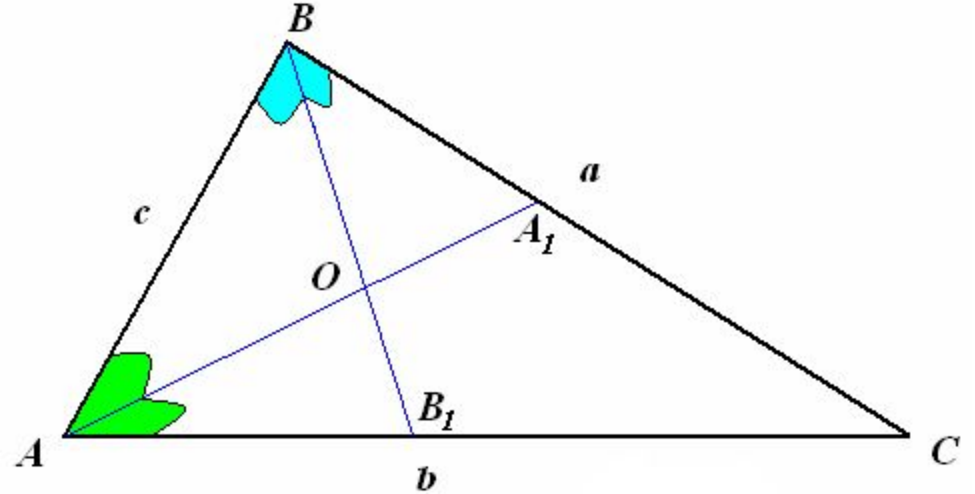
Биссектриса угла треугольника

1. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке

   (ицентр)



2. Биссектриса угла делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам

$$\frac{BC}{CK}=\frac{BA}{AK}$$

3. Если O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\frac{AO}{OA_1}=\frac{b+c}{a}$, $\frac{BO}{OB_1}=\frac{a+c}{b}$

где AA_1, BB_1 – биссектрисы

4. Расстояние от вершины до точки пересечения биссектрис треугольника (ицентра, центра вписанной окружности) можно найти по формулам

$$AO=\frac{b+c}{a+b+c}\cdot AA_1=\frac{b+c}{a+b+c}\cdot l_a=\sqrt{\frac{cb(b+c-a)}{a+b+c}}=\sqrt{\frac{cb(p-a)}{p}},\quad AO^2=b\cdot c-4R\cdot r$$

Если O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, то $\dfrac{AO}{OA_1}=\dfrac{b+c}{a}$,

где AA_1 – биссектриса угла A, AB = c, BC = a, CA = b. (рис. 2).

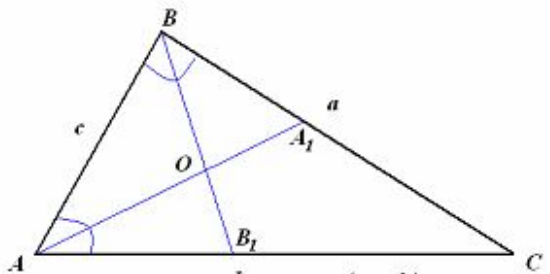
Доказательство.

1) В треугольнике ABC AA_1 – биссектриса угла A, поэтому $AB:AC=BA_1:CA_1=BA_1:(BC-BA_1)$ и

$$BA_1=\frac{a\cdot c}{b+c}.$$

2) В треугольнике ABA_1 BO – биссектриса угла B, поэтому $AO:OA_1=BA:BA_1$

и $\dfrac{AO}{OA_1}=\dfrac{b+c}{a}$



(рис.2)

2. *Расстояние от вершины до точки пересечения биссектрис треугольника (центра, центра вписанной окружности).*

Известно, что $\dfrac{AO}{OA_1}=\dfrac{b+c}{a}$, то $AO=\dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot AA_1=\dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot l_a$

Так как $AA_1=\dfrac{\sqrt{cb(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}$, то получим, что:

$$AO=\sqrt{\frac{cb(b+c-a)}{a+b+c}}=\sqrt{\frac{cb(p-a)}{p}},\quad \left(p=\frac{a+b+c}{2}\right).$$

Можно доказать, что $AO^2=b\cdot c-4R\cdot r$

Пример. *В треугольнике ABC AB = 8см, BC = 7см, CA = 6см. Найти расстояние от точки A до точки пересечения биссектрис.*

Решение.

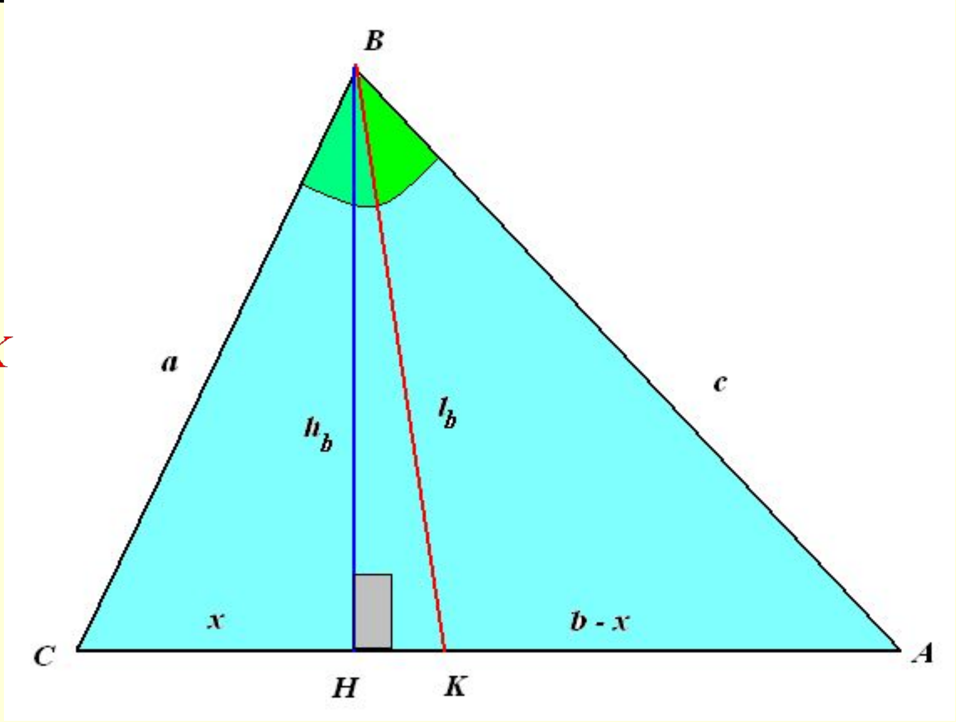
1) Найдем биссектрису угла A:

$$AA_1=\frac{\sqrt{cb(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}=\frac{\sqrt{6\cdot 8\cdot 7\cdot 21}}{14}=\frac{7\cdot 4\cdot 3}{14}=6,\quad AA_1=6\text{см}.$$

2) $AO=\dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot AA_1=\dfrac{14}{21}\cdot 6=4$

Ответ: $AO=4$*см.*

<u>Биссектриса угла треугольника</u> (способы нахождения)



способ 1

1. *Найти* x: *два прямоугольных тр – ка*

CBH и ABH найти $h_b = BH$

2. *По св – ву биссектрисы найти* CK *и* AK

$$\frac{a}{CK} = \frac{c}{b - CK} \Rightarrow CK = \frac{a\cdot b}{a+c} \qquad AK = \frac{c\cdot b}{a+c}$$

3. *В △BHK по теореме Пифагора найти*

$l_b = BK$

$$l_в = \frac{2\cdot\sqrt{p\cdot(p-b)\cdot\ \cdot\ }}{a+c},\ p\quad l_a = \frac{2a\sqrt{b\cdot c(\ -\ )\cdot\ \cdot\ }}{b+c},\ p\quad l_c = \frac{2c\sqrt{b\cdot(\ -\ )\cdot\ \cdot\ }}{a+b}$$

Биссектриса угла треугольника (способы нахождения)

способ 2

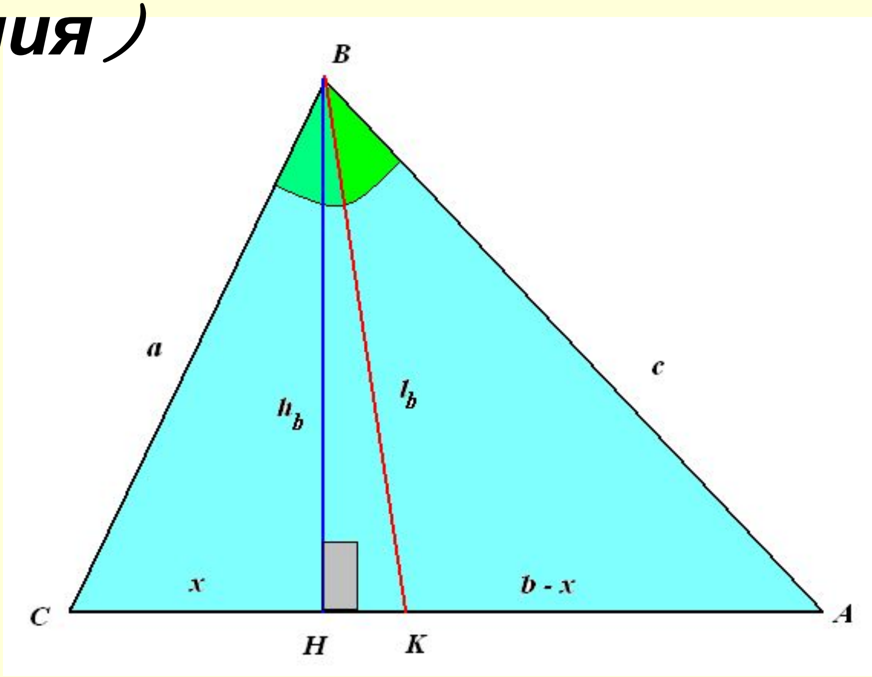
1. По св – ву биссектрисы найти CK и AK

$$\frac{a}{CK} = \frac{c}{b-CK} \Rightarrow CK = \frac{a\cdot b}{a+c} \quad \text{и} \quad AK = \frac{c\cdot b}{a+c}$$

2. В $\triangle CBK$, $\triangle ABK$ по теореме косинусов

$$\cos\left(\beta/2\right) = \frac{a^2 + l_b^2 - CK^2}{2\cdot a\cdot l_b} = \frac{c^2 + l_b^2 - AK^2}{2\cdot c\cdot l_b}$$

найти l_b



способ 3

1. $\triangle BKC$ по теореме косинусов $\quad l_b^2 = a^2 + CK^2 - 2\cdot a\cdot CK\cdot\cos\angle C \quad (3.1)$

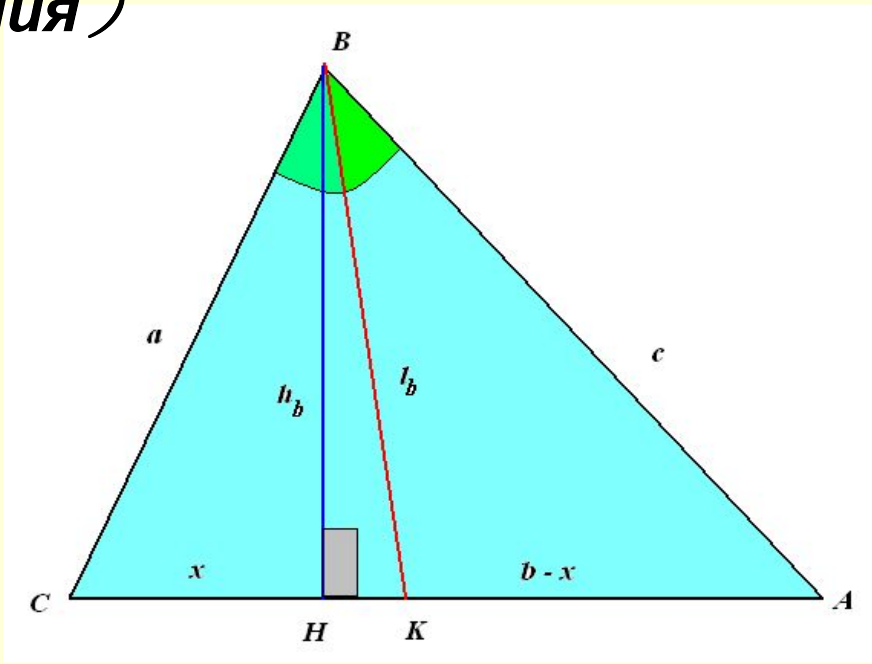
2. $\triangle ABC$ по теореме косинусов $\quad \cos\angle C = \frac{в^2 + a^2 - c^2}{2aв}$

3. По св – ву биссектрисы найти $CK = \frac{a\cdot b}{a+c}$

4. Подставить найденные $\cos\angle C$ и CK в (3.1) найти l_b

<u>Биссектриса угла треугольника</u> (способы нахождения)

способ 4



1. $\triangle BKA,\ \triangle BKC$ *по теореме косинусов*

$$\cos\varphi = \frac{l_b^2 + KA^2 - c^2}{2\cdot l_b\cdot KA} = \frac{a^2 - KC^2 - l_b^2}{2\cdot l_b\cdot KC} \quad (\varphi = \angle BKA)$$

$$l_b^2 \cdot b = a^2 \cdot KA + c^2 \cdot KC - b \cdot KA \cdot KC \quad (4.1)$$

2. *По св-ву биссектрисы* $a : c = CK : AK$ *или*

$$a \cdot KA = c \cdot CK$$

3. *Подставим в* (4.1)

$$l_b^2 \cdot b = a \cdot c \cdot KA + a \cdot c \cdot KC - в \cdot KA \cdot KC =$$

$$= a \cdot c \cdot (KA + KC) - в \cdot KA \cdot KC =$$

$$= a \cdot в \cdot c - в \cdot KA \cdot KC = в \cdot (a \cdot c - KA \cdot KC)$$

$$\boxed{l_b^2 = ac - KA \cdot KC}$$

способ 5

Очевидно, что $S_{ABC} = S_{CBK} + S_{ABK}$ *поэтому* $\dfrac{a\cdot c\cdot\sin\beta}{2} = \dfrac{a\cdot l\cdot\sin\left(\beta/2\right)}{2} + \dfrac{c\cdot l\cdot\sin\left(\beta/2\right)}{2}$

и после упрощения получим

$$\boxed{l_b = \frac{2\cdot a\cdot c\cdot\cos\left(\beta/2\right)}{a+c}}$$