

Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра функционально анализа

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Мукосей Ольга Ивановна





- Руководитель:
кандидат физ - мат. наук,
доцент кафедры
функционального
анализа
Мазель Майя Хаимовна



Содержание

1. Актуальность.
2. Поставленные цели и задачи.
3. Содержание методического пособия.
4. Примеры.



Актуальность



- существует необходимость обновить ранее используемые лабораторные работы, увеличить количество задач по каждой теме, предложить дополнительные задачи.



Цель



- подготовка материала для нового издания методического пособия по лабораторным и практическим занятиям по курсу функционального анализа и интегральных уравнений, часть 1.



Задача



- состояла не просто в подборе любых задач, а таких, которые хорошо решаются и имеют не огромные вычисления.



Содержание методического пособия

- Работа состоит из трех частей



Часть 1



Излагается необходимая теория, которая носит справочный характер, т.е. определения, теоремы и следствия из них прописаны без доказательств.

Вся теория разбита на главы, а главы на параграфы. Каждый параграф относится к одной из лабораторных. К какой именно, видно из названий параграфов. Это облегчает поиск необходимой теории для каждой лабораторной в отдельности.



Часть 2

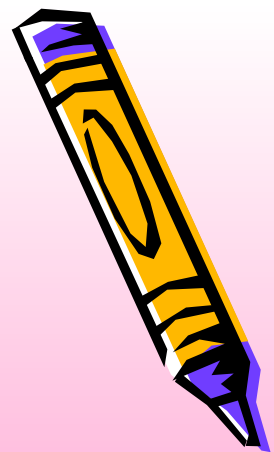


- Приведены задачи к 6 лабораторным и 3 практическим занятиям по темам «ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА».

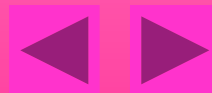


- В начале каждой лабораторной и практической работы приведены вопросы к математическому диктанту.

Это теория, которой необходимо владеть для решения заданий, а также для успешного освоения курса в целом.



В конце каждой лабораторной
есть дополнительные задания, в которых
надо что-то доказать, привести пример,
контр пример либо решить.
Эти задачи разноуровневые: от легких до
повышенной сложности. Они
предназначены для интересующихся
курсом студентов, а также могут
использоваться в качестве
дополнительных задач на экзамене.



Часть 3



- В каждой лабораторной из каждого задания выбраны по одной наиболее сложной задаче и приведены их решения.



Примеры



- 1. Доказать, что множество является борелевским.

Решение.

Рассмотрим множество

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{r_k > 0, r_k \in \mathbb{R}} \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r_k\} \cup \{0, 0\}$$





- Множество $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r_k\}$ является замкнутым в \mathbb{R}^2 , следовательно, оно борелевское. Так как борелевская σ -алгебра на прямой замкнута относительно счетного объединения, то множество B также борелевское. Так как $A = \mathbb{R}^2 \setminus B$, то оно тоже борелевское.



Примеры



- 2. Пусть $X = [-1, 2[$, $S = \{[a, b[\subset X\}$, $m([a, b[) = F(b) - F(a)$,

где

$$F(t) = \begin{cases} t, & t \in [-1, 1[, \\ \alpha, & t = 1, \\ 2, & t \in]1, 2]. \end{cases}$$

При каких значениях параметра α эта формула задает меру, σ -аддитивную меру? Если мера не является σ -аддитивной, то указать полуинтервал A и его разбиение $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$ такое, что $m(A) \neq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$.

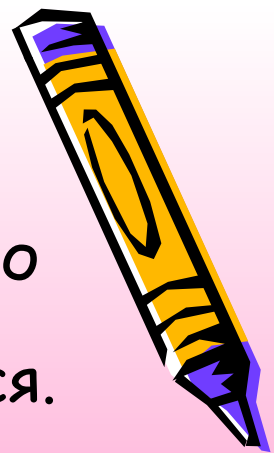


Решение.

Так как функция F ограничена на множестве X , то m является отображением S в \mathbb{R} . Аксиома аддитивности в определении меры выполняется. Возьмем произвольный полуинтервал

$$[a, b[= [a, c[\cup [c, b[, \text{ тогда } m([a, b[) = F(b) - F(a) , \\ m([a, c[) + m([c, b[) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = m([a, b[) .$$

Для выполнения второй аксиомы в определении меры необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $F(b) - F(a) \geq 0$, если $b \geq a$, т.е., чтобы функция F была монотонно возрастающей. Функция F монотонно возрастает, если $\alpha \in [1, 2]$. Итак, функция F порождает меру при $\alpha \in [1, 2]$.

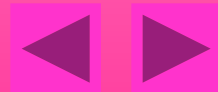


По теореме о σ -аддитивности меры Лебега-Стилтьеса: F порождает σ -аддитивную меру тогда и только тогда, когда функция F является непрерывной слева в каждой точке. Это условие выполняется только при $\alpha = 1$. Пусть $\alpha \in]1, 2]$

и $A = [\frac{1}{2}, 1[$. Рассмотрим последовательность

$a_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Представим полуинтервал

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \text{ где } A_k = [a_k, a_{k+1}[.$$





• Тогда $m(A) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha - \frac{1}{2}$,
 $m(A_k) = F(a_{k+1}) - F(a_k) = \frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1}$; $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1} \right)$.

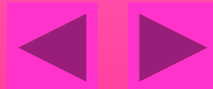
Вычислим сумму ряда по определению:

$$S_n = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \dots + \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2} ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

Итак, мы получили, что

$$m(A) = \alpha - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) , \text{ если } \alpha \in]1, 2] .$$



Спасибо
за внимание!

