

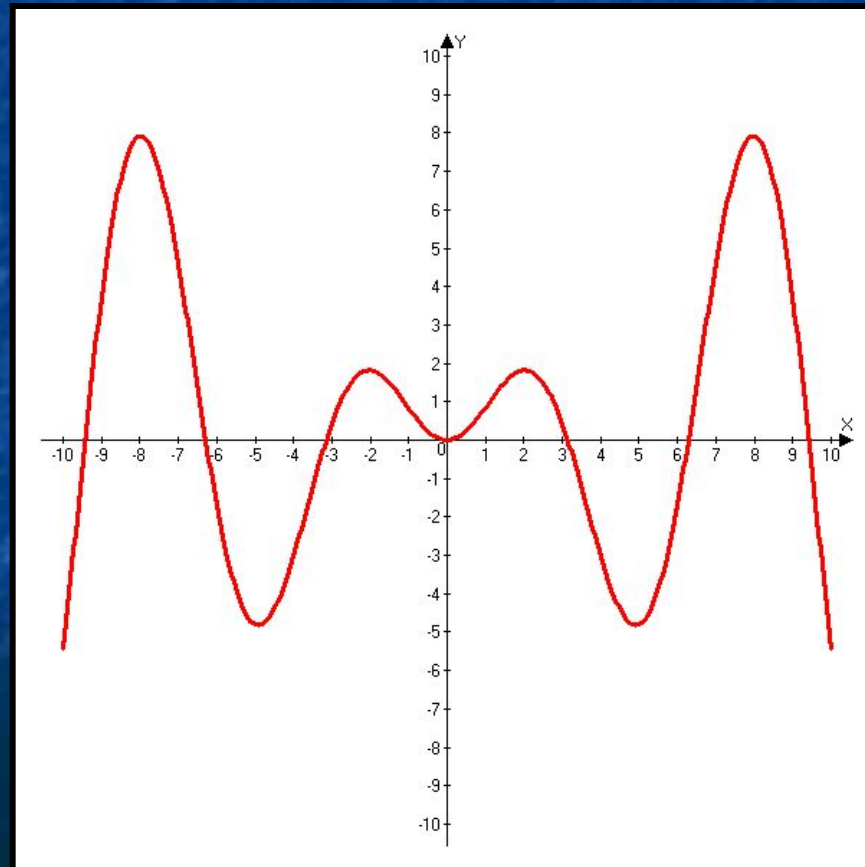
Урок на тему :

«Исследование функции
с помощью производной»
с использованием компьютерных технологий

Учитель математики

Бахтиярова Г.Ф.

Исследование функций и построение графиков с помощью производной



«...нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира...»

Н.И. Лобачевский

Скажи мне, и я забуду.

Покажи мне, и я запомню.

Дай мне действовать самому,

И я научусь.

Конфуций

Цели урока:

□ *Образовательные.*

Формировать:

- - навыки прикладного использования аппарата производной;
- - выявить уровень овладения учащимися комплексом знаний и умений по исследованию функции и ликвидировать пробелы в знаниях в соответствии с требованиями к математической подготовке учащихся.

□ *Развивающие.*

Развивать:

- - способности к самостоятельному планированию и организации работы
- - навыки коррекции собственной деятельности через применение информационных технологий;
- - умение обобщать, абстрагировать и конкретизировать знания при исследовании функции.

□ *Воспитательные.*

Воспитывать:

- - познавательный интерес к математике;
- - информационную культуру и культуру общения;
- - самостоятельность, способность к коллективной работе.

І этап. Актуализация ЗУН, необходимых для творческого применения знаний

- Необходимое условие возрастания и убывания функции
- Достаточное условие возрастания и убывания функции
- Необходимое условие экстремума. (теорема Ферма)
- Признак максимума функции.
- Признак минимума функции.
- Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

Необходимое условие возрастания и убывания функции

Т е о р е м а.

Если дифференцируемая функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, возрастает (убывает) на $(a;b)$, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любого x из интервала $(a;b)$.



Достаточные условия возрастания и убывания функции

Теорема Лагранжа.

Если функция $f(x)$, $x \in [a; b]$,
непрерывна на отрезке $[a; b]$ и
дифференцируема на интервале
 $(a; b)$, то найдётся точка $c \in (a; b)$
такая, что имеет место формула

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$$



Достаточное условие возрастания функции

Теорема.

Если функция f имеет неотрицательную производную в каждой точке интервала $(a;b)$, то функция f возрастает на интервале $(a;b)$.

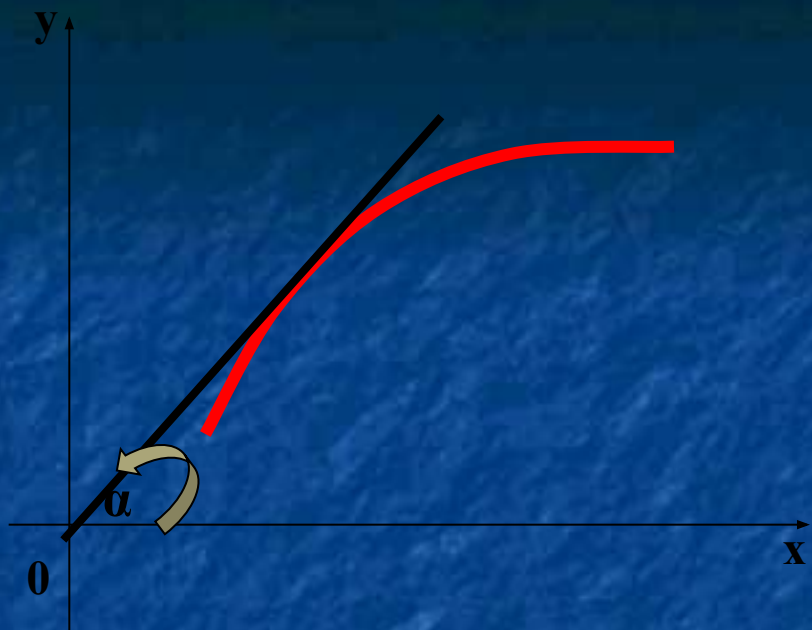


Достаточное условие убывания функции

Теорема.

Если функция имеет
неположительную
производную в каждой точке
интервала $(a;b)$, то функция f
убывает на интервале $(a;b)$.





Функция возрастает

$$\alpha < 90^0$$

$$\text{tg } \alpha > 0$$

$$f'(x) > 0$$



Функция убывает

$$\alpha > 90^0$$

$$\text{tg } \alpha < 0$$

$$f'(x) < 0$$



Правило нахождения интервалов монотонности

1) Вычисляем производную $f'(x)$ данной функции $f(x)$, а затем находим точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции $f(x)$



Правило нахождения интервалов монотонности

2) Критическими точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы будут интервалами монотонности.



Правило нахождения интервалов монотонности

3) Определим знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x) \geq 0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает, если же $f'(x) \leq 0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.



Исследование экстремумов функции

Необходимое условие экстремума.

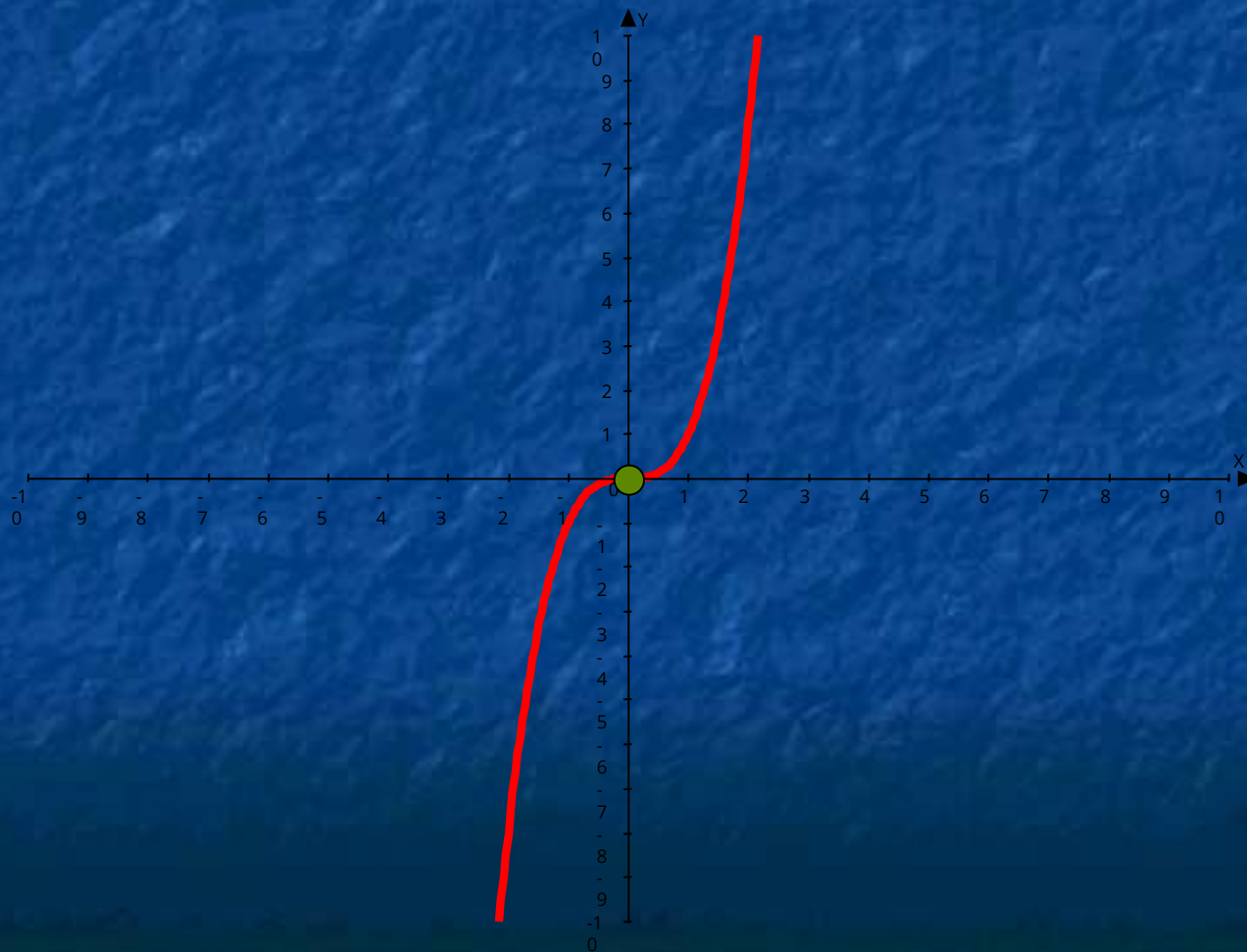
(теорема Ферма)

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная $f'(x)$, то она равна нулю:

$$f'(x) = 0.$$

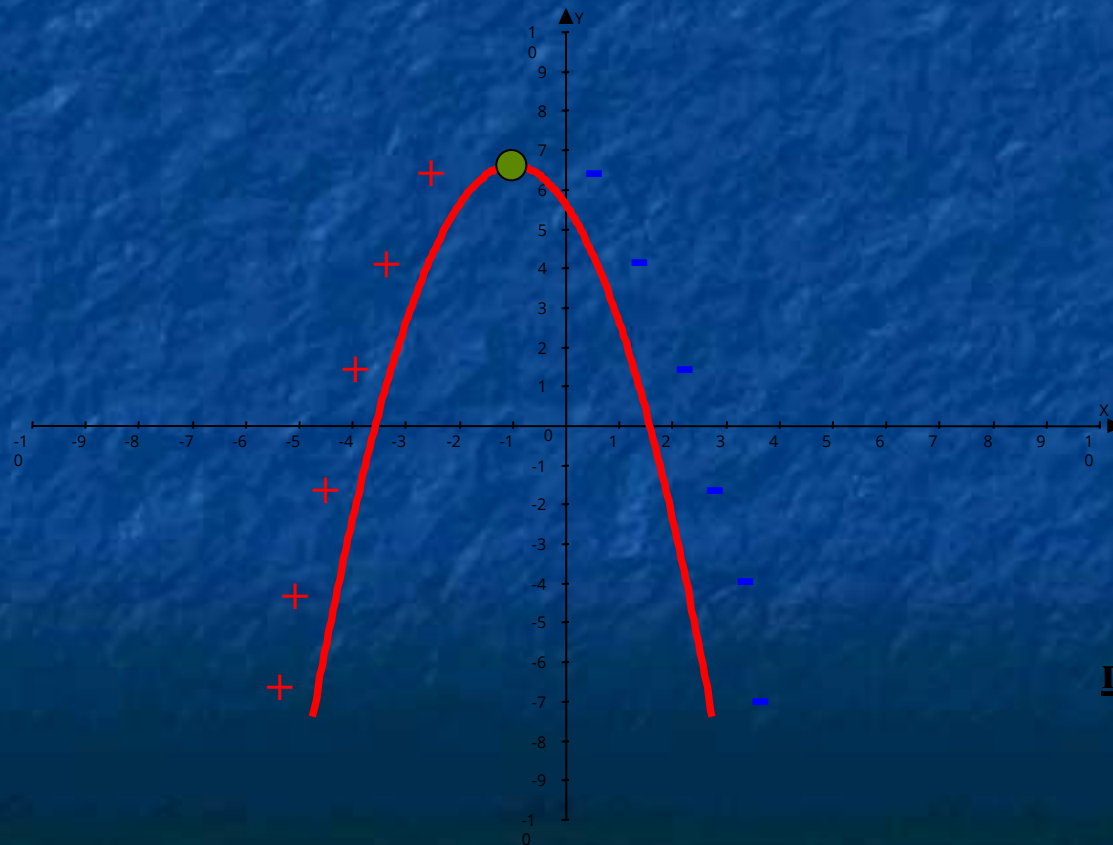


Теорема Ферма лишь необходимое условие экстремума. Например, производная функции $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет.



Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой максимума функции f .

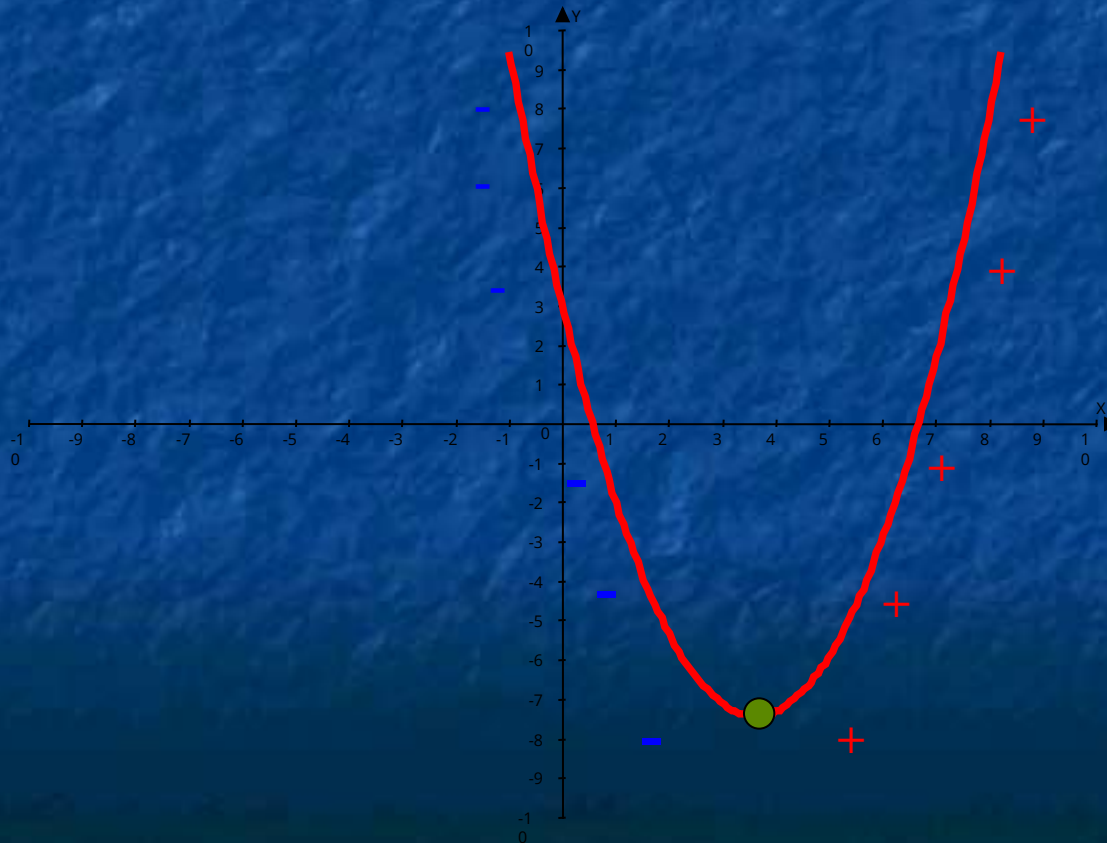


построение



Достаточные условия существования экстремума в точке

- Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой минимума функции f



построение



Достаточные условия выпуклости и вогнутости графика функции

Т е о р е м а. Пусть функция $f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет первую и вторую производные. Тогда, если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a;b)$, то на интервале $(a;b)$ график функции $f(x)$ выпуклый вверх, если же $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, то график функции $f(x)$ выпуклый вниз на $(a;b)$.



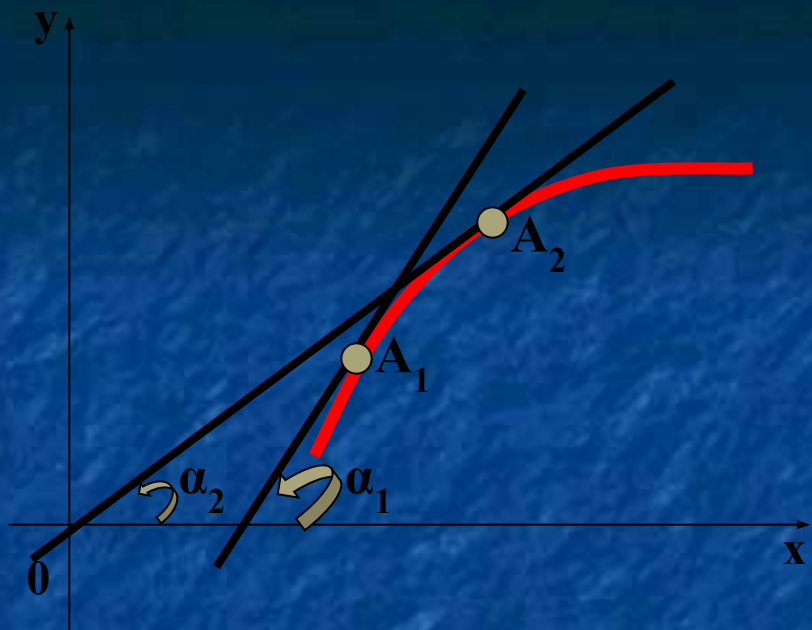


График вышуклый

α - убывает

$\text{tg } \alpha$ - убывает

$f'(x)$ - убывает

$$f''(x) < 0$$

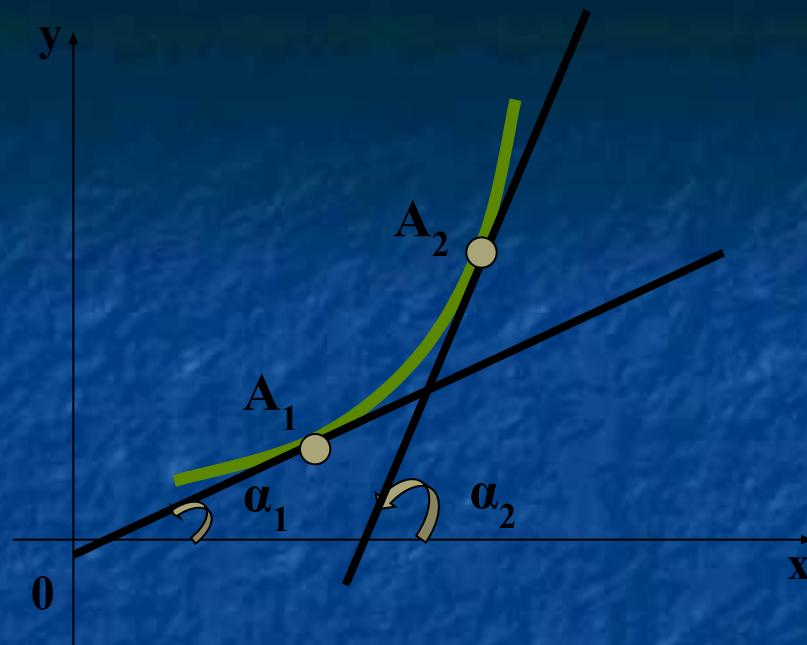


График вогнутый

α - возрастает

$\text{tg } \alpha$ - возрастает

$f'(x)$ - возрастает

$$f''(x) > 0$$



Точки перегиба

- 1) Найти критические точки функции по второй производной.
- 2) Исследовать знак второй производной в некоторой окрестности критической точки.

Если $f''(x)$ меняет свой знак при переходе аргумента через критическую точку x_0 , то $(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба графика данной функции



*II этап. Обобщение и систематизация
знаний и способов деятельности*

Задание для всех учащихся.

Заполните таблицу



то у

Имеет

Имеет

Постоянна

Моноotonно
возрастает

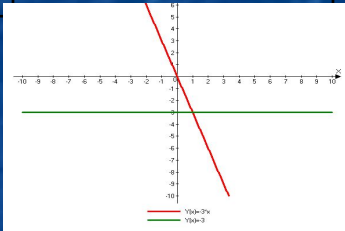
если

Моноotonно
убывает

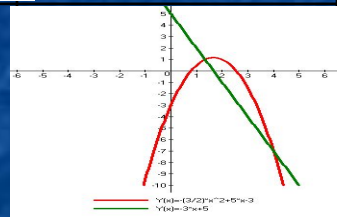
максимум
во
внутренней
точке

минимум
во
внутренней
точке

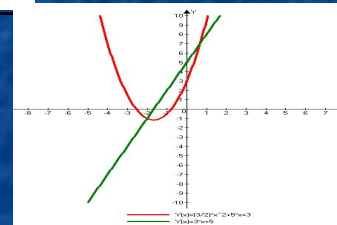
$$y' = -3$$



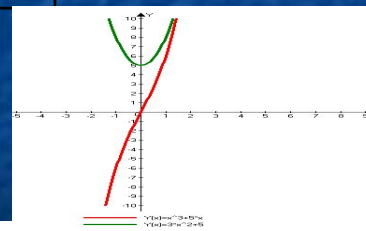
$$y' = -3x+5$$



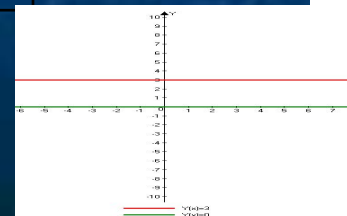
$$y' = 3x+5$$



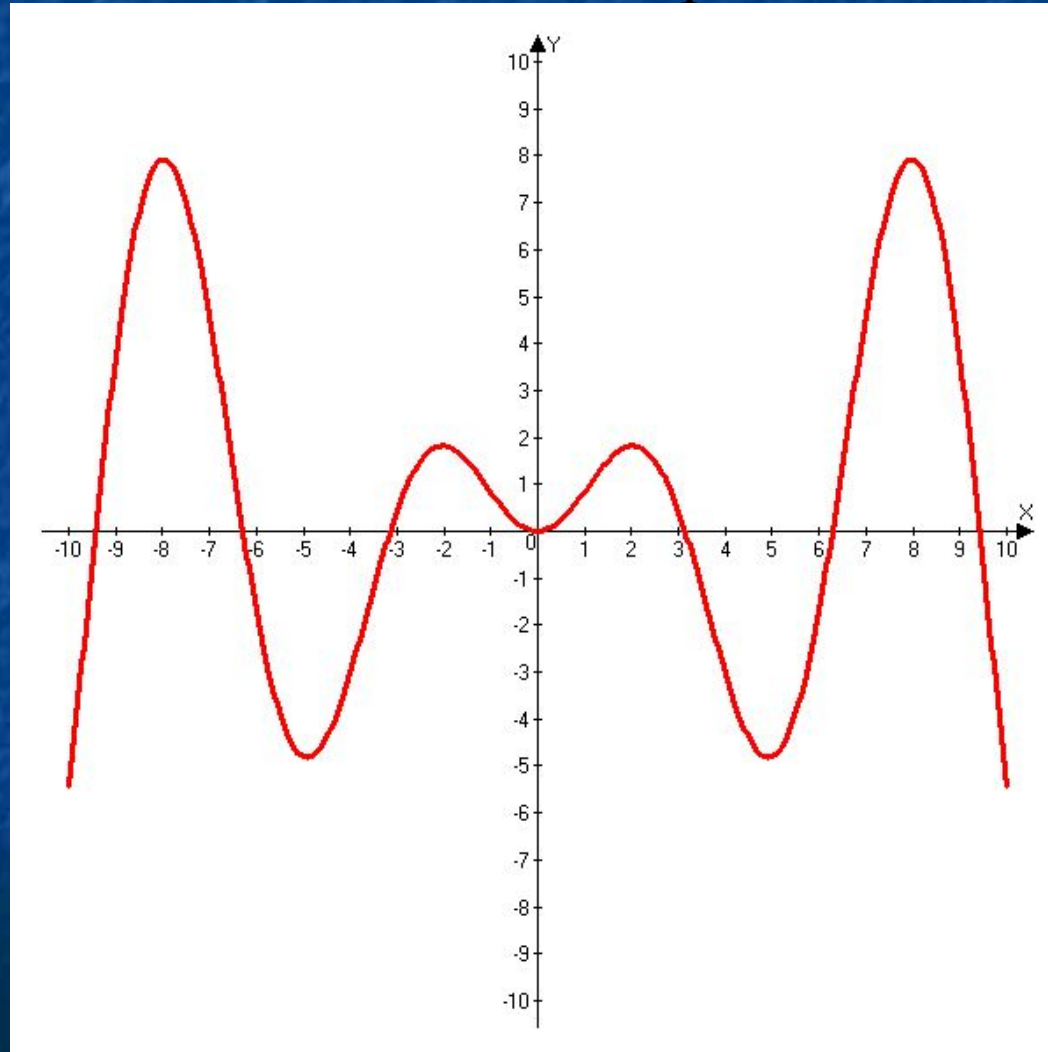
$$y' = 3x^2+5$$



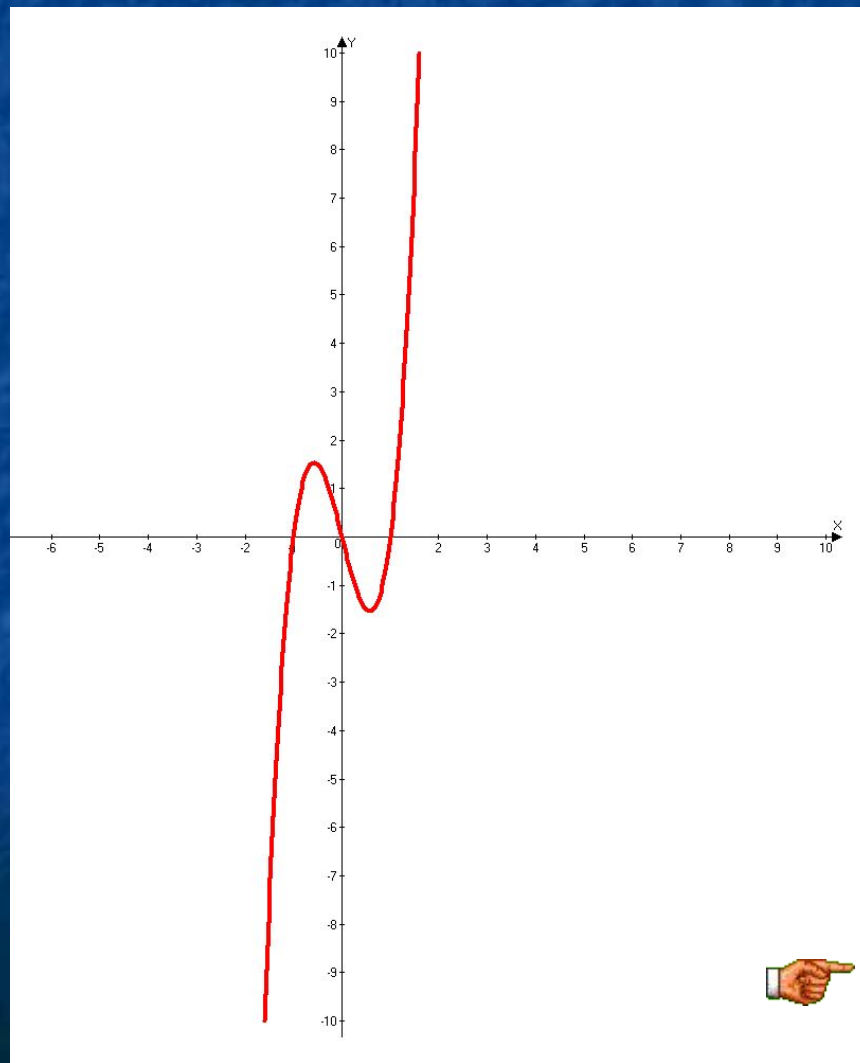
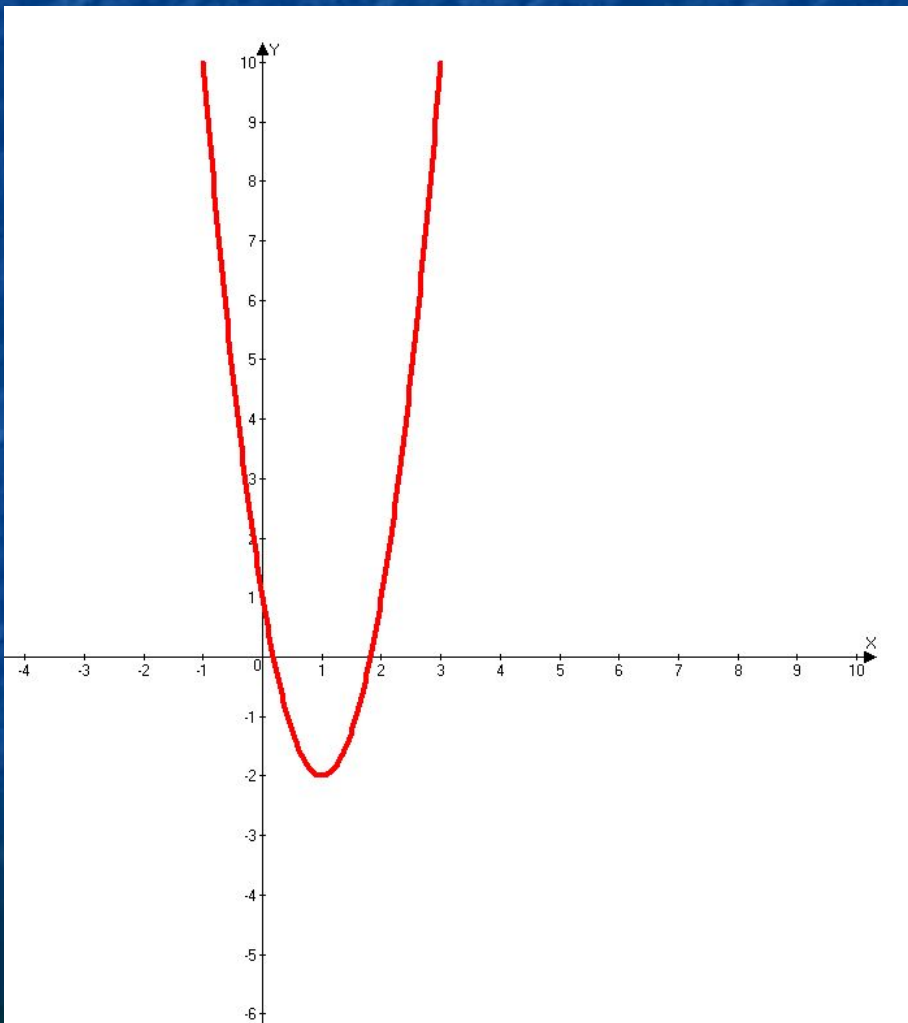
$$y' = 0$$



№2 По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум, имеет перегиб.,

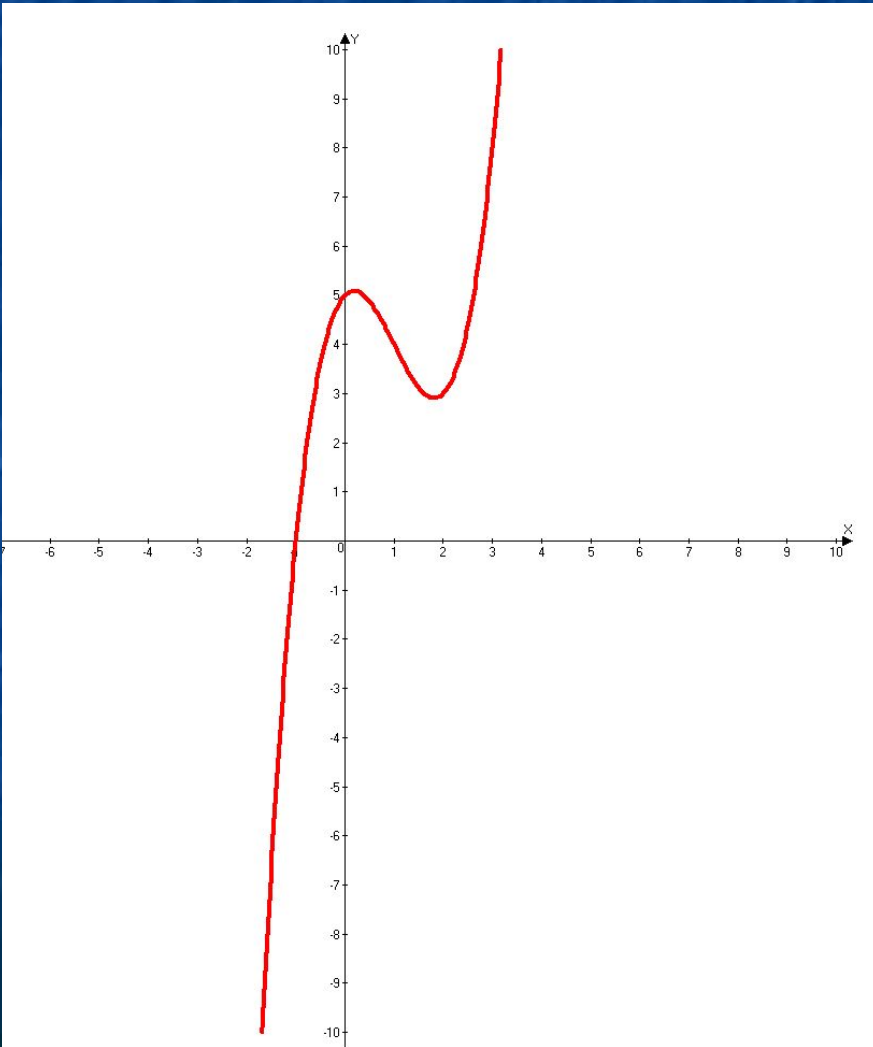


3. На рисунке изображён график производной функции $y = f(x)$. Сколько точек максимума имеет эта функция?

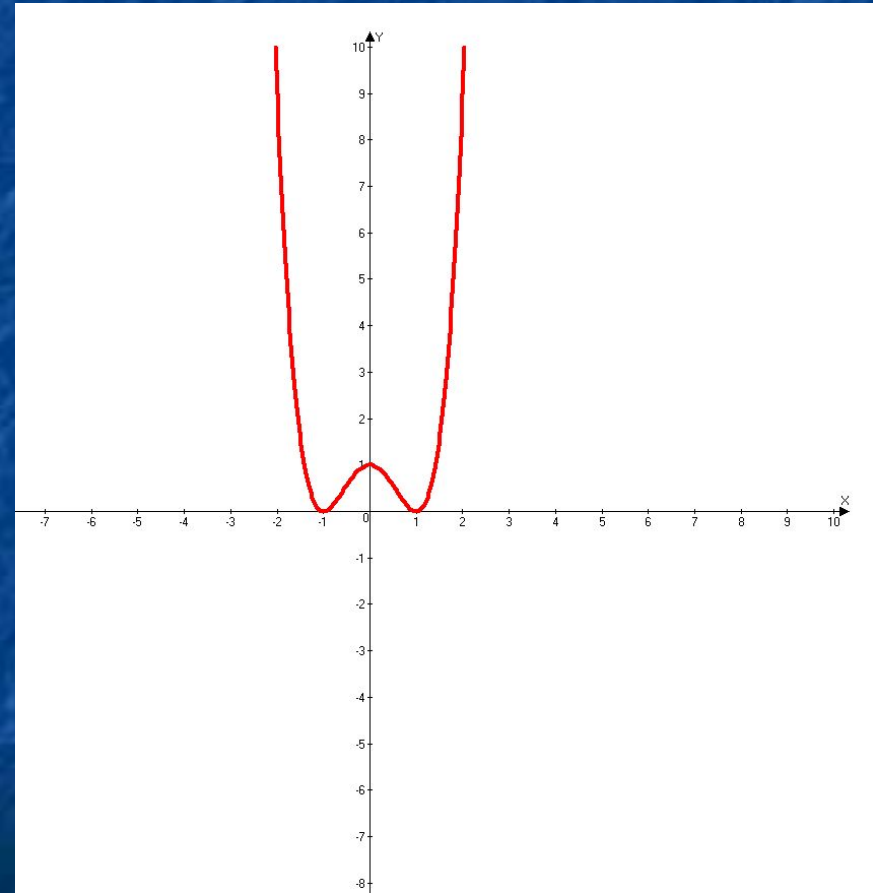


Ответы

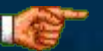
$$y = x^3 - 3x^2 + x + 5$$



$$y = (x^2 - 1)^2$$



*III этап. Усвоение образца комплексного
применения ЗУН.*



1. Какова область определения функции?

2. Найдите область определения функции.

3. Найдите множество значений функции.

$$y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$$

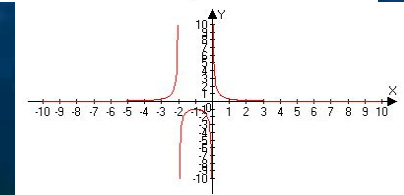
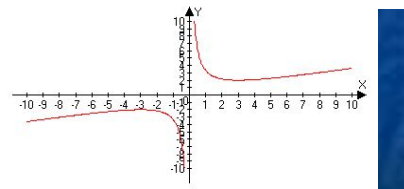
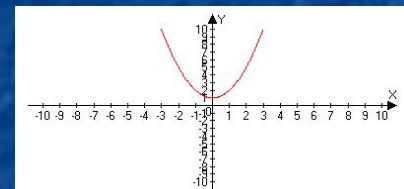
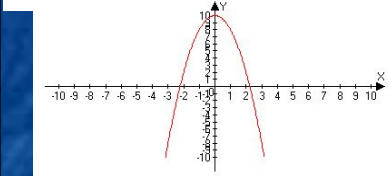
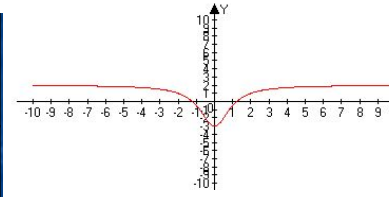
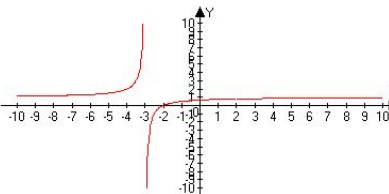
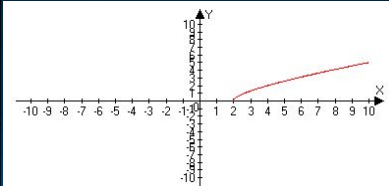
4. Найдите область значений функции.

$$y = \frac{10 - 2x^2}{x^2 + 1}$$

5. В каких точках график функции $y = x^2 + 1$ пересекает ось абсцисс?

6. Является ли функция чётной или нечётной?

7. Может ли функция обращаться в нуль?



$$y = \frac{x^2 + 9}{3x}$$



$$y = \frac{1}{x^2 + 2x}$$

Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость.

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Мини - исследовательская работа

Выбери задание

1. $f(x) = (x+1)^3(x-2)$	3. $f(x) = \frac{x^2 + 5}{2-x}$	5. $f(x) = x^2 \sqrt{1-2x}$
2. $f(x) = (x+2)^2(x-2)$	4. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x-1}$	6. $f(x) = 4x^2 \sqrt{1-4x}$

Тест

Кроссворд

Подведение итогов урока.

Домашнее задание

1. № 45, 41 (устно), 39
(31)

2. Определите, при
каком значении
параметра b максимум
функции равен 3?



$$y = \frac{2b - 1}{x^4 + 1}$$

