущая строка)
- **Нулевая строка:** коэффициент в ведущем столбце = -8.

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1-(-8·0) =1	-8 - (-8·1) =0	-6 - (-8·½) =-2	0-(-8·0) =0	0-(-8·½) =4	0-(-8·0) =0	F	0-(-8·1024) =8192
1	0	1	4	1	0	0	x_3	2048
2	0	1	½	0	½	0	x_1	1024
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

1.7. Основы симплекс-метода

Вычисление нового базисного решения: шаг 2.

- **Вычисление элементов остальных строк**
- Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце x Новая ведущая строка)
- **Первая строка:** коэффициент в ведущем столбце = 1.

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	-2	0	4	0	F	8192
1	0-(1·0) =0	1-(1·1) =0	4-(1·½) =3½	1-(1·0) =1	0-(1· ½) = -½	0-(1·0) =0	x_3	2048-(1·1024) =1024
2	0	1	½	0	½	0	x_1	1024
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

1.7. Основы симплекс-метода

Вычисление нового базисного решения: шаг 2.

- **Вычисление элементов остальных строк**
- Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце x Новая ведущая строка)
- **Третья строка:** коэффициент в ведущем столбце = 0.

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	-2	0	4	0	F	8192
1	0	0	3½	1	-½	0	x_3	1024
2	0	1	½	0	½	0	x_1	1024
3	0-(0·0) =0	0-(0·1) =0	1-(0· ½) =1	0-(0·0) =0	0-(0· ½) =0	1-(0·0) =1	x_5	480-(0·1024) =480

1. Линейное программирование.
1.7. Основы симплекс-метода
Вычисление нового базисного решения: шаг 2.

- **Вычисление элементов остальных строк**
- Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце х Новая ведущая строка)
- **Третья строка:** коэффициент в ведущем столбце = 0.

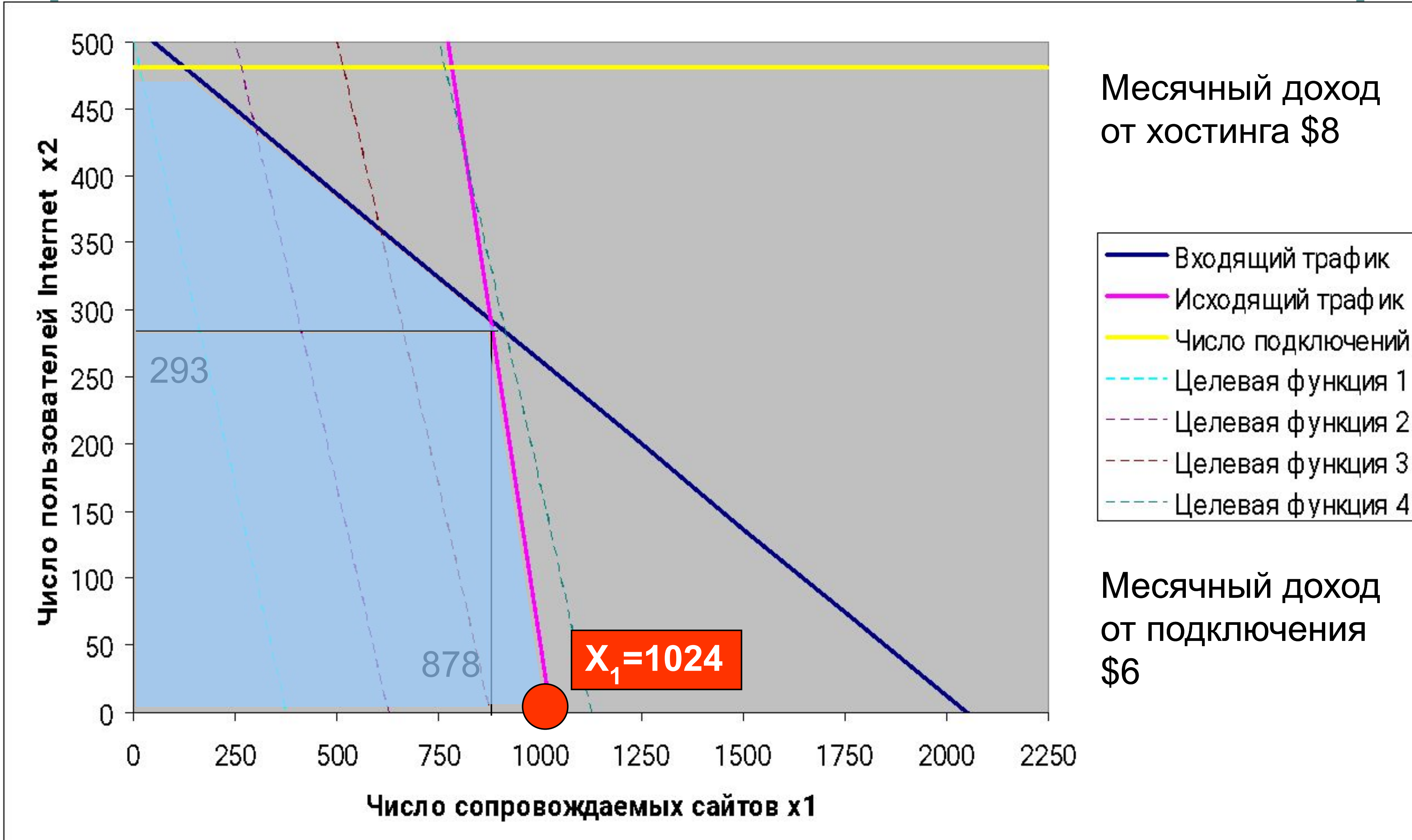
Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	-2	0	4	0	F	8192
1	0	0	3½	1	-½	0	x_3	1024
2	0	1	½	0	½	0	x_1	1024
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

- Решение: x_1=1024; x_2=0; x_3=1024; x_4=0; x_5=480.

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Новое базисное решение на графике.



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

Определение вводимой в базис переменной

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	$\boxed{-2}$	0	4	0	F	8192
1	0	0	3½	1	-½	0	x_3	1024
2	0	1	½	0	½	0	x_1	1024
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

Вводим в базис переменную, отрицательный коэффициент при которой в F-строке таблицы (положительный коэффициент в целевой функции) наибольший по абсолютной величине. Это - x_2.

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Определение исключаемой переменной

- Находим отношение правой части равенства (столбца «Решение») к коэффициенту при вводимой переменной (x_2).
- Рассматриваются только **неотрицательные** отношения.
- Чтобы точка лежала внутри ОДЗ надо из всех положительных выбрать **наименьшее** значение

x_2	Базис	Решение	Отношение (точка пересечения)
3½	x_3	1024	1024/3½ =293 (минимум)
½	x_1	1024	1024/½ = 2048
1	x_5	480	480/1=480

1. Линейное программирование.
1.7. Основы симплекс-метода
Вычисление следующего базисного решения: шаг 1.

- **Вычисление элементов новой ведущей строки**
- Новая ведущая строка = Текущая ведущая строка / ведущий элемент

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	-2	0	4	0	F	8192
1	0	0/3½ =0	3½	1/3½ =2/7	-½/3½ =-1/7	0/3½ =0	x_3	1024/3½ =293
2	0	1	½	0	½	0	x_1	1024
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

Вычисление следующего базисного решения: шаг 2.

- **Вычисление элементов остальных строк**
- Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце x Новая ведущая строка)

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	-2	0	4	0	F	8192
1	0	0	1	2/7	-1/7	0	x_2	293
2	0	1	½	0	½	0	x_1	1024
3	0	0	1	0	0	1	x_5	480

Вычисление следующего базисного решения: шаг 2.

- **Вычисление элементов остальных строк**
- Новая строка = Текущая строка – (Ее коэффициент в ведущем столбце х Новая ведущая строка)
- **Результат:**

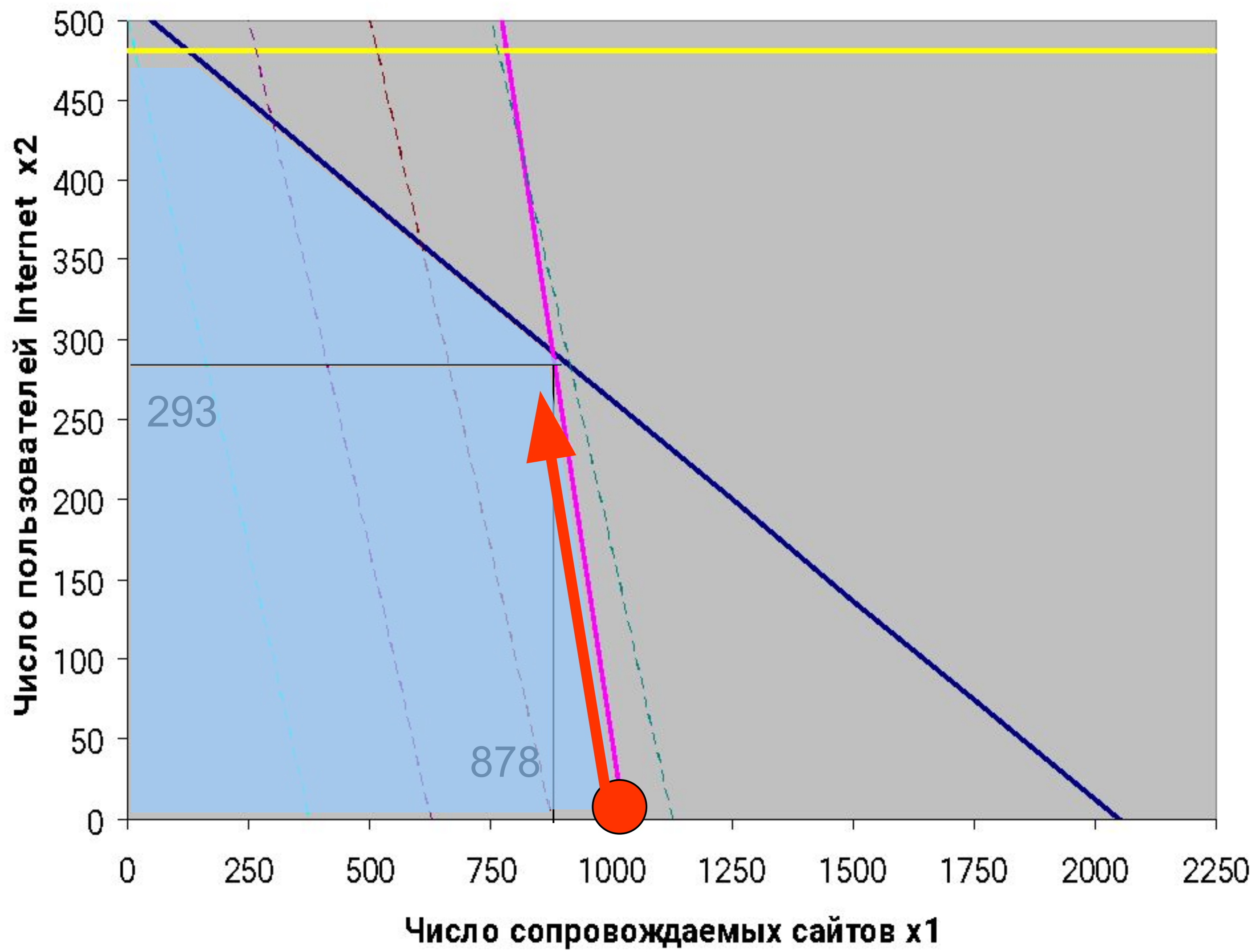
Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	0	4/7	3 5/7	0	F	8778
1	0	0	1	2/7	-1/7	0	x_2	293
2	0	1	0	-1/7	4/7	0	x_1	878
3	0	0	0	-2/7	1/7	1	x_5	187

- Решение: x_1=878; x_2=293; x_3=0; x_4=0; x_5=187.

1. Линейное программирование.

1.7. Основы симплекс-метода

Графическая иллюстрация полученного решения.



Месячный доход от хостинга $8

Месячный доход от подключения $6

1.8. Анализ решения, полученного симплекс-методом

Оптимальность решения

- **Так как отрицательных коэффициентов в F – строке больше нет, полученное решение является оптимальным**
- Оптимальное число поддерживаемых сайтов x_1=878
- Оптимальное число пользователей Internet x_2=293

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	0	4/7	35/7	0	F	8778
1	0	0	1	2/7	-1/7	0	x_2	293
2	0	1	0	-1/7	4/7	0	x_1	878
3	0	0	0	-2/7	1/7	1	x_5	187

- Решение: x_1=878; x_2=293; x_3=0; x_4=0; x_5=187.

1. Линейное программирование.

1.8. Анализ решения, полученного симплекс-методом

Дефицитные ресурсы

- Неиспользованный входящий трафик $x_3=0$
- Неиспользованный входящий трафик $x_4=0$
- Эти ресурсы являются дефицитными, и увеличение объема разрешенного входящего и исходящего трафика приведет к улучшению решения (получению дополнительного дохода)

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	0	4/7	3 5/7	0	F	8778
1	0	0	1	2/7	-1/7	0	x_2	293
2	0	1	0	-1/7	4/7	0	x_1	878
3	0	0	0	-2/7	1/7	1	x_5	187

- Решение: $x_1=878$; $x_2=293$; $x_3=0$; $x_4=0$; $x_5=187$.

1. Линейное программирование.

1.8. Анализ решения, полученного симплекс-методом

Недефицитные ресурсы

- Неиспользованная емкость портов сервера удаленного доступа (возможное число дополнительных подключений) $x_5=187$
- Этот ресурс не является дефицитными, и увеличение числа портов при данных объемах входящего и исходящего трафика не приведет к улучшению решения (получению дополнительного дохода)

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Ба-зис	Реше-ние
0	1	0	0	4/7	35/7	0	F	8778
1	0	0	1	2/7	-1/7	0	x_2	293
2	0	1	0	-1/7	4/7	0	x_1	878
3	0	0	0	-2/7	1/7	1	x_5	187

- Решение: $x_1=878$; $x_2=293$; $x_3=0$; $x_4=0$; $x_5=187$.

1. Линейное программирование.

1.9. Алгоритм симплекс-метода

Базовый алгоритм

1. Найти начальное допустимое базисное решение (полный алгоритм будет рассмотрен позднее)
   2. На основе *условия оптимальности* определить вводимую переменную
   3. Если вводимых переменных нет – закончить вычисления.
   4. На основе *условия допустимости* выбрать исключаемую переменную
   5. Методом Гаусса-Жордана вычислить новое базисное решение
6. Перейти к шагу 2
7. Вывести текущее базисное решение, являющееся оптимальным.

1.9. Алгоритм симплекс-метода

Правила выбора вводимых и исключаемых переменных

- **Условие оптимальности**. Вводимой переменной в задаче максимизации (минимизации) целевой функции является *небазисная* переменная, имеющая наибольший по модулю отрицательный (положительный) коэффициент в F-строке. Если в F-строке есть несколько таких коэффициентов, выбор вводимой переменной осуществляется произвольно. Оптимальное решение достигнуто, если в F-строке при небазисных коэффициентах все переменные являются неотрицательными (неположительными).

- **Условие допустимости**. В качестве исключаемой выбирается *базисная* переменная, для которой отношение правой части ограничения к положительному коэффициенту ведущего столбца минимально. Если базисных переменных с таким свойством несколько, то выбор исключаемой переменной осуществляется произвольно.

1.10. Искусственное начальное решение

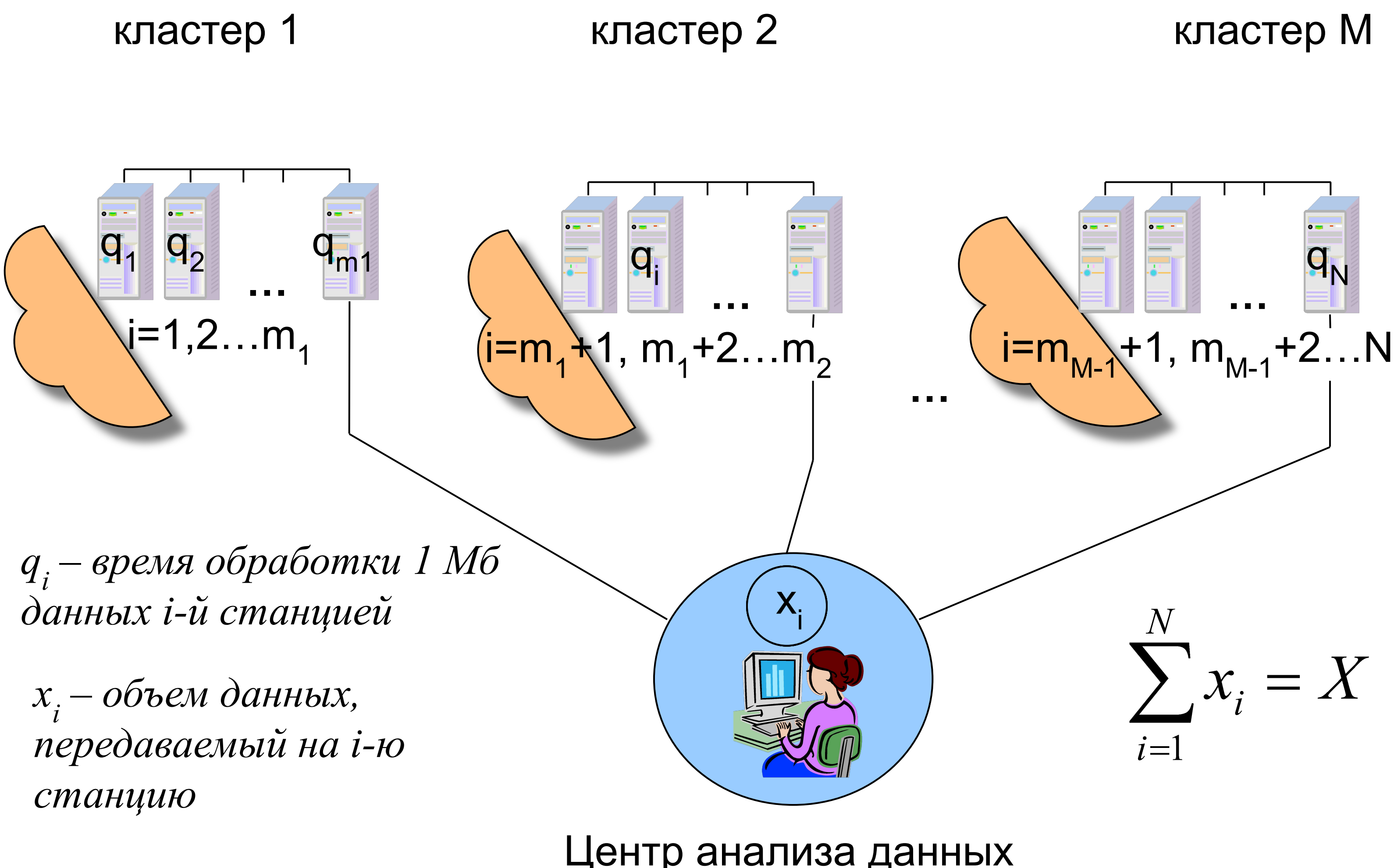
Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде

- В глобальной компьютерной сети сформирована распределенная вычислительная среда, состоящая из N высокопроизводительных рабочих станций, объединенных в M групп (кластеров).
- Данные для обработки однородны и трудоемкость расчетов зависит только от их объема. Данные независимы и их отдельные массивы могут обрабатываться совершенно независимо.
- Известно время обработки 1 Мб данных на каждой рабочей станции q_i.
- Необходимо найти оптимальное распределение заданного объема данных для обработки на станциях. Так как рабочие станции должны использоваться и для решения других – локальных – задач необходимо минимизировать общее время загрузки всех рабочих станций.
- Желательно, чтобы результаты обработки от разных кластеров поступали одновременно.
- Кроме того, владельцами кластеров могут ограничиваться как объемы информации, обрабатываемой их кластерами, так и объемы, обрабатываемые отдельными рабочими станциями.

1. Линейное программирование.

1.10. Искусственное начальное решение

Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде



q_i – время обработки 1 Мб данных i-й станцией

x_i – объем данных, передаваемый на i-ю станцию

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = X$$

1.10. Искусственное начальное решение

Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде. Формализация исходной проблемы

- **Множество возможных альтернатив** – определяется объемом данных x_i, направляемых для обработки на i-ю станцию.
- **Варьируемые параметры** – вектор значений $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$ объема данных, направляемого для обработки на каждую станцию.
- **Фиксированные независимые параметры** – времена обработки q_i 1 Мб данных i-й станцией, предельно допустимые объемы информации, которые могут быть обработаны i-й станцией P_i, $i=1,2...N$ и j-м кластером R_j, $j=1,2...M$; объем данных, подлежащий обработке X.
- **Цель –** минимизация суммарного времени загрузки всех станций

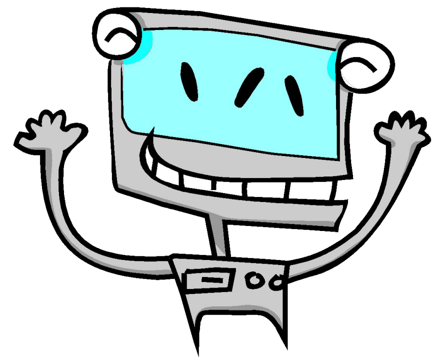
$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i x_i$$

- **Ограничения:** суммарный объем обрабатываемых данных равен X, объем данных, обрабатываемый каждой i-й станцией больше или равен 0, но меньше или равен P_i, объем данных, обрабатываемый каждым j-м кластером меньше или равен R_j; времена обработки данных кластерами равны.

1.10. Искусственное начальное решение

Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде. Математическая модель.

$$\min F(\vec{x}); \qquad F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i x_i;$$



$$\sum_{i=1}^{N} x_i = X;$$

$$x_i \geq 0; \qquad x_i \leq P_i; \qquad i = 1,2,\dots,N$$

$$\sum_{i=1}^{m_1} x_i \leq R_1; \quad \sum_{i=m_1+1}^{m_2} x_i \leq R_2; \quad \dots \quad \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} x_i \leq R_j; \quad \sum_{i=m_{M-1}+1}^{m_M} x_i \leq R_M;$$

$$\sum_{i=m_1+1}^{m_2} q_i x_i = \sum_{i=1}^{m_1} q_i x_i; \qquad \sum_{i=m_2+1}^{m_3} q_i x_i = \sum_{i=1}^{m_1} q_i x_i; \quad \dots \quad \sum_{i=m_{M-1}+1}^{m_M} q_i x_i = \sum_{i=1}^{m_1} q_i x_i$$

1.10. Искусственное начальное решение

Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде. Конкретная задача.

- Количество вычислительных кластеров M=3
- Количество рабочих станций N=10
- В первом кластере имеется 4 станции, во втором – 2, в третьем – 4.
- Времена обработки 1Мб данных станциями:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_i,сек.	10	4	8	6	2	3	8	2	6	6

- Объем данных для обработки каждой станцией ограничен:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_i, Мб	700	700	700	700	700	700	700	700	700	700

- Объем данных для обработки каждым кластером ограничен :

j	1	2	3
P_i, Мб	400	800	600

- Общий объем данных для обработки X=1000 Мб.
- Времена обработки данных кластерами должны совпадать

1.10. Искусственное начальное решение

Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде. Математическая модель конкретной задачи.

$$F(\vec{x}) = 10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8x_7 + 2x_8 + 6x_9 + 6x_{10}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 400$$
$$x_5 + x_6 \le 800$$
$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \le 600$$

$$x_1 \le 700 \quad x_2 \le 700 \quad x_3 \le 700$$
$$x_4 \le 700 \quad x_5 \le 700 \quad x_6 \le 700$$
$$x_7 \le 700 \quad x_8 \le 700 \quad x_9 \le 700$$
$$x_{10} \le 700$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 1000$$

$$10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 2x_5 - 3x_6 = 0$$
$$10x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 - 8x_7 - 2x_8 - 6x_9 - 6x_{10} = 0$$

1.10. Искусственное начальное решение

Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде. Приведение модели к стандартной форме.

- Для приведения этой задачи к стандартной форме необходимо в ограничения вида ≤ с неотрицательной правой частью ввести дополнительные (остаточные) переменные:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_{11} = 400$$
$$x_5 + x_6 + x_{12} = 800$$
$$x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{13} = 600$$

$$x_1 + x_{14} = 700 \qquad x_2 + x_{15} = 700 \qquad x_3 + x_{16} = 700$$
$$x_4 + x_{17} = 700 \qquad x_5 + x_{18} = 700 \qquad x_6 + x_{19} = 700$$
$$x_7 + x_{20} = 700 \qquad x_8 + x_{21} = 700 \qquad x_9 + x_{22} = 700$$
$$x_{10} + x_{23} = 700$$

1.10. Искусственное начальное решение

Размещение данных для обработки в распределенной вычислительной среде. Искусственное начальное базисное решение

- Переменных теперь 23, остаточных переменных – 13. Однако, на эти 13 остаточных переменных приходятся 16 уравнений, задающих ограничения.
- Действительно, если в формулировке задачи присутствуют ограничения вида равенств или неравенства вида ≤, число уравнений оказывается больше остаточных переменных.
- В этом случае невозможно сформировать начальное допустимое базисное решение из остаточных переменных.
- **В этом случае обычно применяют один из методов, основанных на использовании искусственных переменных**
- Разработано два метода нахождения начального решения, которые используют искусственные переменные:
  - М-метод (метод больших штрафов)
  - двухэтапный метод

1.11. М-метод нахождения искусственного начального решения.

- Запишем задачу ЛП в стандартной форме.
- Для любого равенства i, в котором не содержится дополнительная остаточная переменная, введем искусственную переменную r_i, которая далее войдет в начальное базисное решение.
- Так как эта переменная искусственная, необходимо, чтобы она обратилась в ноль на следующих итерациях.
- Для этого в выражение целевой функции вводят штраф: к ней добавляют выражение $+Mr_i$ в случе минимизации целевой функции или $-Mr_i$ в случае максимизации.

1.11. М-метод нахождения искусственного начального решения.

Пример использования М-метода: исходная задача и стандартная форма (из кн. Х.Таха)

$$\min F(x_1, x_2);$$
$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2;$$
$$3x_1 + x_2 = 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6;$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4;$$
$$x_1 \geq 0;$$
$$x_2 \geq 0.$$

$\Rightarrow$

$$\min F(x_1, x_2);$$
$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2;$$
$$3x_1 + x_2 = 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4;$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0;$$
$$x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0;$$

1.11. М-метод нахождения искусственного начального решения.

Пример использования М-метода: введение искусственных переменных

$$\min F(x_1, x_2);$$
$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2;$$
$$3x_1 + x_2 = 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4;$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0;$$
$$x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0;$$

$\Rightarrow$

$$\min F(x_1, x_2, r_1, r_2);$$
$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 + Mr_1 + Mr_2;$$
$$3x_1 + x_2 + r_1 = 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + r_2 = 6;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4;$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad r_1 \geq 0;$$
$$x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0; \quad r_2 \geq 0;$$

1. Линейное программирование.

1.11. М-метод нахождения искусственного начального решения.

Пример использования М-метода: симплекс-таблица

- В модифицированной задаче переменные x_4, r_1 и r_2 можно использовать в качестве начального допустимого базисного решения

Номер уравнения	F	x_1	x_2	x_3	r_1	r_2	x_4	Базис	Решение
0	1	-4	-1	0	-M	-M	0	F	0
1	0	3	1	0	1	0	0	r_1	3
2	0	4	3	-1	0	1	0	r_2	6
3	0	1	2	0	0	0	1	x_4	4

- Решение: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $r_1=3$; $r_2=6$; $x_4=4$.
- Однако, F-строка нуждается в согласовании: при полученных значениях переменных F=3M+6M=9M, а не 0. Это получилось потому, в этой с троке коэффициенты при r_1 и r_2 не равны 0.

1. Линейное программирование.

1.11. М-метод нахождения искусственного начального решения.

Пример использования М-метода: измененная симплекс-таблица

- Умножим элементы строк r_1 и r_2 на М и сложим эти строки с нулевой F – строкой.

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	r_1	r_2	x_4	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	-4+7M	-1+4M	-M	0	0	0	F	9M
1	0	3	1	0	1	0	0	r_1	3
2	0	4	3	-1	0	1	0	r_2	6
3	0	1	2	0	0	0	1	x_4	4

- Теперь значение F при значениях $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $r_1=3$; $r_2=6$; $x_4=4$ равно, как и следует 9М.
- Эта таблица готова к применению симплекс-метода с использованием условий оптимальности и допустимости.

1. Линейное программирование.

1.11. М-метод нахождения искусственного начального решения.

Пример использования М-метода: решение

- Самостоятельно проделайте процедуру решения представленной задачи с использованием симплекс-таблицы.
- Убедитесь, что на первом шаге:
  - в базис вводится переменная x_1 (из условия оптимальности: функция минимизируется и вводится переменная с наибольшим положительным коэффициентом в F-строке);
  - из базиса исключается переменная r_1 (условие допустимости: отношение значения правой части ограничения к положительному коэффициенту ведущего столбца минимально).
- На втором шаге вводимая и исключаемая переменные x_2 и r_2 соответственно.
- Окончательно получим оптимальное решение $x_1=2/5$; $x_2=9/5$; $x_3=1$; $F=17/5$.

1. Линейное программирование.

1.11. М-метод нахождения искусственного начального решения.

Некоторые замечания

- Использование штрафа М может не привести к исключению искусственных переменных после выполнения последней симплекс-итерации.
- Если исходная задача ЛП не имеет допустимого решения (например, система ограничений несовместна), то в конечной итерации хотя бы одна искусственная переменная будет иметь положительное значение.
- Величина М при реализации алгоритма на ЭВМ должна быть конечной и в то же время достаточно большой. Она должна быть настолько большой, чтобы успешно выполнять роль штрафа, но не слишком большой, чтобы не уменьшить точность вычислений, в которых участвуют как большие, так и малые числа.
- Правильный выбор значения М зависит от условия задачи. Опасность значительных ошибое округления при неправильном выборе М не позволяет применять М-метод в коммерческих программах, реализующих симплекс-метод.
- Вместо него на практике используется **двухэтапный метод**.

1. Линейное программирование.

1.12. Двухэтапный метод.

Базовый алгоритм

- Найти допустимое базисное решение
  - Записать задачу ЛП в стандартной форме.
  - Добавить в ограничения необходимые искусственные переменные (как в М-методе).
  - Решить задачу ЛП минимизации суммы искусственных переменных при имеющихся ограничениях.
  - Если
    - минимальное значение новой целевой функции больше 0, то завершить вычисления, так как исходная задача не имеет допустимого решения,
  - Иначе
    - использовать оптимальное решение, полученное на первом этапе, как начальное допустимое базисное решение исходной задачи.
- Решить модифицированную с учетом полученного базисного решения исходную задачу ЛП

1. Линейное программирование.

1.12. Двухэтапный метод.

Пример использования двухэтапного метода.

$$\min F(x_1, x_2);$$
$$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2;$$
$$3x_1 + x_2 = 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4;$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0;$$
$$x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0;$$

$$\min U(r_1, r_2);$$
$$U(r_1, r_2) = r_1 + r_2;$$
$$3x_1 + x_2 + r_1 = 3;$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + r_2 = 6;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4;$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad r_1 \geq 0;$$
$$x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0; \quad r_2 \geq 0;$$

1.12. Двухэтапный метод.

Пример использования двухэтапного метода: симплекс-таблица

- В модифицированной задаче переменные x_4, r_1 и r_2 можно использовать в качестве начального допустимого базисного решения

Номер уравнения	U	x_1	x_2	x_3	r_1	r_2	x_4	Базис	Решение
0	1	0	0	0	-1	-1	0	U	0
1	0	3	1	0	1	0	0	r_1	3
2	0	4	3	-1	0	1	0	r_2	6
3	0	1	2	0	0	0	1	x_4	4

- Решение: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$; $r_1=3$; $r_2=6$; $x_4=4$.
- Однако, U-строка нуждается в согласовании: при полученных значениях переменных U=3+6=9, а не 0. Это получилось потому, в этой строке коэффициенты при r_1 и r_2 не равны 0.

1.12. Двухэтапный метод.

Пример использования двухэтапного метода: измененная симплекс-таблица

- Умножим элементы строк r_1 и r_2 на М и сложим эти строки с нулевой U – строкой.

Номер урав-нения	U	x_1	x_2	x_3	r_1	r_2	x_4	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	7	4	-1	0	0	0	U	9
1	0	3	1	0	1	0	0	r_1	3
2	0	4	3	-1	0	1	0	r_2	6
3	0	1	2	0	0	0	1	x_4	4

- Теперь значение F при значениях x_1=0; x_2=0; x_3=0; r_1=3; r_2=6; x_4=4 равно, как и следует 9M.
- Эта таблица готова к применению симплекс-метода с использованием условий оптимальности и допустимости.

1.12. Двухэтапный метод.

Пример использования двухэтапного метода: оптимальное решение 1-го этапа

- Оптимальное решение выглядит следующим образом (проверьте):

Номер урав-нения	U	x_1	x_2	x_3	r_1	r_2	x_4	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	0	0	0	-1	-1	0	U	0
1	0	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	x_1	3/5
2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	x_2	6/5
3	0	0	0	1	1	-1	1	x_4	1

- Искусственные переменные исключены из базиса и их столбцы можно удалить из симплекс-таблицы.

1.12. Двухэтапный метод.

Пример использования двухэтапного метода: измененная исходная задача

Номер урав-нения	U	x_1	x_2	x_3	r_1	r_2	x_4	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	0	0	0	-1	-1	0	U	0
1	0	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	x_1	3/5
2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	x_2	6/5
3	0	0	0	1	1	-1	1	x_4	1

$min\ F(x_1, x_2);$

$F(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2;$

$x_1 + 1/5\, x_3 = 3/5;$

$x_2 - 3/5 x_3 = 6/5;$

$x_3 + x_4 = 1;$

$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0;$

$x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0;$

1.12. Двухэтапный метод.

Пример использования двухэтапного метода: симплекс-таблица измененной задачи

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	-4	-1	0	0	F	0
1	0	1	0	1/5	0	x_1	3/5
2	0	0	1	-3/5	0	x_2	6/5
3	0	0	0	1	1	x_4	1

- Поскольку базисные переменные имеют ненулевые коэффициенты в F-строке, эту строку следует преобразовать
- Для этого вторую строку умножим на 4 и сложим с нулевой, а вторую – на 1 и также сложим с нулевой

1.12. Двухэтапный метод.

Пример использования двухэтапного метода: начальная таблица второго этапа

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	0	0	1/5	0	F	18/5
1	0	1	0	1/5	0	x_1	3/5
2	0	0	1	-3/5	0	x_2	6/5
3	0	0	0	1	1	x_4	1

- Так как решается задача минимизации, из условия оптимальности в базис вводим переменную x_3. Коэффициент при этой переменной в строке положительный и наибольший, следовательно – в целевой функции отрицателен.
- Из условия допустимости исключаем базисную переменную, для которой отношение правой части к положительному коэффициенту ведущего столбца минимально. Это – x_4.

1.12. Двухэтапный метод.

Пример использования двухэтапного метода: расчет нового базисного решения

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	0	0	1/5	0	F	18/5
1	0	1	0	1/5	0	x_1	3/5
2	0	0	1	-3/5	0	x_2	6/5
3	0	0	0	1	1	x_4	1

- Новая ведущая строка = текущая строка / ведущий элемент.
- Для остальных строк: новая строка = текущая строка – ее коэффициент в ведущем столбце x новая ведущая строка

1. Линейное программирование.

1.12. Двухэтапный метод.

Пример использования двухэтапного метода: оптимальное решение

Номер урав-нения	F	x_1	x_2	x_3	x_4	Ба-зис	Ре-ше-ние
0	1	0	0	0	-1/5	F	17/5
1	0	1	0	0	-1/5	x_1	2/5
2	0	0	1	0	3/5	x_2	9/5
3	0	0	0	1	1	x_3	1

- Данное решение является оптимальным, так как в нулевой строке нет переменной с положительным коэффициентом.

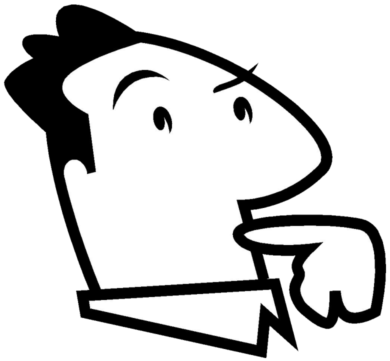
1. Линейное программирование.
1.12. Двухэтапный метод.
Замечания по применению

- Удаление искусственных переменных в конце первого этапа имеет смысл только, если они являются небазисными.
- Возможна ситуация, когда в конце первого этапа они имеют нулевые значения, но остаются в базисе.
- В этом случае необходимо так изменить вычисления на втором этапе, чтобы эти искусственные переменные ни в одной итерации симплекс-метода не приняли положительные значения.

1. Линейное программирование.

1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

- Вырожденность
- Альтернативные оптимальные решения
- Неограниченные решения
- Отсутствие допустимых решений



1. Линейное программирование.

1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Вырожденность

- В ходе выполнения симплекс-метода проверка условия допустимости может привести к неоднозначному выбору исключаемой переменной
- В этом случае на следующей итерации одна или более базисных переменных примут нулевое значение и решение будет **вырожденным**
- Вырожденность означает, что в исходной задаче присутствует по крайней мере одно избыточное ограничение
- Пример:

$$max\ F(x_1,x_2)=3x_1+9x_2;$$

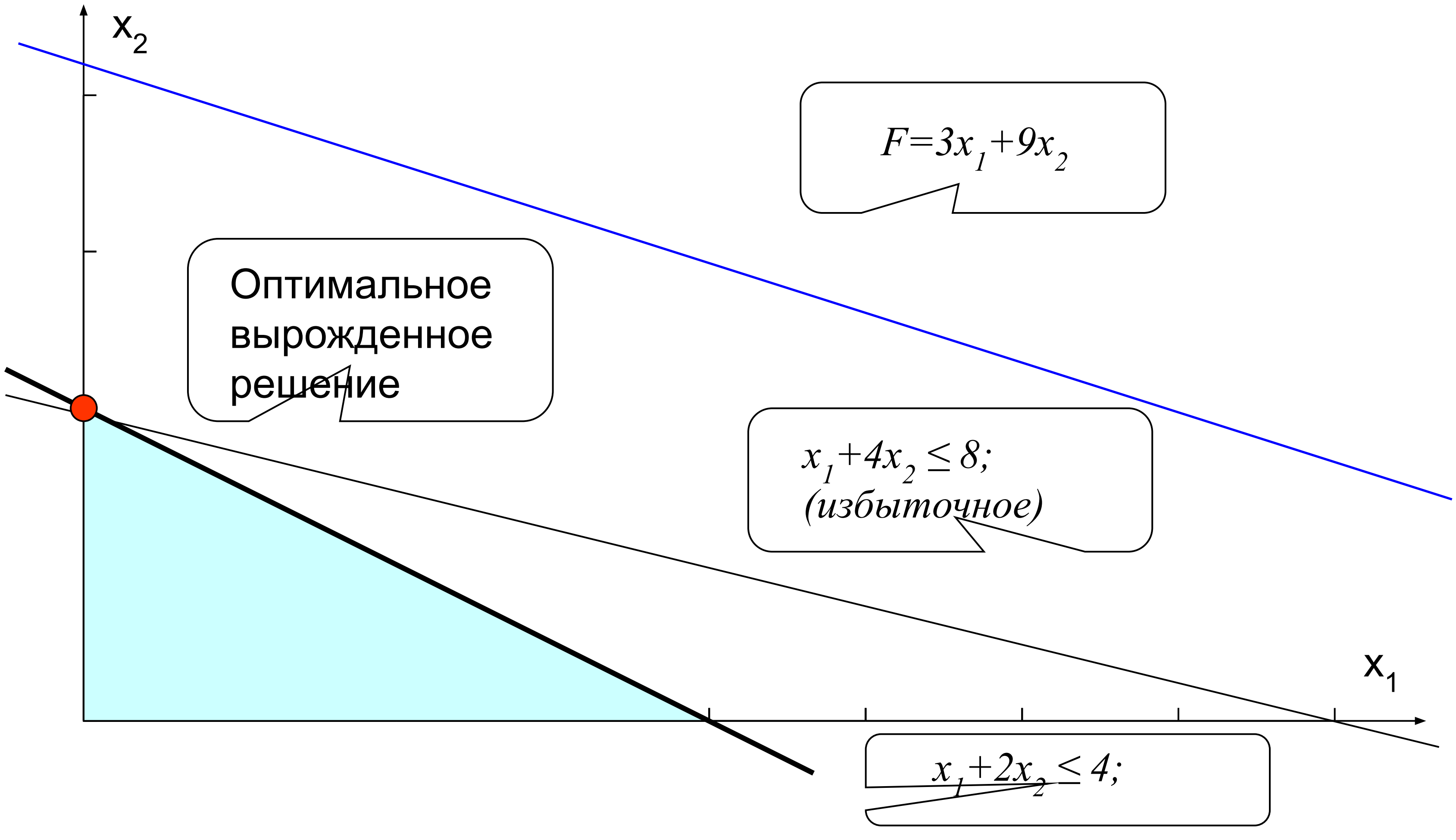
$$x_1+4x_2 \le 8;$$
$$x_1+2x_2 \le 4$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

1. Линейное программирование.

1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Вырожденность



1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Вырожденность

- Возможные последствия вырожденности:
  - Зацикливание симплекс-метода (некоторая последовательность будет повторяться, не изменяя значения целевой функции и не приводя к завершению вычислительного процесса)
  - В двух последовательных итерациях состав базисных и небазисных переменных может быть различен, но значения всех переменных и целевой функции не меняются. Тем не менее, останавливать вычисления нельзя (решение может быть временно вырожденным).

1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Альтернативные оптимальные решения

- Альтернативные оптимальные решения возникают, когда целевая функция принимает одно и то же оптимальное значение на некотором множестве точек границы области допустимых значений.
- Это бывает, когда прямая (в общем случае – гиперплоскость), представляющая целевую функцию параллельна прямой (гиперплоскости), соответствующей связывающему неравенству.
- Связывающее неравенство в точке оптимума выполняется как точное равенство.
- Симплекс-метод может найти угловые точки, затем можно найти остальные.
- Пример:

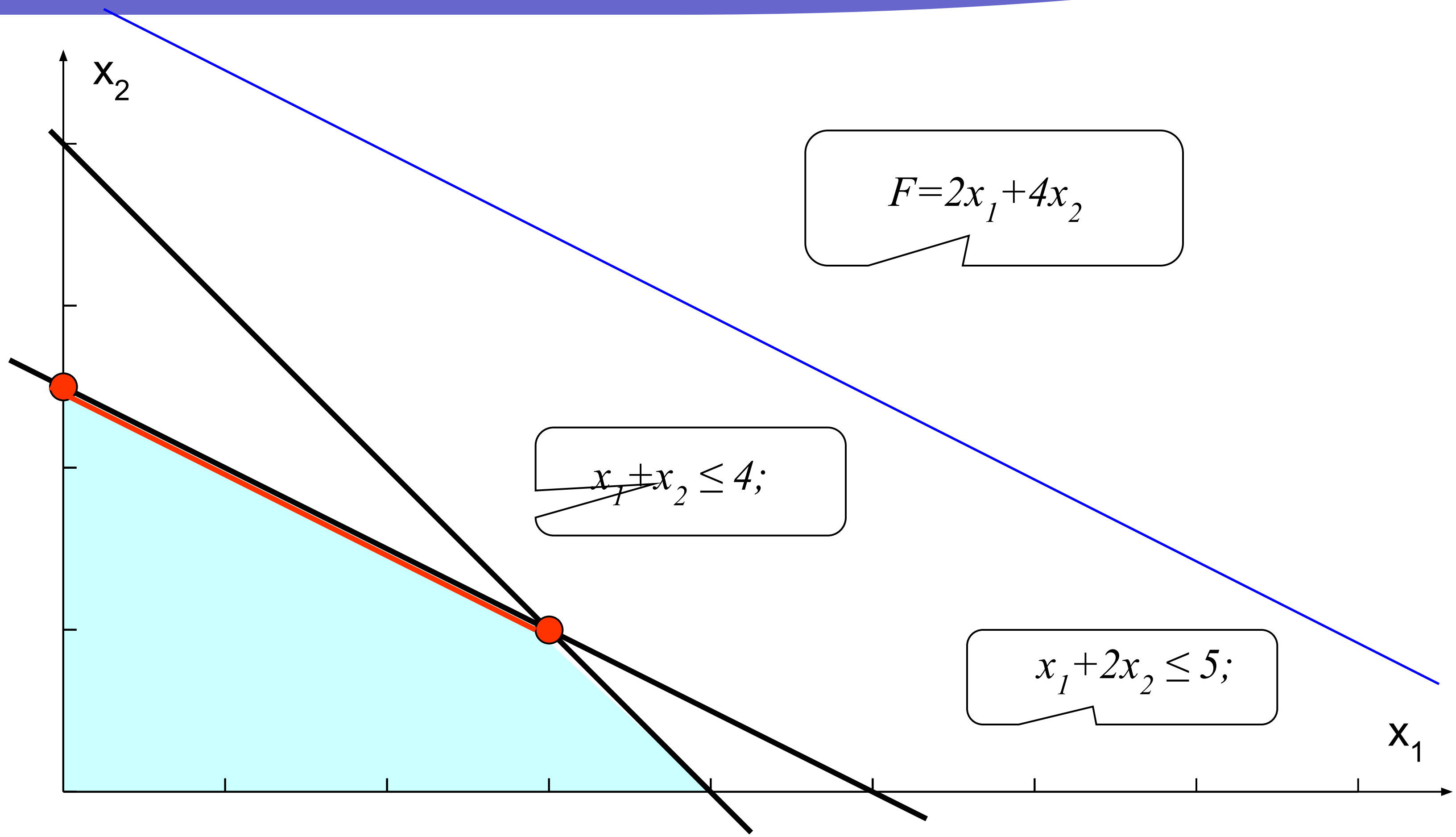
$$max\ F(x_1,x_2)=2x_1+4x_2;$$

$$x_1+2x_2 \le 5;$$
$$x_1+x_2 \le 4$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

1. Линейное программирование.

1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Альтернативные оптимальные решения



1. Линейное программирование.

1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Неограниченные решения

- Если в процессе поиска решения значения переменных могут неограниченно возрастать без нарушения ограничений, то пространство допустимых решений не ограничено по крайней мере по одному направлению.
- В результате этого целевая функция может неограниченно возрастать (убывать в задачах минимизации).
- Неограниченность решения означает, что модель задачи разработана некорректно. Пример:

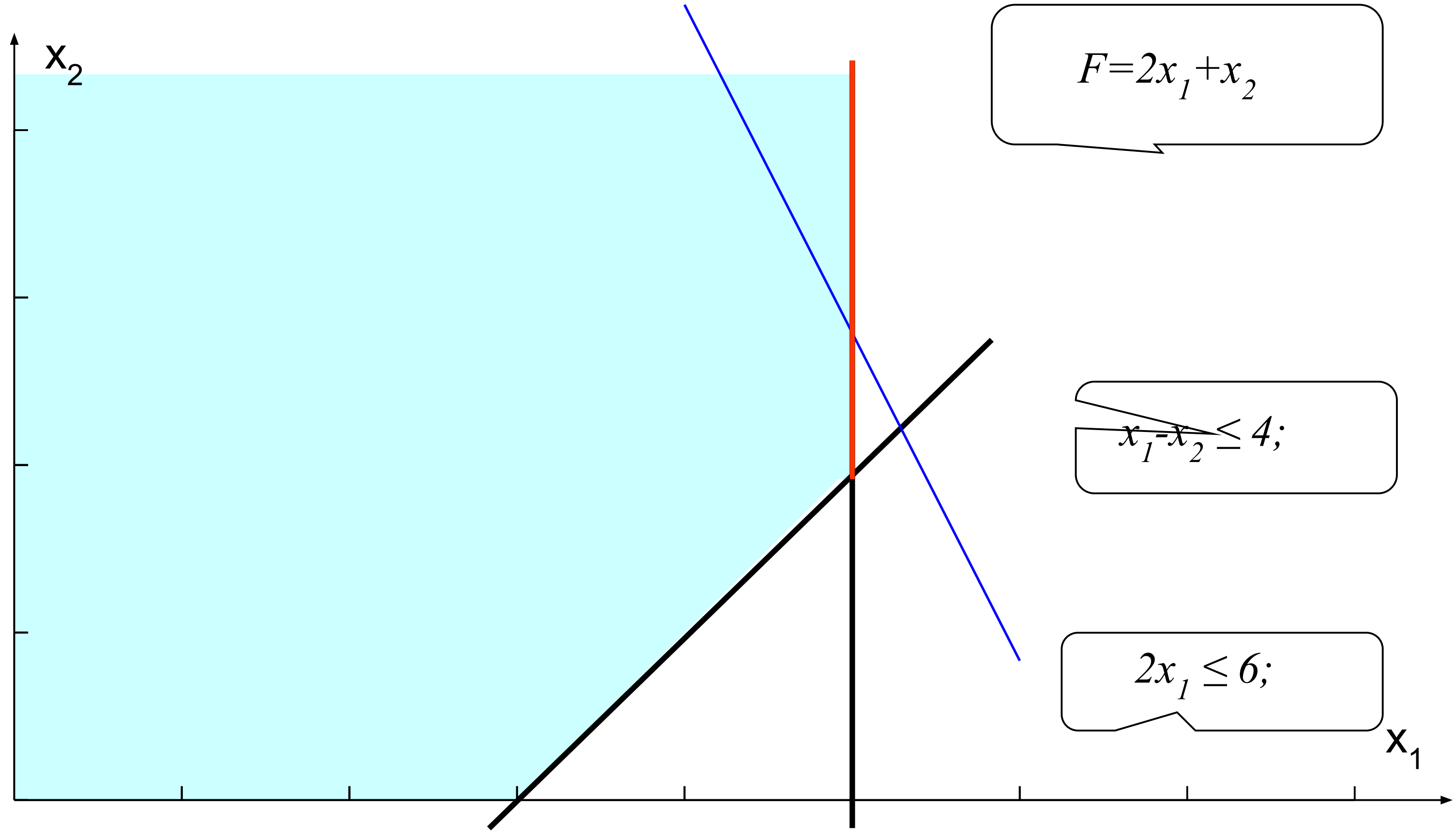
$$max\ F(x_1,x_2)=2x_1+x_2;$$

$$x_1 - x_2 \le 4;$$
$$2x_1 \le 6$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

1. Линейное программирование.

1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Неограниченные решения



1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Неограниченные решения

- Правило выявления неограниченности решения:
  - Если на какой-либо симплекс-итерации коэффициенты в ограничениях для какой-нибудь небазисной переменной будут неположительными, значит **пространство решений** не ограничено в направлении возрастания этой переменной.
  - Если, кроме того, коэффициент этой переменной в F-строке отрицателен (задача максимизации) или положителен (в задаче минимизации), **целевая функция** не ограничена.

1. Линейное программирование.

1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Отсутствие допустимых решений

- Если ограничения задачи ЛП несовместны, то задача не имеет допустимых решений.
- Если все ограничения имеют вид неравенств типа ≤ с неотрицательными правыми частями, то дополнительные переменные всегда могут составить допустимое решение.
- Для других типов ограничений используются искусственные переменные и если пространство допустимых решений является пустым, то в решении будет присутствовать хотя бы одна положительная искусственная перемменная.
- Отсутствие допустимых решений свидетельствует о некорректной формулировке задачи.
- Пример:

$$\max F(x_1,x_2)=3x_1+2x_2;$$

$$2x_1 + x_2 \le 2;$$

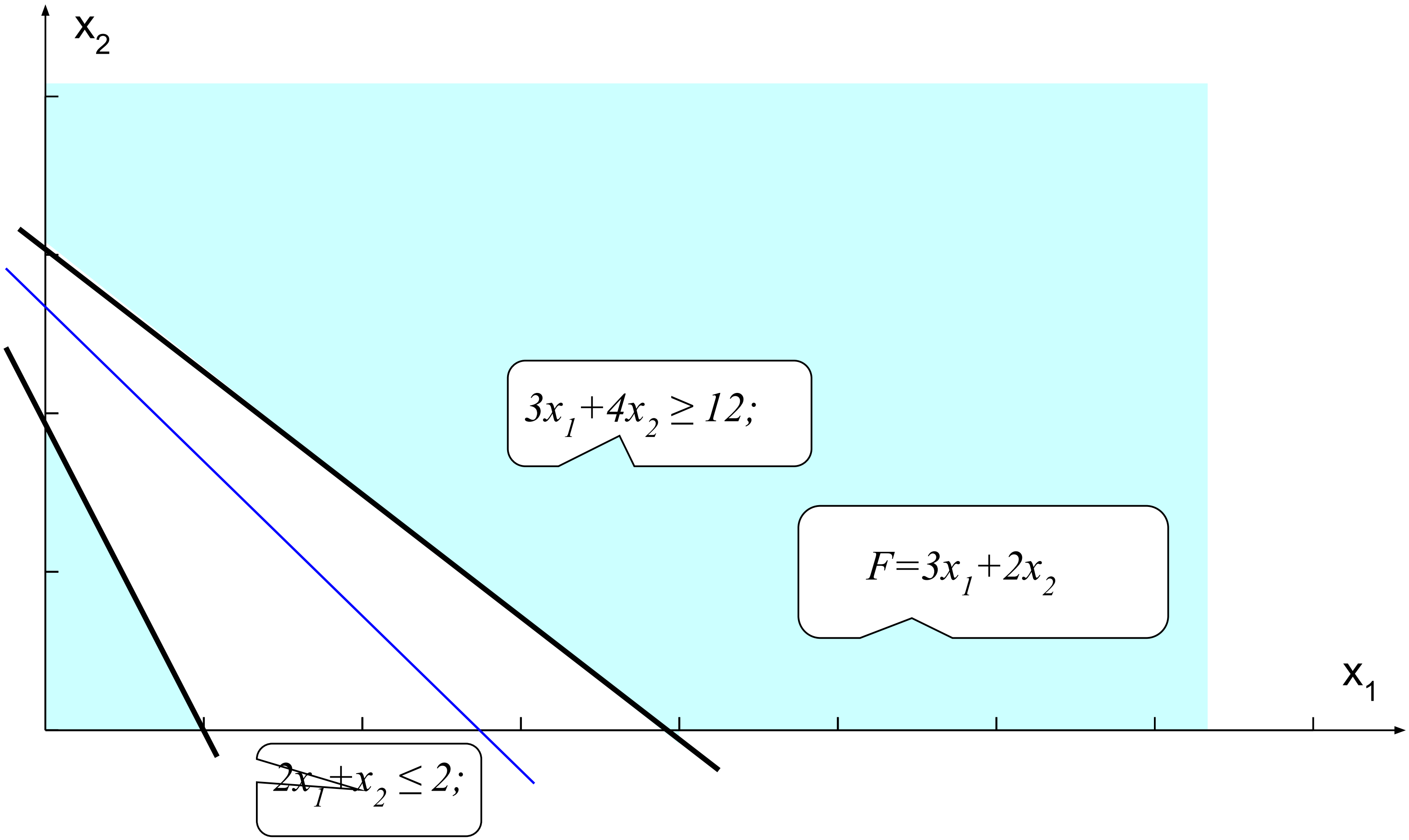
$$3x_1 + 4x_2 \ge 12;$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

1. Линейное программирование.

1.13. Особые случаи применения симплекс-метода

Отсутствие допустимых решений



1.14. Матричное представление стандартной задачи ЛП

- В матричной форме стандартную задачу ЛП можно представить следующим образом:

  $max\ F$=**Cx** или $min\ F$=**Cx**

  при ограничениях вида

  (**A**,**I**)**x**=**b**, **x**≥0, где:

  I – единичная матрица размера $m\ x\ m$, **x**=$(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, **C**=$(c_1,c_2,\ldots c_n)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{1,n-m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,n-m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

1. Линейное программирование.

1.14. Матричное представление стандартной задачи ЛП

пример

$$\begin{cases} \max F = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 + 2x_2 = 7, \\ 5x_1 - x_2 \le 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max F = (2,3,0,-M,-M,0)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \text{при ограничениях} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Эта задача имеет n=6 переменных и m=3 ограничений

x_3 и x_6 – дополнительные, x_4 и x_5 – искусственные переменные

1. Линейное программирование.

1.14. Матричное представление стандартной задачи ЛП

Базисные решения

- Для системы из m уравнений $(\mathbf{A},\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{b}$ с n неизвестными (m<n) обозначим $\mathbf{x}_B$ вектор из m элементов, являющихся подмножеством n элементов вектора **x**.
- Определим матрицу **B** размером m x m, состоящую из столбцов матрицы (**A,I**), соответствующих элементам вектора $\mathbf{x}_B$.
- Если присвоить оставшимся элементам вектора **x** нулевые значения, то система $(\mathbf{A},\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{b}$ будет сведена к системе $\mathbf{B}\mathbf{x}_B=\mathbf{b}$
- Если столбцы матрицы **B** формируют в m-мерном векторном пространстве базис (т.е. det(**B**)≠0, эти вектор-столбцы линейно независимы и матрица **B** невырожденная), то мы имеем единственное решение этой системы: $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
- В этом случае $\mathbf{x}_B$ является **базисным решением** системы $(\mathbf{A},\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{b}$
- Если выполняется неравенство $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$, то $\mathbf{x}_B$ будет допустимым базисным решением.

1. Линейное программирование.

1.15. Матричное представление симплекс-таблиц

- Мы утверждаем, что конечное оптимальное решение задачи ЛП достигается в крайних точках пространства решений. Все крайние точки можно определить алгебраически как базисные решения системы линейных уравнений $(\mathbf{A},\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$.
- Алгоритм симплекс-метода предполагает последовательный переход от одной крайней точки к другой (от одного допустимого базисного решения к другому), когда значение целевой функции не ухудшается, и так до тех пор, пока не будет достигнуто оптимальное решение (во всех соседних крайних точках значение целевой функции будет хуже, чем в достигнутой).
- Для представления симплекс-таблицы в матричной форме в стандартной задаче ЛП:
  $max\ F=\mathbf{Cx}$ при ограничениях $(\mathbf{A},\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$,
  - разобьем вектор $\mathbf{x}$ на два вектора $\mathbf{x}_{I}$ и $\mathbf{x}_{II}$,таких, что вектор $\mathbf{x}_{II}$ соответствует начальному базису $\mathbf{B}$, то есть является начальным допустимым базисным решением;
  - вектор C также разделим на два вектора CI и CII в соответствии с векторами $\mathbf{x}_{I}$ и $\mathbf{x}_{II}$.

1.15. Матричное представление симплекс-таблиц

- Тогда стандартную задачу ЛП можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_I & -\mathbf{C}_{II} \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

- Для любой симплексной итерации будем обозначать через $\mathbf{x}_B$ текущий базисный вектор переменных, а через $\mathbf{C}_B$ – вектор коэффициентов целевой функции, соответствующий этому базису.
- Так как все небазисные переменные равны 0, стандартная задача ЛП сводится к задаче с целевой функцией $F=\mathbf{C}_B\mathbf{x}_B$ и ограничениями $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$.
- Текущее решение удовлетворяет уравнению:

$$\begin{pmatrix} F \\ \mathbf{x}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_B \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

1. Линейное программирование.

1.15. Матричное представление симплекс-таблиц

- Преобразованную симплекс-таблицу получаем, домножив обе части на $\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{B}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_I & -\mathbf{C}_{II} \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_{II} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_I & -\mathbf{C}_{II} \\ 0 & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ \mathbf{x}_I \\ \mathbf{x}_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Номер уравнения	F	X_I	X_{II}	Базис	Решение
0	1	$\mathbf{C_B B^{-1} A - C_I}$	$\mathbf{C_B B^{-1} - C_{II}}$	F	$\mathbf{C_B B^{-1} b}$
1…m	0	$\mathbf{B^{-1} A}$	$\mathbf{B^{-1}}$	$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{B^{-1} b}$

1. Линейное программирование.

1.15. Матричное представление симплекс-таблиц

- Представленная симплекс-таблица является основой всех вычислительных алгоритмов линейного программирования.
- В симплекс-методе решение переходит от одного базиса **B** к следующему $\mathbf{B}_{\text{след}}$ путем замены в **B** базисного вектора (исключаемого) на небазисный (вводимый).
- **Условие оптимальности**. Вводимой переменной в задаче максимизации (минимизации) целевой функции является *небазисная* переменная, имеющая наибольший по модулю отрицательный (положительный) коэффициент в F-строке. Этот коэффициент равен $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$, где $\mathbf{P}_j$ – j-й столбец матрицы (**A**,**I**), c_j – j-й элемент вектора **C**.
- **Условие допустимости**. В качестве исключаемой выбирается *базисная* переменная, для которой отношение правой части ограничения к положительному коэффициенту ведущего k-го столбца минимально (здесь x_k-вводимая в базис переменная, $\mathbf{P}_k$-вводимый вектор, определяемые из условия оптимальности):

$$x_k = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P_k})_i} \,\middle|\, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P_k})_i > 0 \right\}$$

1.16. Модифицированный симплекс-метод

- В модифицированном симплекс-методе вместо процедуры преобразования строк с помощью метода Гаусса-Жордана используется обратная матрица $\mathbf{B}^{-1}$.
- В симплекс-методе последовательные базисы **B** и $\mathbf{B}_{след}$ различаются только одним вектор-столбцом, что позволяет использовать мультипликативное представление обратной матрицы:

$$\mathbf{B}_{\text{след}}^{-1} = \mathbf{E}\mathbf{B}^{-1}$$

Матрицу **E** можно определить как m-мерную единичную матрицу, у которой r-й столбец заменен следующим столбцом:

$$\frac{1}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P_j})}\begin{pmatrix} -(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_1 \\ -(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_2 \\ \ldots \\ 1 \text{ (r-й элемент)} \\ \ldots \\ -(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_m \end{pmatrix}$$

Здесь $\mathbf{P}_j$ и $\mathbf{P}_r$ – вводимый в базис и исключаемый столбец соответственно.

Доказательство можно найти в книге Х.А.Таха

1. Линейное программирование.

1.16. Модифицированный симплекс-метод

- Рассмотрим пример решения задачи ЛП (Х.А.Таха): максимизировать $F=x_1+4x_2+7x_3+5x_4$

  при ограничениях: $2x_1+x_2+2x_3+4x_4=10,$

  $$3x_1-x_2-2x_3+6x_4=5$$
  $$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

- Пусть **B**=(**P**$_1$,**P**$_2$) является допустимым базисом.
- Покажем, что решение B не является оптимальным.
- Найдем вводимый в базис и исключаемый из него векторы и **B**$_{след}$

- **B**=(**P**$_1$,**P**$_2$), то есть **x**$_B$=$(x_1,x_2)^T$ и **C**$_B$=(1,4)

$$\mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_B}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix};\quad F=\mathbf{C_B}\mathbf{x_B}=1\cdot 3+4\cdot 4=19$$

1.16. Модифицированный симплекс-метод

- Вычислим коэффициенты при небазисных переменных x_3 и x_4 в F-строке:

$$\mathbf{C_B B}^{-1}(\mathbf{P_3},\mathbf{P}_4)-(c_3,c_4)=(1,4)\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & 6\end{pmatrix}-(7,5)=(1,-3)$$

- Так как целевая функция максимизируется, наличие отрицательного коэффициента при 4-й переменной говорит о том, что решение неоптимально. **Значение целевой функции можно улучшить, если ввести в базис переменную x_4.**

1.16. Модифицированный симплекс-метод

- Найдем исключаемую переменную. Для нахождения выражения

$$x_k = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P_k})_i} \middle| (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P_k})_i > 0 \right\}$$

вычисляем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P_4} = \mathbf{B}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

вектор $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_4$ имеет один строго положительный элемент = 2, исключается переменная x_1 и значение вводимой переменной будет равно:

$$x_4 = \min_{i=1,2}\left\{\frac{3}{2}, -\right\} = \frac{3}{2}$$

1. Линейное программирование.

1.16. Модифицированный симплекс-метод

- Итак, в базисе **B** вектор **P**$_1$ будет заменен на **P**$_2$, что приводит к новому базису

$$\mathbf{B}_{след} = (\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

- Новое значение целевой функции F = старое значение (19) – коэффициент при вводимой переменной x_4 в F-строке (-3) x значение вводимой переменной (3/2) = 23,5

-

2.Сетевые модели