

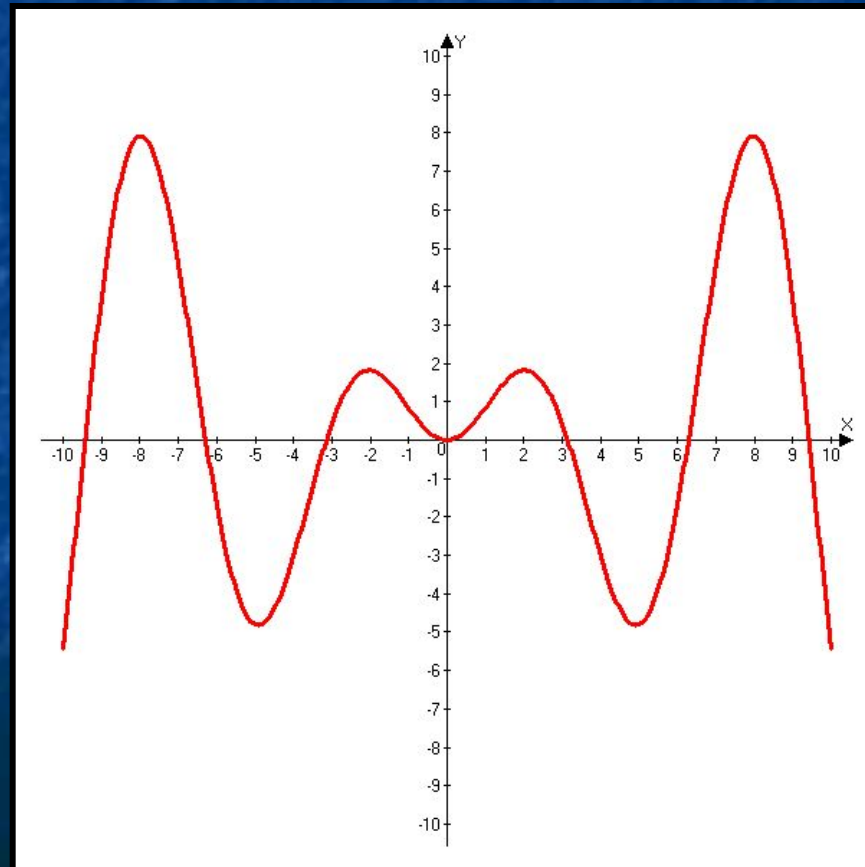
Урок на тему :

«Исследование функции  
с помощью производной»  
с использованием компьютерных технологий

*Учитель математики*

*Бахтиярова Г.Ф.*

# Исследование функций и построение графиков с помощью производной



*«...нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира...»*

*Н.И. Лобачевский*

*Скажи мне, и я забуду.*

*Покажи мне, и я запомню.*

*Дай мне действовать самому,*

*И я научусь.*

*Конфуций*

# Цели урока:

## □ *Образовательные.*

### Формировать:

- - навыки прикладного использования аппарата производной;
- - выявить уровень овладения учащимися комплексом знаний и умений по исследованию функции и ликвидировать пробелы в знаниях в соответствии с требованиями к математической подготовке учащихся.

## □ *Развивающие.*

### Развивать:

- - способности к самостоятельному планированию и организации работы
- - навыки коррекции собственной деятельности через применение информационных технологий;
- - умение обобщать, абстрагировать и конкретизировать знания при исследовании функции.

## □ *Воспитательные.*

### Воспитывать:

- - познавательный интерес к математике;
- - информационную культуру и культуру общения;
- - самостоятельность, способность к коллективной работе.

# І этап. Актуализация ЗУН, необходимых для творческого применения знаний

- Необходимое условие возрастания и убывания функции
- Достаточное условие возрастания и убывания функции
- Необходимое условие экстремума. (теорема Ферма)
- Признак максимума функции.
- Признак минимума функции.
- Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

# Необходимое условие возрастания и убывания функции

Т е о р е м а.

Если дифференцируемая функция  $f(x)$ ,  $x \in (a;b)$ , возрастает (убывает) на  $(a;b)$ , то  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) для любого  $x$  из интервала  $(a;b)$ .



# Достаточные условия возрастания и убывания функции

Теорема Лагранжа.

Если функция  $f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ ,  
непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  
дифференцируема на интервале  
 $(a; b)$ , то найдётся точка  $c \in (a; b)$   
такая, что имеет место формула

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$$



# Достаточное условие возрастания функции

Теорема.

Если функция  $f$  имеет неотрицательную производную в каждой точке интервала  $(a;b)$ , то функция  $f$  возрастает на интервале  $(a;b)$ .



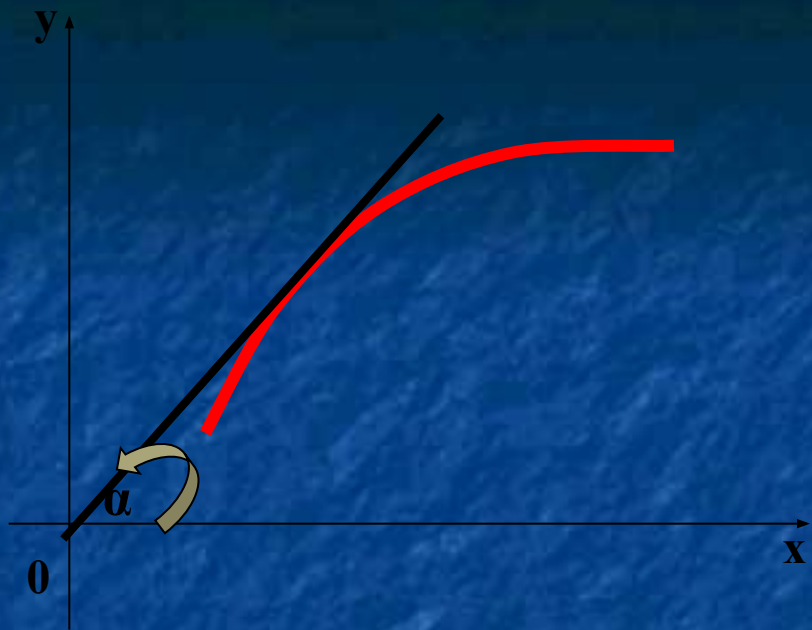


# Достаточное условие убывания функции

Теорема.

Если функция имеет  
неположительную  
производную в каждой точке  
интервала  $(a;b)$ , то функция  $f$   
убывает на интервале  $(a;b)$ .





**Функция возрастает**

$$\alpha < 90^0$$

$$\text{tg } \alpha > 0$$

$$f'(x) > 0$$



**Функция убывает**

$$\alpha > 90^0$$

$$\text{tg } \alpha < 0$$

$$f'(x) < 0$$



# *Правило нахождения интервалов монотонности*

1) Вычисляем производную  $f'(x)$  данной функции  $f(x)$ , а затем находим точки, в которых  $f'(x)$  равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции  $f(x)$



# *Правило нахождения интервалов монотонности*

2) Критическими точками область определения функции  $f(x)$  разбивается на интервалы, на каждом из которых производная  $f'(x)$  сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.



# Правило нахождения интервалов монотонности

3) Определим знак  $f'(x)$  на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале  $f'(x) \geq 0$ , то на этом интервале  $f(x)$  возрастает, если же  $f'(x) \leq 0$ , то на таком интервале  $f(x)$  убывает.



# Исследование экстремумов функции

Необходимое условие экстремума.

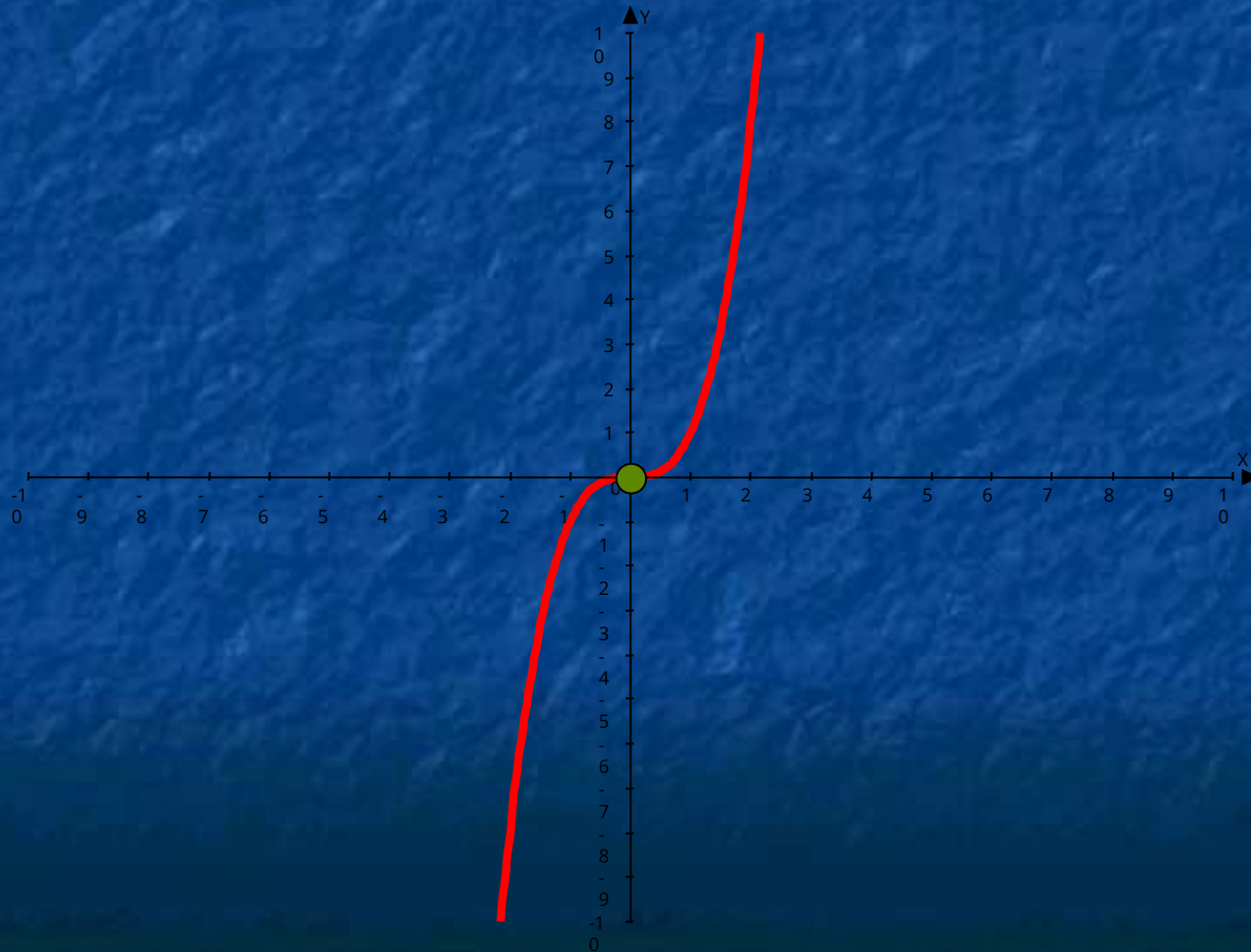
(теорема Ферма)

Если точка  $x_0$  является точкой экстремума функции  $f$  и в этой точке существует производная  $f'(x)$ , то она равна нулю:

$$f'(x) = 0.$$

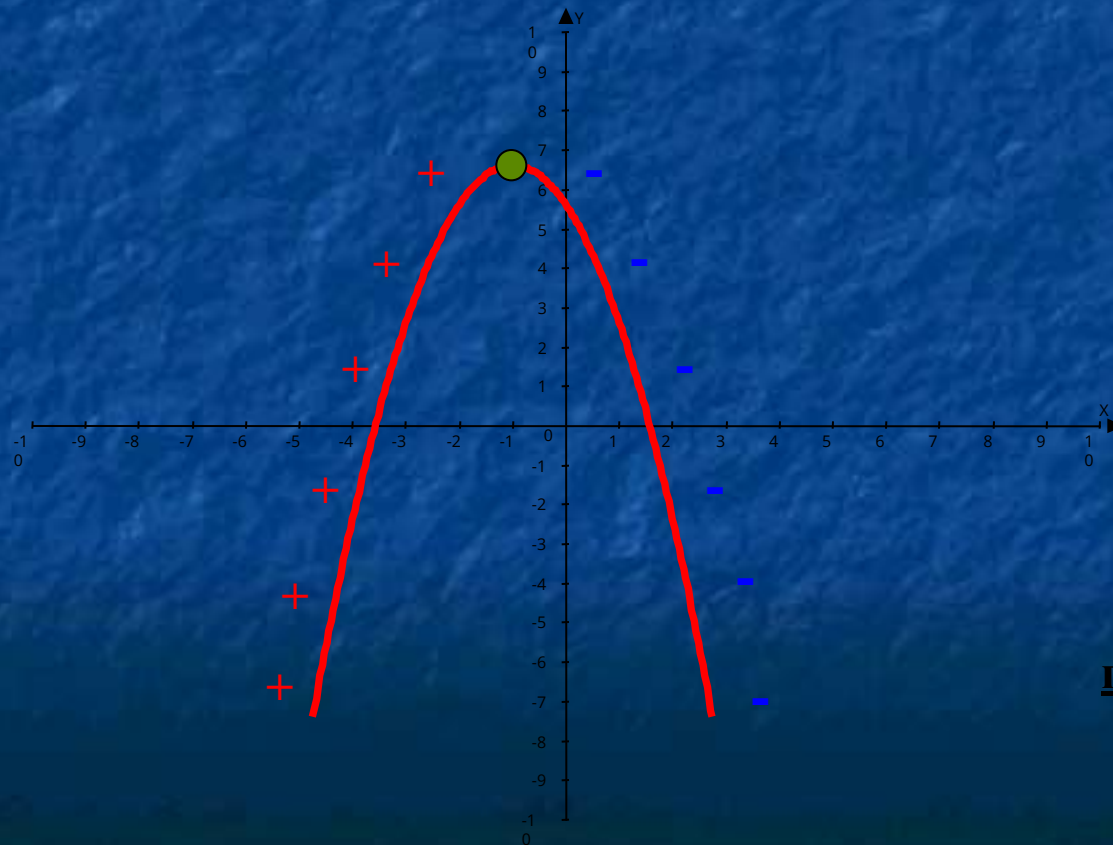


Теорема Ферма лишь необходимое условие экстремума. Например, производная функции  $f(x) = x^3$  обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет.



# Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак максимума функции. Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , а  $f'(x) > 0$  на интервале  $(a; x_0)$ , и  $f'(x) < 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой максимума функции  $f$ .



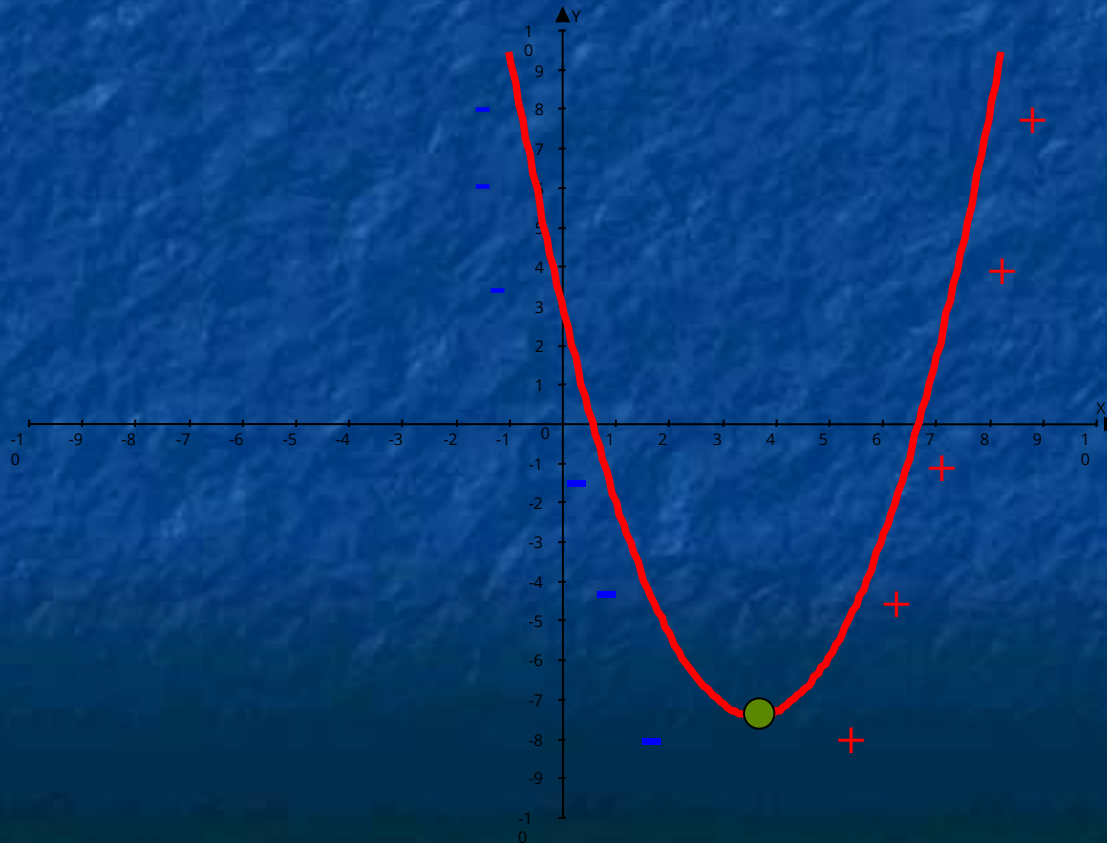
построение





# Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак минимума функции. Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $f'(x) < 0$  на интервале  $(a; x_0)$  и  $f'(x) > 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой минимума функции  $f$



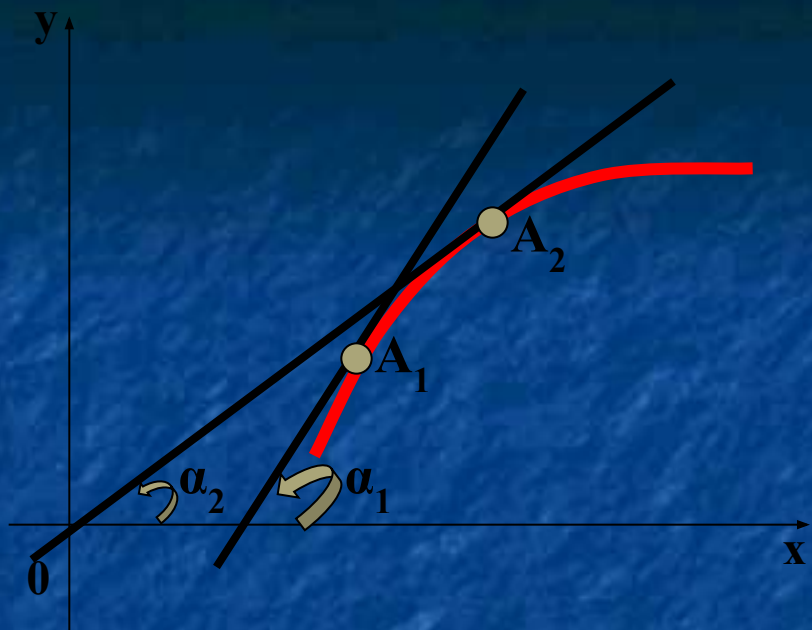
построение



## Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

**Т е о р е м а.** Пусть функция  $f(x)$ ,  $x \in (a;b)$ , имеет первую и вторую производные. Тогда, если  $f''(x) < 0$  для всех  $x \in (a;b)$ , то на интервале  $(a;b)$  график функции  $f(x)$  выпуклый вверх, если же  $f''(x) > 0$  для всех  $x \in (a;b)$ , то график функции  $f(x)$  выпуклый вниз на  $(a;b)$ .





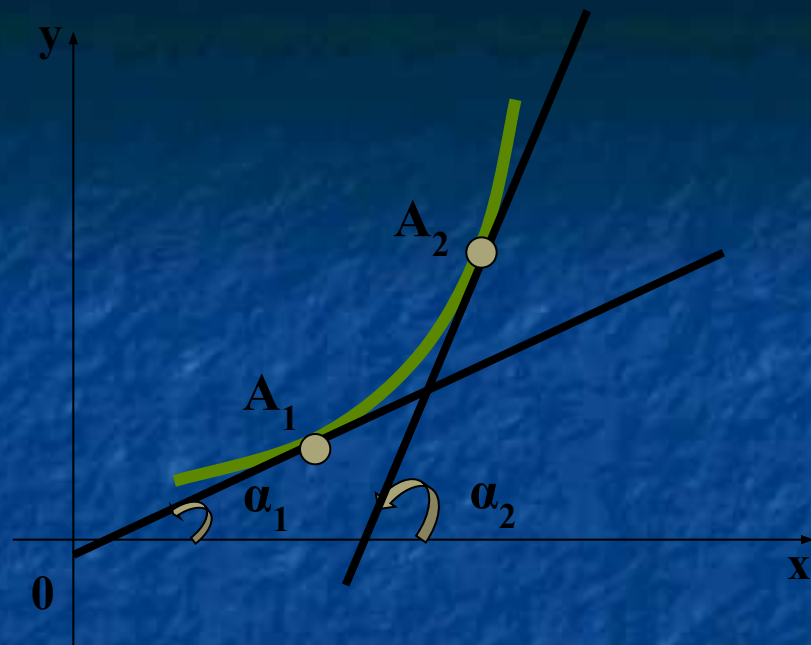
## График вышуклый

$\alpha$  - убывает

$\text{tg } \alpha$  - убывает

$f'(x)$  - убывает

$$f''(x) < 0$$



## График вогнутый

$\alpha$  - возрастает

$\text{tg } \alpha$  - возрастает

$f'(x)$  - возрастает

$$f''(x) > 0$$



# Точки перегиба

- 1) Найти критические точки функции по второй производной.
- 2) Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности критической точки.

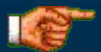
Если  $f''(x)$  меняет свой знак при переходе аргумента через критическую точку  $x_0$ , то  $(x_0; f(x_0))$  - точка перегиба графика данной функции



*II этап. Обобщение и систематизация  
знаний и способов деятельности*

*Задание для всех учащихся.*

**Заполните таблицу**



то у

Имеет

Имеет

Постоянна

Моноotonно  
возрастает

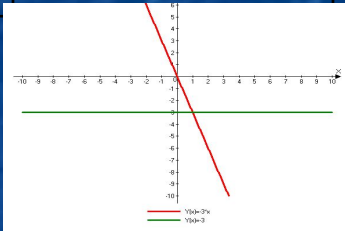
если

Моноotonно  
убывает

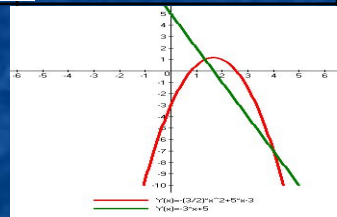
максимум  
во  
внутренней  
точке

минимум  
во  
внутренней  
точке

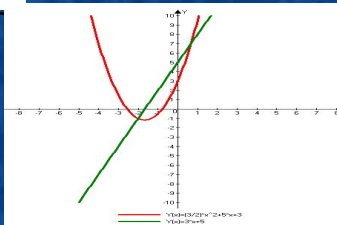
$y' = -3$



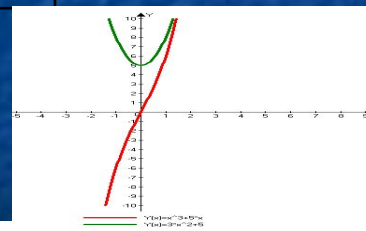
$y' = -3x+5$



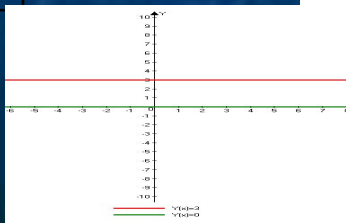
$y' = 3x+5$



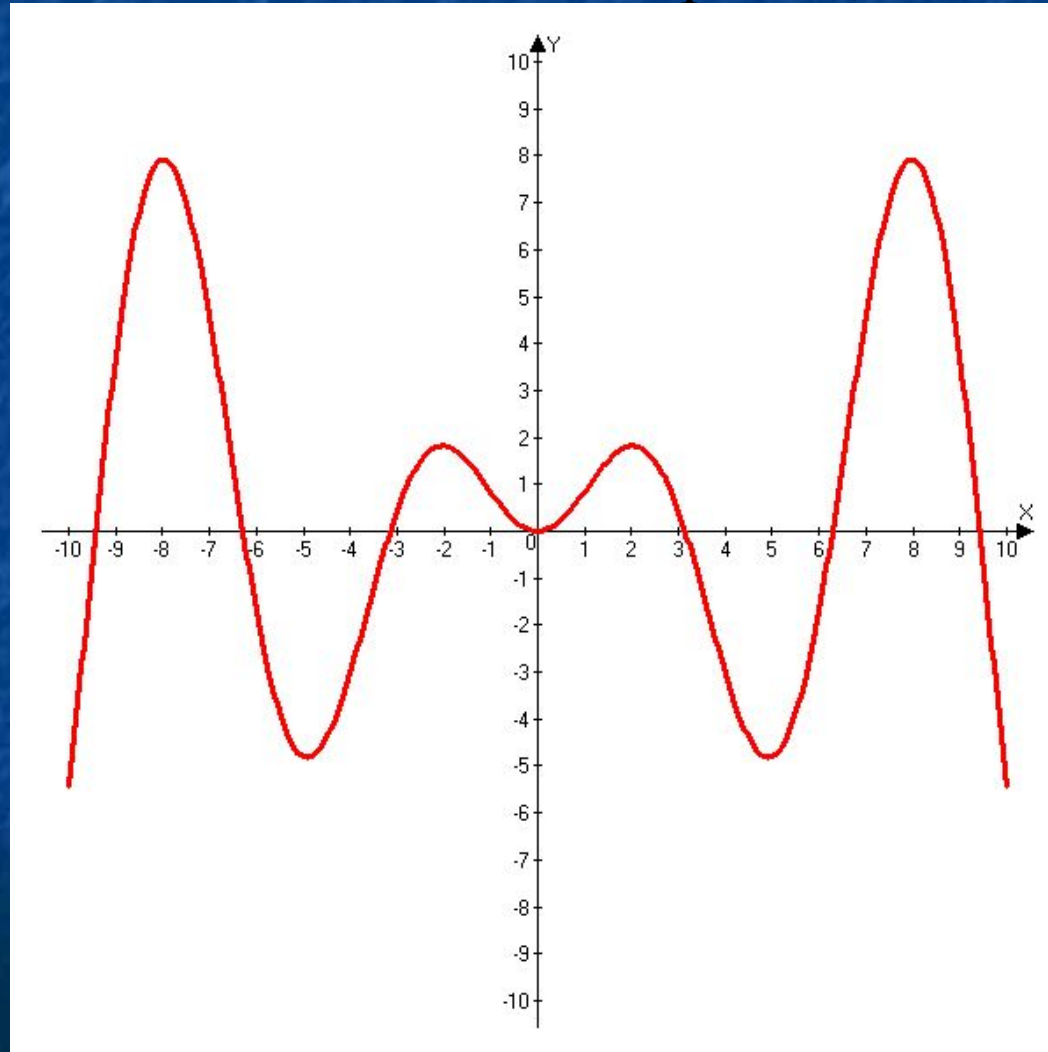
$y' = 3x^2+5$



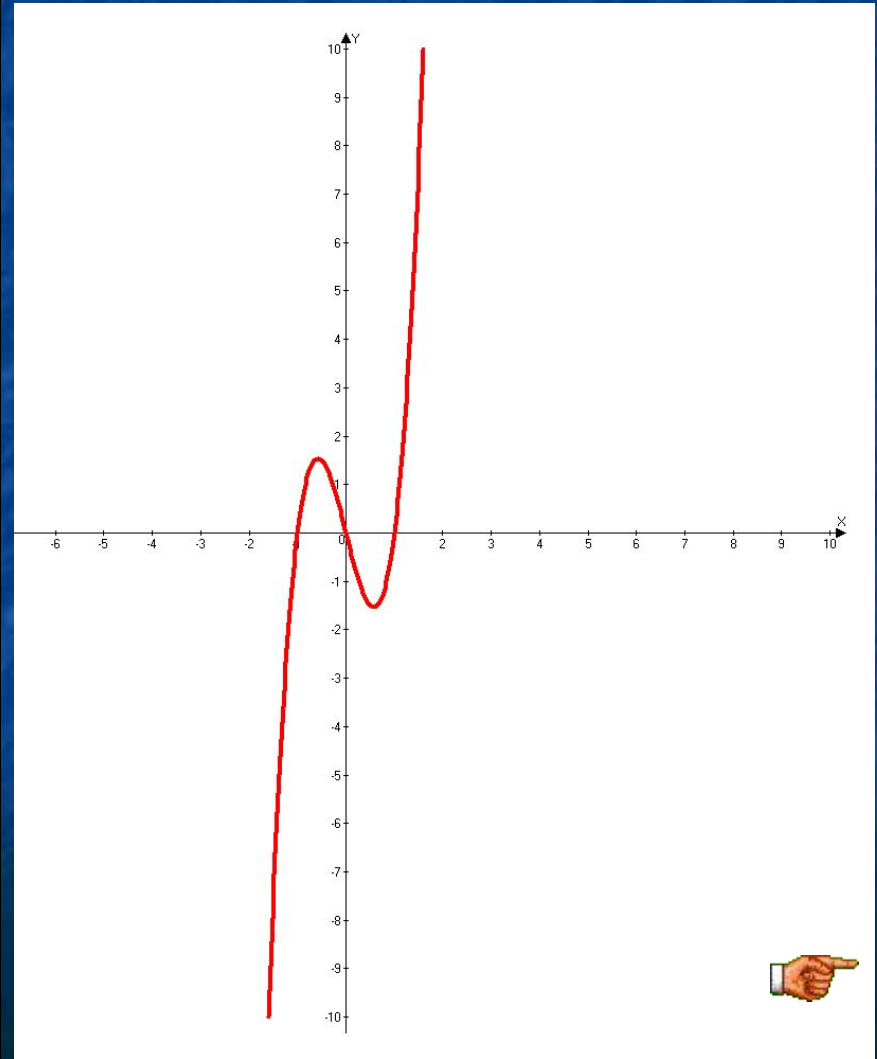
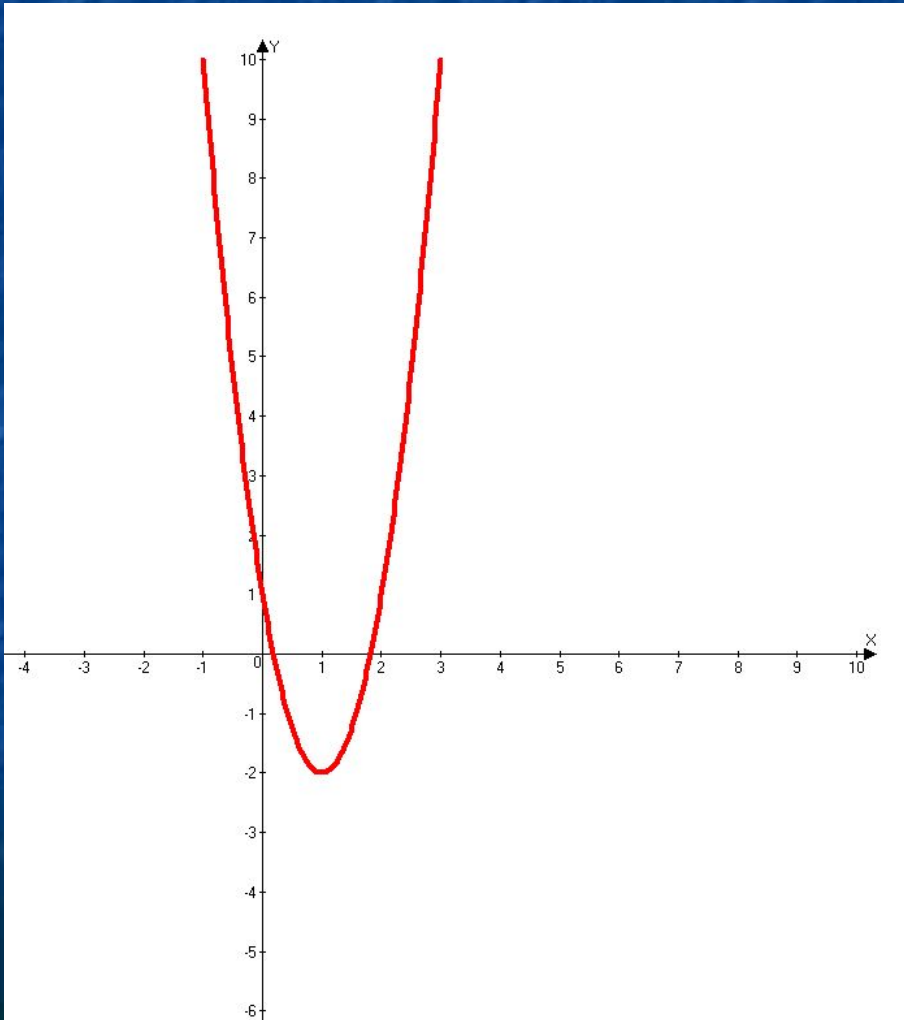
$y' = 0$



№2 По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум, имеет перегиб.,



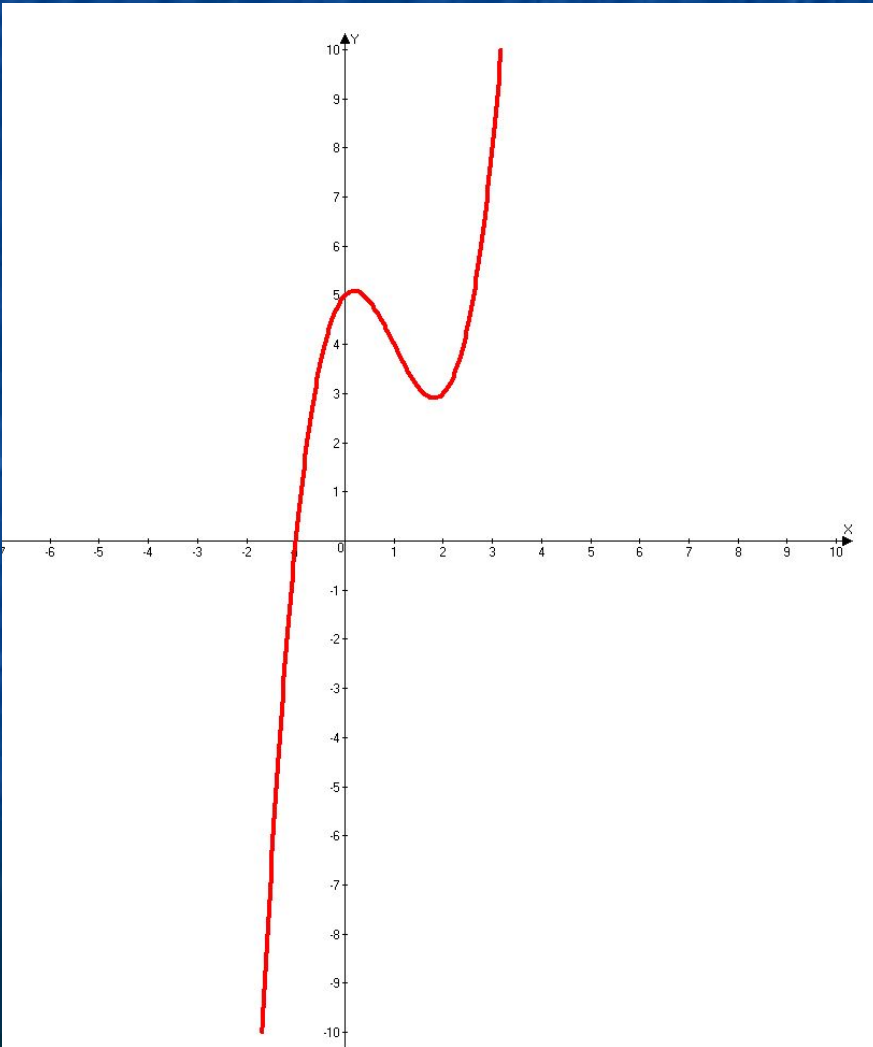
3. На рисунке изображён график производной функции  $y = f(x)$ . Сколько точек максимума имеет эта функция?



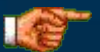
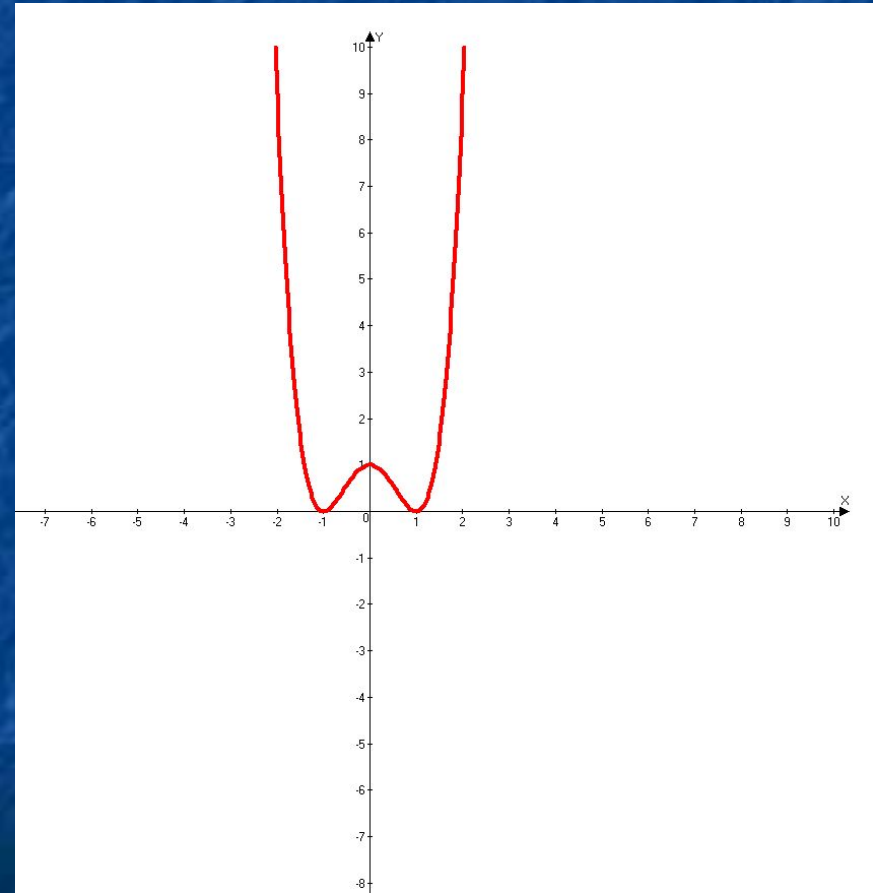


# Отвeты

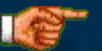
$$y = x^3 - 3x^2 + x + 5$$



$$y = (x^2 - 1)^2$$



*III этап. Усвоение образца комплексного  
применения ЗУН.*



1. Какова область определения функции?

2. Найдите область определения функции.

3. Найдите множество значений функции.

$$y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$$

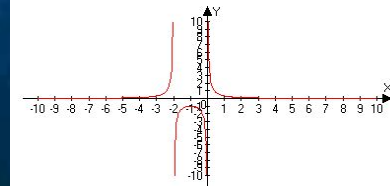
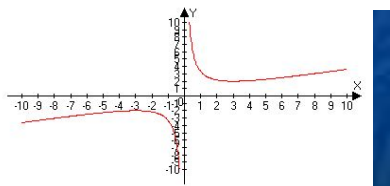
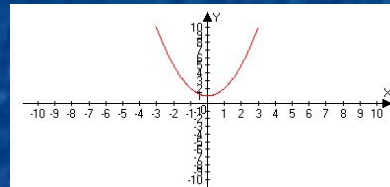
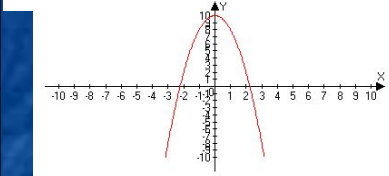
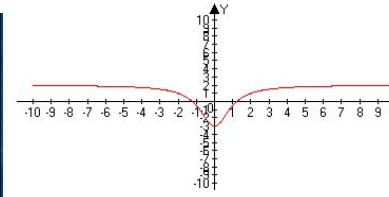
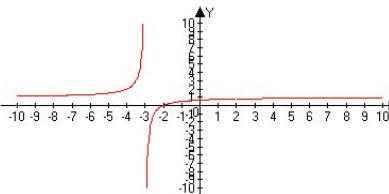
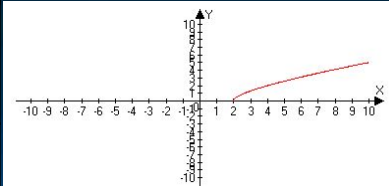
4. Найдите область значений функции.

$$y = \frac{10 - 2x^2}{x^2 + 1}$$

5. В каких точках график функции  $y = x^2 + 1$  пересекает ось абсцисс?

6. Является ли функция чётной или нечётной?

7. Может ли функция обращаться в нуль?



$$y = \frac{x^2 + 9}{3x}$$



$$y = \frac{1}{x^2 + 2x}$$

Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость.

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

*Мини - исследовательская работа*

**Выбери задание**

1. $f(x) = (x+1)^3(x-2)$	3. $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2-x}$	5. $f(x) = x^2 \sqrt{1-2x}$
2. $f(x) = (x+2)^2(x-2)$	4. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x-1}$	6. $f(x) = 4x^2 \sqrt{1-4x}$

Тест

Кроссворд

*Подведение итогов урока.*

## *Домашнее задание*

1. № 45, 41 (устно), 39  
(31)

2. Определите, при  
каком значении  
параметра  $b$  максимум  
функции равен 3?



$$y = \frac{2b - 1}{x^4 + 1}$$

