Иррациональные неравенства:

виды и способы решения

п.1. Неравенства вида $\sqrt[2n]{f(x)} > c$ и $\sqrt[2n]{f(x)} \ge c$

	$\sqrt[2n]{f(x)} > c$				
	$c < 0$		$c = 0$		$c > 0$
1	$\sqrt[2n]{f(x)} > c \Leftrightarrow f(x) \ge 0$	2	$\sqrt[2n]{f(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$	3	$\sqrt[2n]{f(x)} > c \Leftrightarrow f(x) > c^{2n}$
Пример 1	$\sqrt[4]{2x-5} > -1 \Leftrightarrow 2x-5 \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \ge 2,5$ *Ответ*: $[2,5; +\infty)$	Пример 2	$\sqrt[4]{3-x} > 0 \Leftrightarrow 3-x > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x < 3.$ *Ответ*: $(-\infty; 3)$	Пример 3	$\sqrt{4+x} > 5 \Leftrightarrow 4+x > 25$ $\Leftrightarrow x > 21.$ *Ответ*: $(21; +\infty)$

	$\sqrt[2n]{f(x)} \ge c$				
	$c < 0$		$c = 0$		$c > 0$
1	$\sqrt[2n]{f(x)} \ge c \Leftrightarrow f(x) \ge 0$	2	$\sqrt[2n]{f(x)} \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge 0$	3	$\sqrt[2n]{f(x)} \ge c \Leftrightarrow f(x) \ge c^{2n}$
Пример 4	$\sqrt[12]{1-x^2} \ge -6 \Leftrightarrow 1-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 \le x \le 1$ *ответ*: $[-1; 1]$	Пример 5	$\sqrt[8]{\dfrac{2x-5}{1-x}} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{1-x} \ge 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 < x \le 2,5.$ *ответ*: $(1; 2,5]$	Пример 6	$\sqrt{\lvert x\rvert+1} \ge 3 \Leftrightarrow \lvert x\rvert+1 \ge 9$ $\Leftrightarrow \lvert x\rvert \ge 8.$ *ответ*: $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$

п.2. Неравенства вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} > c$ *и* $\sqrt[2n+1]{f(x)} \ge c$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} > c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > c^{2n+1}$ $\qquad \sqrt[2n+1]{f(x)} \ge c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \ge c^{2n+1}$

Пример 7. Решить неравенство $\sqrt[3]{3-2x} \ge 5$

Решение

$$\sqrt[3]{3-2x} \ge 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3-2x \ge 5^3 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \ge 122 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -61.$$

ответ $:(-\infty; -61]$

п 3. Неравенства вида $\sqrt[2n]{f(x)} < c$ и $\sqrt[2n]{f(x)} \le c$

	$\sqrt[2n]{f(x)} < c$				
	$c<0$		$c=0$		$c>0$
1	$\sqrt[2n]{f(x)} < c \Leftrightarrow \varnothing$	2	$\sqrt[2n]{f(x)} < 0 \Leftrightarrow \varnothing$	3	$\sqrt[2n]{f(x)} < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < c^{2n} \end{cases}$
Пример 8	$\sqrt{7-2x} < -9 \Leftrightarrow \varnothing.$ *ответ*: $\varnothing$.	Пример 9	$\sqrt{x^2-x-2} < 0 \Leftrightarrow \varnothing$ *ответ*: $\varnothing$	Пример 10	$\sqrt{6-x} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \ge 0, \\ 6-x < 9 \end{cases}$ $\Leftrightarrow -3 < x \le 6.$ *ответ*: $(-3;6]$.

	$\sqrt[2n]{f(x)} \le c$				
	$c<0$		$c=0$		$c>0$
1	$\sqrt[2n]{f(x)} \le c \Leftrightarrow \varnothing$	2	$\sqrt[2n]{f(x)} \le 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$	3	$\sqrt[2n]{f(x)} \le c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \le c^{2n} \end{cases}$
Пример 11	$\sqrt{\dfrac{2-x}{x+3}} \le -5 \Leftrightarrow \varnothing.$ *Ответ*: $\varnothing$	Пример 12	$\sqrt{2x^2-5x+2} \le 0 \Leftrightarrow$ $2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=0{,}5 \end{array}\right.$ *Ответ*: $\{0{,}5;\,2\}$.	Пример 13	$\sqrt{x-7} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 \ge 0, \\ x-7 \le 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 7 \le x \le 8.$ *ответ*: $[7;8]$.

п.4. Неравенства вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} < c$ и $\sqrt[2n+1]{f(x)} \le c$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} < c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < c^{2n+1}$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} \le c \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \le c^{2n+1}$

Пример Решить неравенство $\sqrt[5]{x+3} < -2$

Решение

$$\sqrt[5]{x+3} < -2 \quad \Leftrightarrow \quad x+3 < (-2)^5 \quad \Leftrightarrow \quad x+3 < -32 \quad \Leftrightarrow \quad x < -35.$$

Ответ: $(-\infty; -35)$.

5. Неравенства вида $\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x)$ *и* $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$

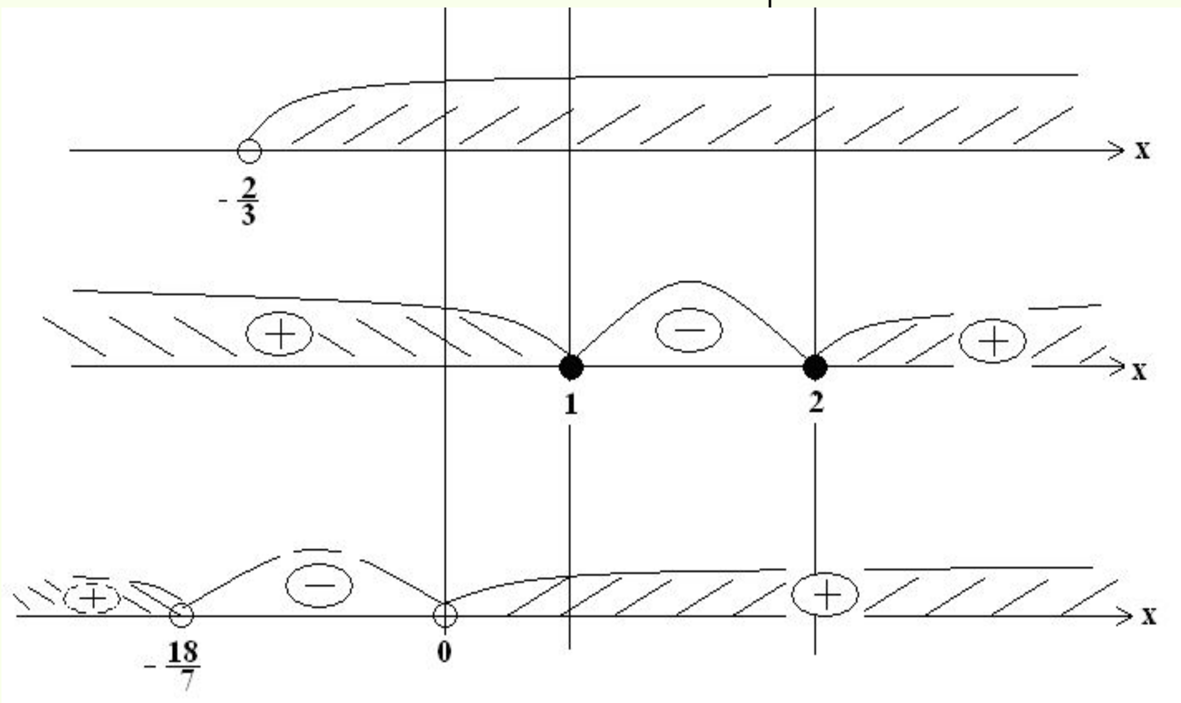
$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x)$	$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$
$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^{2n}(x) \end{cases}$	$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}$

Решить неравенство $\sqrt{2x^2-6x+4}<3x+2$

Решение

$$\sqrt{2x^2-6x+4}<3x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2>0, \\ 2x^2-6x+4\geq 0, \\ 2x^2-6x+4<(3x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{3}, \\ 2x^2-6x+4\geq 0, \\ 7x^2+18x>0 \end{cases}$$

Ответ: $(0;1]\cup[2;+\infty)$.



6. Неравенства вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} \le g(x)$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} \le g(x) \iff f(x) \le g^{2n+1}(x)$ $\quad$ $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \iff f(x) < g^{2n+1}(x)$

Решить неравенство $\sqrt[3]{x^3 - 3x + 3} < 2x - 1$

Решение

$$\sqrt[3]{x^3 - 3x + 3} < 2x - 1 \iff x^3 - 3x + 3 < (2x-1)^3 \iff x^3 - 3x + 3 < 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \iff$$

$$\iff 7x^3 - 12x^2 + 9x - 4 > 0 \iff (x-1)(7x^2 - 5x + 4) > 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1$$

Ответ : $(1\,;+\infty)$

7. Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x)$ *и* $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^{2n}(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Решить неравенство $\sqrt{x^2-5x+4}\ge 2-x$

Решение

$$\sqrt{x^2-5x+4}\ge 2-x \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-x\ge 0,\\ x^2-5x+4\ge (2-x)^2,\end{cases}\\ \begin{cases}2-x<0,\\ x^2-5x+4\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2,\\ x\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ \left[\begin{array}{l}x\le 1,\\ x\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le 0,\\ x\ge 4\end{array}\right.$$

Ответ : $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$.

8. Неравенства вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} \geq g(x)$ и $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$

Решить неравенство $\sqrt[5]{x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 15x^2 + 17x - 34} \geq x - 2$

Решение

$$\sqrt[5]{x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 15x^2 + 17x - 34} \geq x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 15x^2 + 17x - 34 \geq (x-2)^5 \Leftrightarrow$$

Ответ $: (-\infty; 0] \cup [4; +\infty).$

9. Неравенства вида $\sqrt[2n]{f(x)} \le \sqrt[2n]{g(x)}$ и $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$

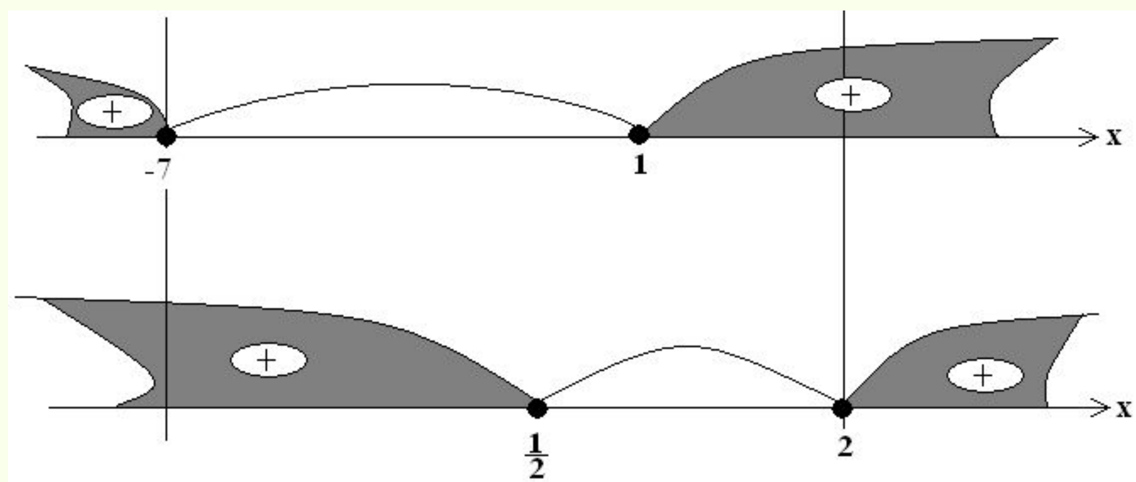
$$\sqrt[2n]{f(x)} \le \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x) \end{cases} \quad и \quad \sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Решить неравенство $\sqrt{3x^2+x-5} \ge \sqrt{2x^2-5x+2}$

Решение

$$\sqrt{3x^2+x-5} \ge \sqrt{2x^2-5x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+x-5 \ge 2x^2-5x+2, \\ 2x^2-5x+2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-7 \ge 0, \\ 2x^2-5x+2 \ge 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty;-7] \cup [2;+\infty)$.



ЗАЧЕТ

1	$\sqrt[2n]{f(x)} > c, \quad c < 0$	2	$\sqrt[2n]{f(x)} > c, \quad c = 0$
3	$\sqrt[2n]{f(x)} > c, \quad c > 0$	4	$\sqrt[2n]{f(x)} \geq c, \quad c < 0$
5	$\sqrt[2n]{f(x)} \geq c, \quad c = 0$	6	$\sqrt[2n]{f(x)} \geq c, \quad c > 0$
7	$\sqrt[2n+1]{f(x)} > c$	8	$\sqrt[2n+1]{f(x)} \geq c$
9	$\sqrt[2n]{f(x)} < c, \Leftrightarrow \; c < 0$	10	$\sqrt[2n]{f(x)} < c, \quad c < 0$
11	$\sqrt[2n]{f(x)} < c, \quad c > 0$	12	$\sqrt[2n]{f(x)} \leq c, \quad c < 0$
13	$\sqrt[2n]{f(x)} \leq c, \quad c = 0$	14	$\sqrt[2n]{f(x)} \leq c, \quad c > 0$
15	$\sqrt[2n+1]{f(x)} \leq g(x)$	16	$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$
17	$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$	18	$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x)$
19	$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$	20	$\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x)$

Решить неравенство $\sqrt[3]{7x-2}<2$

Решение

$$\sqrt[3]{7x-2}<2 \;\Leftrightarrow\; 7x-2<2^3 \Leftrightarrow 7x-2<8 \Leftrightarrow 7x<10 \Leftrightarrow x<\frac{10}{7}$$

Ответ: $\left(-\infty;\frac{10}{7}\right)$.

Решить неравенство $\sqrt{7x+12}>2$

Решение

$$\sqrt{7x+12}>2 \;\Leftrightarrow\; 7x+12>2^2 \Leftrightarrow 7x+12>4 \Leftrightarrow 7x>-8 \Leftrightarrow x>-\frac{8}{7}$$

Ответ: $\left(-\frac{8}{7};+\infty\right)$.

$$\boxed{c>0, \quad \sqrt[2n]{f(x)}>c \Leftrightarrow f(x)>c^{2n}}$$

Решить неравенство $\sqrt[3]{x+2} \geq -5$

Решение

$$\sqrt[3]{x+2} \geq -5 \Leftrightarrow x+2 \geq (-5)^3 \Leftrightarrow x+2 \geq -125 \Leftrightarrow x \geq -127$$

Ответ $: [-127; +\infty)$.

Решить неравенство $\sqrt{x-5} < 4$

Решение

$$\sqrt{x-5} < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0, \\ x-5 < 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ x < 21 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 21$$

Ответ $: [5; 21)$.

$$\boxed{c > 0, \quad \sqrt[2n]{f(x)} < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < c^{2n} \end{cases}}$$

10. Введение новой неизвестной

Решить неравенство $\dfrac{3-x}{\sqrt{15-x}}<1$

Решение

Пусть $t=\sqrt{15-x},\ t>0,$ *тогда* $x=15-t^2$ *и получим систему*

$$\begin{cases} t>0, \\ \dfrac{3-(15-t^2)}{t}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ \dfrac{t^2-12}{t}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ \dfrac{t^2-t-12}{t}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ t^2-t-12<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<t<4$$

Вернемся к переобозначению

$$0<\sqrt{15-x}<4 \quad \Leftrightarrow \quad 0<15-x<16 \quad \Leftrightarrow \quad -15<-x<1 \quad \Leftrightarrow \quad -1<x<15$$

Ответ: $(-1;15)$.

Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x}+2} \ge \dfrac{2}{4-\sqrt{x}}$

Решение

Пусть $t=\sqrt{x},\ t>0,$ *тогда получим систему*

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ \dfrac{1}{t+2} \ge \dfrac{2}{4-t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ \dfrac{-3t}{(t+2)(4-t)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ \begin{cases} t>0, \\ \dfrac{t}{(t+2)(4-t)} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ \begin{cases} t>0, \\ \dfrac{1}{4-t} < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ \begin{cases} t>0, \\ t>4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0, \\ t>4 \end{array}\right.$$

Вернемся к переобозначению: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=0, \\ \sqrt{x}>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x>16 \end{array}\right.$

Ответ: $\{0\} \cup (16\,;+\infty\,)$.

Решить неравенство $\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \le 0$

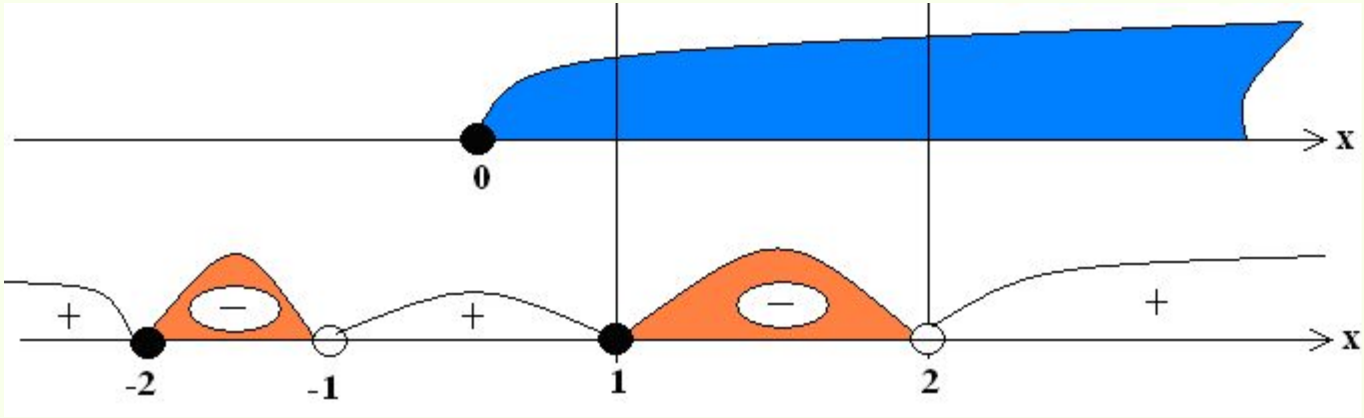
Решение

Пусть $t=\sqrt{x},\ t\ge 0,$ *тогда* $x=t^2$ *получим систему*

$$\begin{cases} t\ge 0, \\ \dfrac{t^2+t-2}{t^2-t-2}\le 0 \end{cases}$$

Вернемся к переобозначению: $1\le\sqrt{x}<2 \quad \Leftrightarrow \quad 1\le x<4.$

Ответ: $[1;4)$.

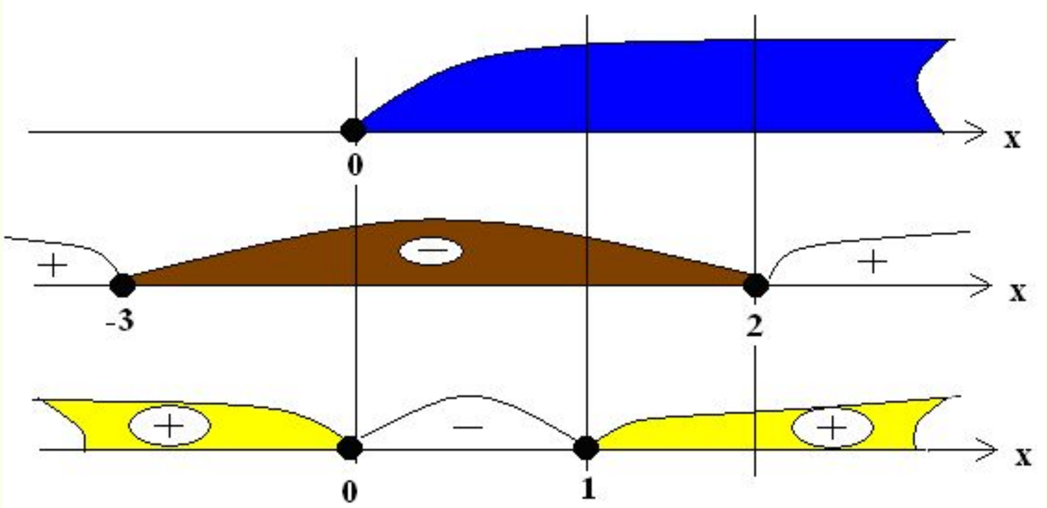


Решить неравенство $\left|x-7\right| \le 3-\sqrt{x-4}$

Решение

Пусть $t=\sqrt{x-4},\ t \ge 0,$ *тогда* $x=t^2+4$ *получим систему*

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ \left|t^2-3\right| \le 3-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ \left|t^2-3\right| \le 3-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ t-3 \le t^2-3 \le 3-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ t^2+t-6 \le 0, \\ t^2-t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le t \le 2, \\ t=0 \end{array}\right.$$



Вернемся к переобозначению: $\left[\begin{array}{l} 1 \le \sqrt{x-4} \le 2, \\ \sqrt{x-4}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le x-4 \le 4, \\ x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \le x \le 8, \\ x=4 \end{array}\right.$

Ответ: $\{4\} \cup [5;8]$.

Пример. Решить неравенства $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$

Решение

Пусть $t=\sqrt{x-1}\geq 0 \;\Rightarrow\; x=t^2+1,$ *тогда неравенство примет вид*

$$\begin{cases} t\geq 0, \\ \sqrt[3]{1-t^2}+t>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ \sqrt[3]{1-t^2}>1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ 1-t^2>(1-t)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ t^3-4t^2+3t>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\,|>0, \\ t^2-4t+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ \left[\begin{aligned} & t<1, \\ & t>3 \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & 0<t<1, \\ & t>3 \end{aligned}\right.$$

Вернемся к переобозначению

$$\left[\begin{aligned} & 0<\sqrt{x-1}<1, \\ & \sqrt{x-1}>3 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & 0<x-1<1, \\ & x-1>3 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & 1<x<2, \\ & x>10 \end{aligned}\right.$$

Ответ: $(1;2)\cup(10\,;+\infty)$.

Решение

Пусть $a=\sqrt{x-1},\ a\ge 0,\ b=\sqrt{x+6},\ b\ge 0,$ *тогда неравенство примет вид*

$$\begin{cases} a\ge 0, \\ b\ge 0, \\ a+b+2ab<56-a^2-b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0, \\ b\ge 0, \\ (a+b)^2+(a+b)-56<0 \end{cases}$$

Пусть $a+b=t,\ t\ge 0,$ ***и решим третье неравенство системы***

$$\begin{cases} t\ge 0, \\ t^2+t-56<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0, \\ -8<t<7 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le t<7$$

Вернемся к переобозначению

$$\begin{cases} a\ge 0, \\ b\ge 0, \\ 0\le a+b<7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{x-1}\ge 0, \\ \sqrt{x+6}\ge 0, \\ 0\le \sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}<7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x\ge -6, \\ x-1+2\cdot\sqrt{(x-1)(x+6)}+x+6<49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ \sqrt{(x-1)(x+6)}<22-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ 22-x>0, \\ (x-1)(x+6)<(22-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1, \\ x<22, \\ x<10 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x<10$$

Ответ: $[1;10)$.

П.11. Обобщенный метод интервалов при решении неравенства

план

Ввести функцию и записать неравенство

1. Найти область определения полученной функции.
2. Найти «нули» функции с учетом области определения.
3. Отметить на числовой прямой данные 1 и 2.
4. Определить истинность или ложность на каждом из промежутков п3 или найти знаки на каждом промежутке п. 3

Решение

Пусть $f(x)=\sqrt{7x+9}-\sqrt{2x-1}-5, \quad f(x)<0$

1). Функция $f(x)$ определена, если $\begin{cases}7x+9\ge 0,\\ 2x-1\ge 0\end{cases}$ и тем самым $D(f)=[0,5\,;+\infty)$.

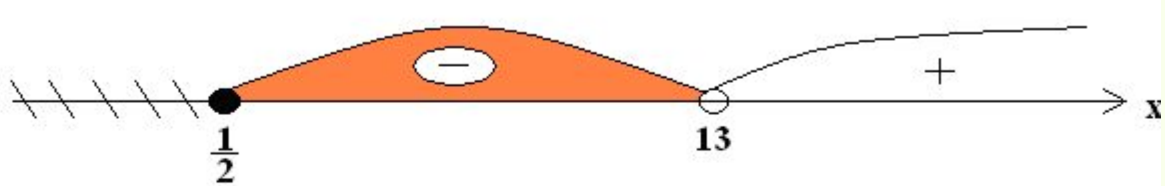
2) Найдем «нули» функции $f(x)$.

$$\begin{cases}f(x)=0,\\ x\in D(f)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in[0,5;+\infty),\\ \sqrt{7x+9}-\sqrt{2x-1}-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in[0,5;+\infty),\\ \sqrt{7x+9}=\sqrt{2x-1}+5\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0.5,\\ 7x+9=2x-1+10\sqrt{2x-1}+25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0.5,\\ x-3=2\cdot\sqrt{2x-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3,\\ x^2-14x+13=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3,\\ \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=13\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=13.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2};\ 13\right)$.



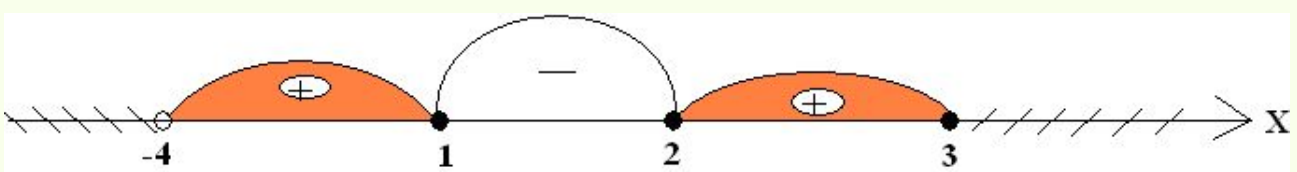
Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2 - 3x + 2)\cdot\sqrt{\dfrac{3-x}{x+4}}, \quad f(x) \ge 0.$

1) $D(f)$: $\dfrac{3-x}{x+4} \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-4;3]$

2) Найдем «нули» функции на области определения:

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ x\in(-4;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-3x+2)\cdot\sqrt{\dfrac{3-x}{x+4}}=0, \\ x\in(-4;3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=3, \end{array}\right. \\ x\in(-4;3] \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=3, \end{array}\right.$$



Ответ: $(-4;1]\cup[2;3]$.

П.12. Неравенства вида $g(x)\cdot\sqrt[2n]{f(x)}\le 0$ *и* $g(x)\cdot\sqrt[2n]{f(x)}\ge 0$

$$g(x)\cdot\sqrt[2n]{f(x)}\le 0$$

$$g(x)\cdot\sqrt[2n]{f(x)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)=0,\\ x\in D(g)\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)>0,\\ g(x)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$g(x)\cdot\sqrt[2n]{f(x)}<0$$

$$g(x)\cdot\sqrt[2n]{f(x)}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)<0 \end{cases}$$

Решение

$$\frac{2x-1}{x+6}\cdot\sqrt{x^2-2x-3}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x-3=0,\\ x+6\ne 0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x-3>0,\\ \dfrac{2x-1}{x+6}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=3,\end{array}\right.\\ x\ne -6\end{cases}\\ \begin{cases}(x+1)(x-3)>0,\\ \dfrac{2x-1}{x+6}\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=3,\end{array}\right.\\ -6<x<-1\end{array}\right.$$

Решить неравенство $\frac{2x-1}{x+6}\cdot\sqrt{x^2-2x-3}\le 0.$

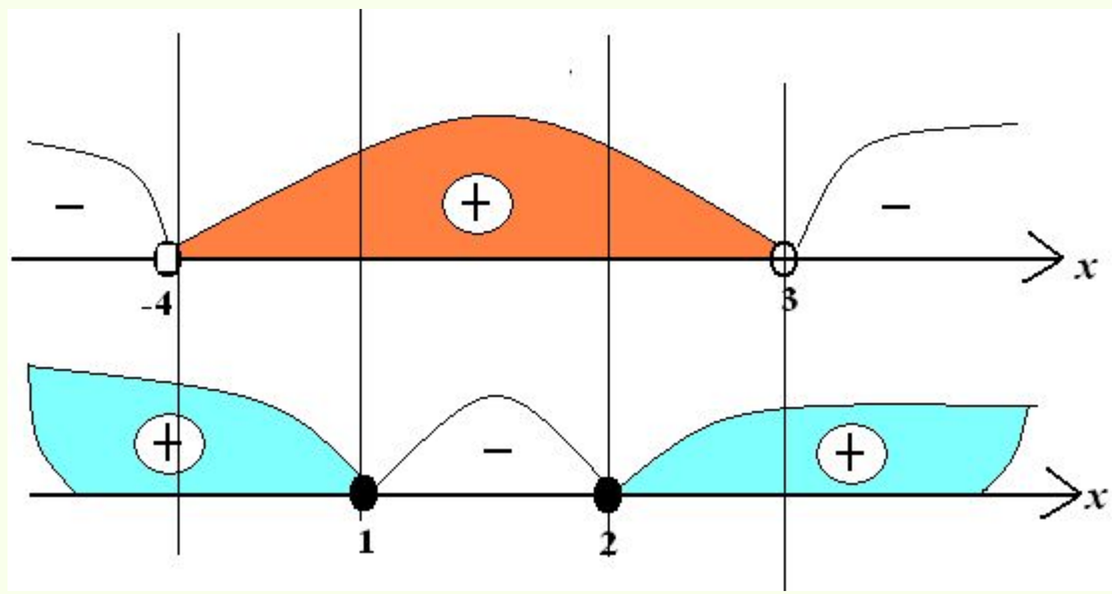
Ответ $:(-6;-1]\cup\{3\}.$

$$g(x)\cdot\sqrt[2n]{f(x)}\geq 0$$

$$g(x)\cdot\sqrt[2n]{f(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)=0, \\ x\in D(g) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)\geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Решить неравенство $\left(x^2-3x+2\right)\cdot\sqrt{\dfrac{3-x}{x+4}}\ge 0.$

$$\left(x^2-3x+2\right)\cdot\sqrt{\frac{3-x}{x+4}}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3-x}{x+4}=0,\\ x\in \mathbb{R}\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{3-x}{x+4}>0,\\ x^2-3x+2\ge 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{3-x}{x+4}>0,\\ x^2-3x+2\ge 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$



$Ответ: (-4;1]\cup[2;3].$

$$g(x)\cdot\sqrt[2n]{f(x)}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases}$$

Решить неравенство $\left(x^2+4x-5\right)\cdot\sqrt{x+5}>0$

решение

$$\left(x^2+4x-5\right)\cdot\sqrt{x+5}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5>0, \\ x^2+4x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5, \\ \left[\begin{array}{l} x<-5, \\ x>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

$Ответ:(1;+\infty).$

Ответ:

3.3.D02 а) Решите неравенство $(\sqrt{x+1}-x+1)(\sqrt{x+6}-x)\leqslant$
$\leqslant 0.$

Решение. Воспользуемся методом интервалов. Пусть $F(x)=(\sqrt{x+1}-x+1)(\sqrt{x+6}-x)$. Решим неравенство $F(x)\leqslant 0$.

Найдем область определения функции F: $D(F)=$ $=[-1;+\infty)$.

Найдем нули функции. Решим уравнение: $(\sqrt{x+1}-x+$ $+1)(\sqrt{x+6}-x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}-x+1=0, \\ \sqrt{x+6}-x=0, \end{array}\right. \\ x\geqslant -1. \end{cases}$

Решим первое уравнение совокупности:
$\sqrt{x+1}-x+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=(x-1)^2, \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=x^2-2x+1, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x=0, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3, \end{array}\right. \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

Решим второе уравнение совокупности: $\sqrt{x+6}-x=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+6}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=x^2, \\ x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

Единственный нуль функции: $x=3$. Если $x\in[-1;3)\cup$ $\cup(3;\infty)$, то $F(x)>0$. Решение неравенства: $x=3$.

Ответ: $x=3$.

3.3.C08 а) Решите неравенство

$$(x^2 - 8x + 12)\sqrt{-2x^2 + 11x - 15} \leqslant 0.$$

Решение. $\sqrt{-2x^2 + 11x - 15} \geqslant 0$ при всех допустимых значениях x. Следовательно, данное неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} -2x^2 + 11x - 15 = 0, \\ \begin{cases} -2x^2 + 11x - 15 \geqslant 0, \\ x^2 - 8x + 12 \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Решим систему $\begin{cases} -2x^2 + 11x - 15 \geqslant 0, \\ x^2 - 8x + 12 \leqslant 0. \end{cases}$

$-2x^2 + 11x - 15 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 15 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 5.$

$x^2 - 8x + 12 \leqslant 0 \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 6.$

Решение системы: $x \in [2; 5]$.

Корни уравнения $-2x^2 + 11x - 15 = 0$: $x = \frac{3}{2}$; $x = 5$.

Объединяя полученные множества, найдем решение совокупности: $x \in \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup [2; 5]$.

Ответ: $x \in \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup [2; 5]$.

б) Решите неравенство
$(x^2 - 7x + 6)\sqrt{-3x^2 - 4x + 4} \leqslant 0.$

Решение. $\sqrt{-3x^2 - 4x + 4} \geqslant 0$ при всех допустимых значениях x. Следовательно, данное неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} -3x^2 - 4x + 4 = 0, \\ \begin{cases} -3x^2 - 4x + 4 \geqslant 0, \\ x^2 - 7x + 6 \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Решим систему $\begin{cases} -3x^2 - 4x + 4 \geqslant 0, \\ x^2 - 7x + 6 \leqslant 0. \end{cases}$

$-3x^2 - 4x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2.$

$x^2 - 7x + 6 \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 6.$

Решение системы: $x \in [1; 2]$.

Корни уравнения $-3x^2 - 4x + 4 = 0$: $x = -\frac{2}{3}$; $x = 2$.

Объединяя полученные множества, найдем решение совокупности: $x \in \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup [1; 2]$.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{2}{3}\right\} \cup [1; 2]$.

3.3.C09 а) Решите неравенство $\frac{x+3}{x+4}\sqrt{28-9x-4x^2} \geqslant 0$.

Решение. $\sqrt{28-9x-4x^2} \geqslant 0$ при всех допустимых значениях x. Следовательно, данное неравенство равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}28-9x-4x^2 \geqslant 0,\\ \frac{x+3}{x+4} \geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}28-9x-4x^2 = 0,\\ x+4 \neq 0.\end{cases}\end{array}\right.$

Решим систему $\begin{cases}28-9x-4x^2 \geqslant 0,\\ \frac{x+3}{x+4} \geqslant 0.\end{cases}$

$28-9x-4x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 4x^2+9x-28 \leqslant 0 \Leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant \frac{7}{4}$.

Решим неравенство $\frac{x+3}{x+4} \geqslant 0$. Получим $x \in (-\infty; -4) \cup$ $\cup\, [-3; +\infty)$.

Решение системы: $x \in \left[-3; \frac{7}{4}\right]$.

Решим систему $\begin{cases}28-9x-4x^2 = 0,\\ x+4 \neq 0.\end{cases}$

$$\begin{cases}28-9x-4x^2 = 0,\\ x+4 \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=\frac{7}{4},\end{array}\right.\\ x \neq -4\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}.$$

Объединяя полученные множества, находим решение совокупности: $x \in \left[-3; \frac{7}{4}\right]$.

Ответ: $x \in \left[-3; \frac{7}{4}\right]$.