

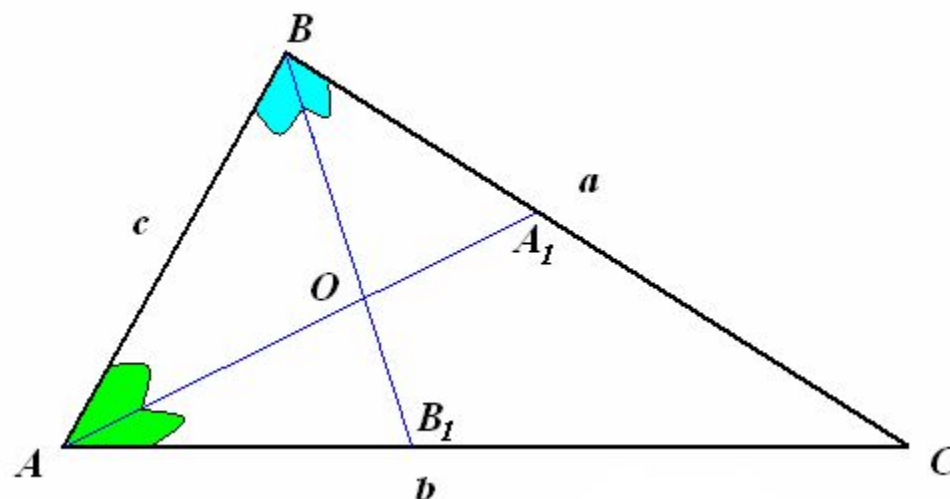
Биссектриса угла треугольника

1. Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке

(центр)

2. Биссектриса угла делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам

$$\frac{BC}{CK} = \frac{BA}{AK}$$



3. Если O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC , то $\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$, $\frac{BO}{OB_1} = \frac{a+c}{b}$

где AA_1 , BB_1 – биссектрисы

4. Расстояние от вершины до точки пересечения биссектрис треугольника (центра, центра вписанной окружности) можно найти по формулам

$$AO = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot AA_1 = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot l_a = \sqrt{\frac{cb(b+c-a)}{a+b+c}} = \sqrt{\frac{cb(p-a)}{p}}, \quad AO^2 = b \cdot c - 4R \cdot r$$

Если O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC , то $\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$,

где AA_1 – биссектриса угла A , $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. (рис. 2).

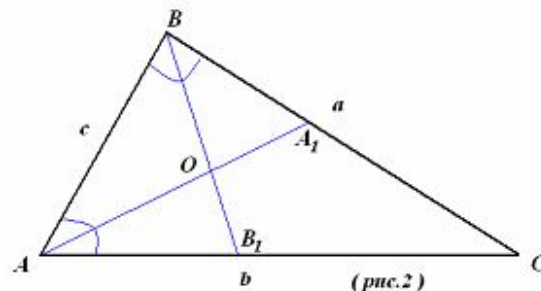
Докажем это.

1) В треугольнике ABC AA_1 – биссектриса угла A , поэтому $AB : AC = BA_1 : CA_1 = BA_1 : (BC - BA_1)$ и

$$BA_1 = \frac{a \cdot c}{b+c}.$$

2) В треугольнике ABA_1 BO – биссектриса угла B , поэтому $AO : OA_1 = BA : BA_1$

и $\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$



2. Расстояние от вершины до точки пересечения биссектрис треугольника (центра вписанной окружности).

Известно, что $\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a}$, то $AO = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot AA_1 = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot l_a$

Так как $AA_1 = \frac{\sqrt{cb(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c}$, то получим, что:

$$AO = \sqrt{\frac{cb(b+c-a)}{a+b+c}} = \sqrt{\frac{cb(p-a)}{p}}, \quad \left(p = \frac{a+b+c}{2} \right).$$

Можно доказать, что $AO^2 = b \cdot c - 4R \cdot r$

Пример. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $BC = 7$ см, $CA = 6$ см. Найти расстояние от точки A до точки пересечения биссектрис.

Решение.

1) Найдем биссектрису угла A :

$$AA_1 = \frac{\sqrt{cb(b+c-a)(b+c+a)}}{b+c} = \frac{\sqrt{6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 21}}{14} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 3}{14} = 6, \quad AA_1 = 6 \text{ см.}$$

2) $AO = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot AA_1 = \frac{14}{21} \cdot 6 = 4$

Ответ: $AO = 4$ см.

Биссектриса угла треугольника (способы нахождения)

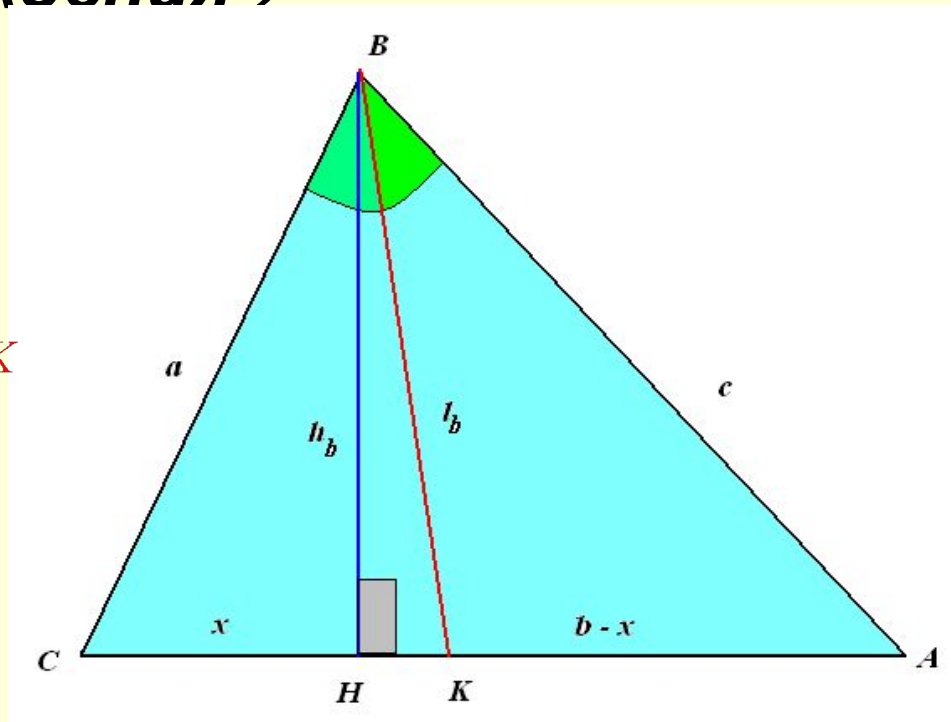
способ 1

1. Найти x : два прямоугольных тр-ка $\triangle BAH$ найти $h_b = BH$

2. По св-ву биссектрисы найти CK и AK

$$\frac{a}{CK} = \frac{c}{b-CK} \Rightarrow \triangle KAK \frac{a \cdot b}{a+c} = \frac{c \cdot b}{a+c}$$

3. По теореме Пифагора найти $l_b = BK$



$$l_b = \frac{2 \cdot \sqrt{p \cdot (p-b) \cdot \dots}}{a+c}, \quad l_a = \frac{2a \sqrt{b \cdot (c-a) \cdot \dots}}{b+c}, \quad l_c = \frac{2c \sqrt{b \cdot (c-a) \cdot \dots}}{a+b}$$

Биссектриса угла треугольника (способы нахождения)

способ 2

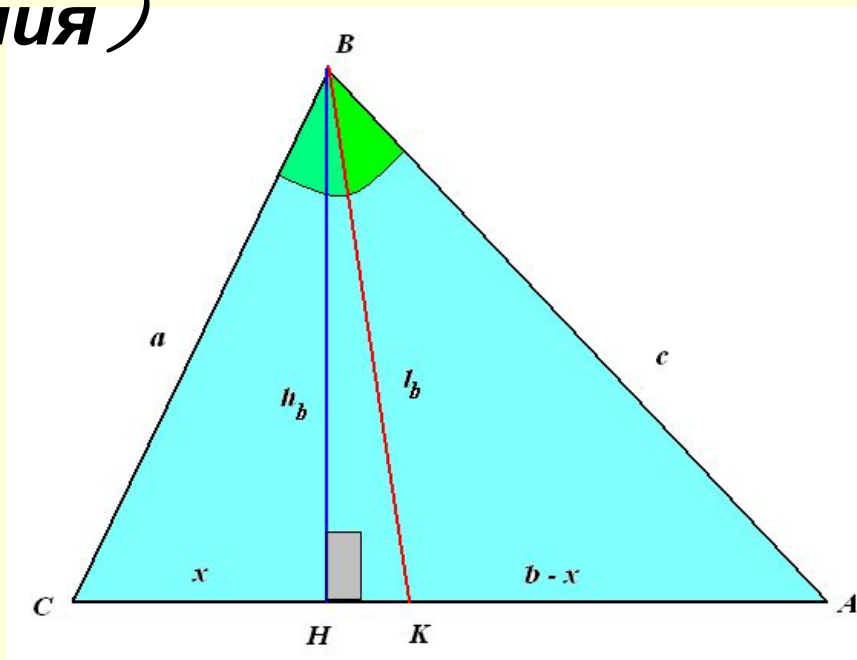
1. По св-ву биссектрисы найти CK и AK

$$\frac{a}{CK} = \frac{c}{b - CK} \Rightarrow \cancel{CK} \frac{a \cdot b}{a + c} = \frac{c \cdot b}{a + c}$$

2. В $\triangle CBK$, $\triangle ABK$ по теореме косинусов

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{a^2 + l_b^2 - CK^2}{2 \cdot a \cdot l_b} = \frac{c^2 + l_b^2 - AK^2}{2 \cdot c \cdot l_b}$$

найти l_b



способ 3

1. В $\triangle CBK$ по теореме косинусов

$$l_b^2 = a^2 + CK^2 - 2 \cdot a \cdot CK \cdot \cos \angle C \quad (3.1)$$

2. В $\triangle ABC$ по теореме косинусов

$$\cos \angle C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

3. По св-ву биссектрисы найти $CK = \frac{a \cdot b}{a + c}$

4. Подставить найденные $\cos \angle C$ и CK в (3.1) найти l_b

Биссектриса угла треугольника (способы нахождения)

способ 4

1. $\square BKA \square$ по теореме косинусов

$$\cos \varphi = \frac{l_b^2 + KA^2 - c^2}{2 \cdot l_b \cdot KA} = \frac{a^2 - KC^2 - l_b^2}{2 \cdot l_b \cdot KC} \quad (\varphi = \angle BKA)$$

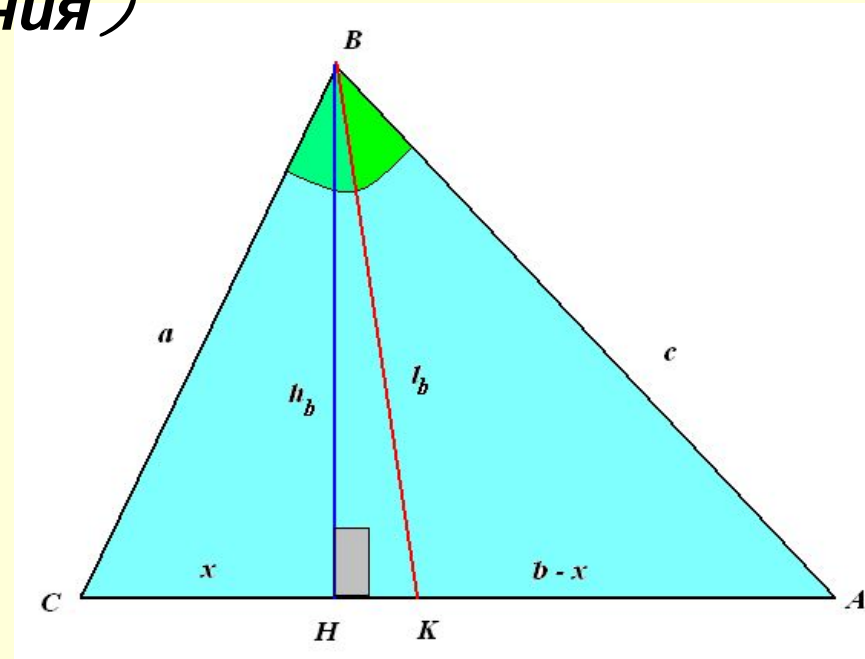
$$l_b^2 \cdot b = a \cdot KC^2 - l_b^2 \cdot c - KA \cdot KC \quad (4.1)$$

2. По св-ву биссектрисы $a:c = CK:AK$ или
 $a \cdot KA = c \cdot KC$

3. Подставим в (4.1)

$$\begin{aligned} l_b^2 \cdot b &= a \cdot KC \cdot AK + a \cdot c \cdot KC - c \cdot KA \cdot KC = \\ &= a \cdot c \cdot (KA + KC) - c \cdot KA \cdot KC = \\ &= a \cdot c \cdot b - c \cdot KA \cdot KC = c \cdot (a \cdot c - KA \cdot KC) \end{aligned}$$

$$l_b^2 = KC \cdot KA$$



способ 5

Очевидно, что $S_{ABC} = S_{CBK} + S_{ABK}$ поэтому

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin \beta}{2} = \frac{a \cdot l_b \cdot \sin(\beta/2)}{2} + \frac{c \cdot l_b \cdot \sin(\beta/2)}{2}$$

$$l_b = \frac{2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta/2)}{a + c}$$

и после упрощения получим