Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра функционально анализа

ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Мукосей Ольга Ивановна

- Руководитель:

  кандидат физ - мат. наук, доцент кафедры функционального анализа

  Мазель Майя Хаимовна

Содержание

1. Актуальность.
2. Поставленные цели и задачи.
3. Содержание методического пособия.
4. Примеры.

Актуальность

- существует необходимость обновить ранее используемые лабораторные работы, увеличить количество задач по каждой теме, предложить дополнительные задачи.

Цель

- подготовка материала для нового издания методического пособия по лабораторным и практическим занятиям по курсу функционального анализа и интегральных уравнений, часть 1.

Задача

- состояла не просто в подборе любых задач, а таких, которые хорошо решаются и имеют не огромные вычисления.

Содержание методического пособия

- Рабата состоит из трех частей

Часть 1

Излагается необходимая теория, которая носит справочный характер, т.е определения, теоремы и следствия из них прописаны без доказательств.

Вся теория разбита на главы, а главы на параграфы. Каждый параграф относится к одной из лабораторных. К какой именно, видно из названий параграфов. Это облегчает поиск необходимой теории для каждой лабораторной в отдельности.

Часть 2

- Приведены задачи к 6 лабораторным и 3 практическим занятиям по темам «ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА».

- В начале каждой лабораторной и практической работы приведены вопросы к математическому диктанту.

  Это теория, которой необходимо владеть для решения заданий, а также для успешного освоения курса в целом.

В конце каждой лабораторной есть дополнительные задания, в которых надо что-то доказать, привести пример, контр пример либо решить.

Эти задачи разноуровневые: от легких до повышенной сложности. Они предназначены для интересующихся курсом студентов, а также могут использоваться в качестве дополнительных задач на экзамене.

Часть 3

- В каждой лабораторной из каждого задания выбраны по одной наиболее сложной задаче и приведены их решения.

Примеры

- 1. Доказать, что множество является борелевским.

Решение.

Рассмотрим множество

$$B=\mathbb{R}^{2}\setminus A=\{(x,y)\mid x^{2}+y^{2}\in \mathbb{Q}\}=\bigcup_{r_k>0,\,r_k\in\mathbb{Q}}\{(x,y)\mid x^{2}+y^{2}=r_k\}\cup\{0,0\}$$

- Множество $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = r_k\}$ является замкнутым в $\mathbb{R}^2$, следовательно, оно борелевское. Так как борелевская σ - алгебра на прямой замкнута относительно счетного объединения, то множество B также борелевское. Так как $A = \mathbb{R}^2 \setminus B$, то оно тоже борелевское.

Примеры

- 2. Пусть $X = [-1, 2[, S = \{[a, b[\subset X\}, m([a, b[) = F(b) - F(a)$,
  где

$$F(t) = \begin{cases} t,\ t \in [-1, 1[, \\ \alpha,\ t = 1, \\ 2,\ t \in]1, 2]. \end{cases}$$

При каких значениях параметра α эта формула задает меру, σ- аддитивную меру? Если мера не является σ-аддитивной, то указать полуинтервал А и его разбиение $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ такое, что $m(A) \neq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$.

Решение.

Так как функция F ограничена на множестве X,то m является отображением S в $\mathbb{R}$. Аксиома аддитивности в определении меры выполняется. Возьмем произвольный полуинтервал $[a,b[=[a,c[\cup[c,b[$, тогда $m([a,b[)=F(b)-F(a)$,

$m([a,c[)+m([c,b[)=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)=m([a,b[)$.

Для выполнения второй аксиомы в определении меры необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $F(b)-F(a)\geq 0$, если $b\geq a$, т.е., чтобы функция F была монотонно возрастающей. Функция F монотонно возрастает, если $\alpha\in[1,2]$. Итак, функция F порождает меру при $\alpha\in[1,2]$.

По теореме о σ-аддитивности меры Лебега-Стилтьеса: F порождает σ-аддитивную меру тогда и только тогда, когда функция F является непрерывной слева в каждой точке. Это условие выполняется только при $\alpha = 1$. Пусть $\alpha \in]1,2]$

и $A = [\frac{1}{2}, 1[$. Рассмотрим последовательность

$a_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$. Представим полуинтервал

$A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, **где** $A_k = [a_k, a_{k+1}[$.

- Тогда $m(A) = F(1) - F(\frac{1}{2}) = \alpha - \frac{1}{2}$,

$m(A_k) = F(a_{k+1}) - F(a_k) = \frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1}$; $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1}\right)$.

Вычислим сумму ряда по определению:

$$S_n = (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) + (\frac{3}{4} - \frac{2}{3}) + \ldots + (\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}) = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, мы получили, что

$m(A) = \alpha - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, если $\alpha \in]1, 2]$.

Спасибо

за внимание!