



Белорусский государственный университет  
Механико-математический факультет  
Кафедра функционально анализа

# ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Мукосей Ольга Ивановна





- Руководитель:  
кандидат физ - мат. наук,  
доцент кафедры  
функционального  
анализа  
Мазель Майя Хаимовна



# Содержание

1. Актуальность.
2. Поставленные цели и задачи.
3. Содержание методического пособия.
4. Примеры.



# Актуальность



- существует необходимость обновить ранее используемые лабораторные работы, увеличить количество задач по каждой теме, предложить дополнительные задачи.



# Цель



- подготовка материала для нового издания методического пособия по лабораторным и практическим занятиям по курсу функционального анализа и интегральных уравнений, часть 1.



# Задача



- состояла не просто в подборе любых задач, а таких, которые хорошо решаются и имеют не огромные вычисления.



# Содержание методического пособия

- Работа состоит из трех частей



# Часть 1



Излагается необходимая теория, которая носит справочный характер, т.е. определения, теоремы и следствия из них прописаны без доказательств.

Вся теория разбита на главы, а главы на параграфы. Каждый параграф относится к одной из лабораторных. К какой именно, видно из названий параграфов. Это облегчает поиск необходимой теории для каждой лабораторной в отдельности.





# Часть 2

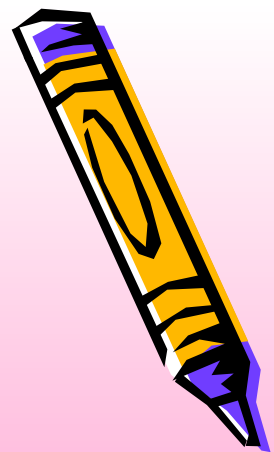


- Приведены задачи к 6 лабораторным и 3 практическим занятиям по темам «ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА».



- В начале каждой лабораторной и практической работы приведены вопросы к математическому диктанту.

Это теория, которой необходимо владеть для решения заданий, а также для успешного освоения курса в целом.



В конце каждой лабораторной  
есть дополнительные задания, в которых  
надо что-то доказать, привести пример,  
контр пример либо решить.  
Эти задачи разноуровневые: от легких до  
повышенной сложности. Они  
предназначены для интересующихся  
курсом студентов, а также могут  
использоваться в качестве  
дополнительных задач на экзамене.



# Часть 3



- В каждой лабораторной из каждого задания выбраны по одной наиболее сложной задаче и приведены их решения.



# Примеры



- 1. Доказать, что множество является борелевским.

Решение.

Рассмотрим множество

$$B = \mathbb{R}^2 \setminus A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{r_k > 0, r_k \in \mathbb{R}} \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r_k\} \cup \{0, 0\}$$





- Множество  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r_k\}$  является замкнутым в  $\mathbb{R}^2$ , следовательно, оно борелевское. Так как борелевская  $\sigma$ -алгебра на прямой замкнута относительно счетного объединения, то множество  $B$  также борелевское. Так как  $A = \mathbb{R}^2 \setminus B$ , то оно тоже борелевское.



# Примеры



- 2. Пусть  $X = [-1, 2[$ ,  $S = \{[a, b[ \subset X\}$ ,  $m([a, b[) = F(b) - F(a)$  ,

где

$$F(t) = \begin{cases} t, & t \in [-1, 1[, \\ \alpha, & t = 1, \\ 2, & t \in ]1, 2]. \end{cases}$$

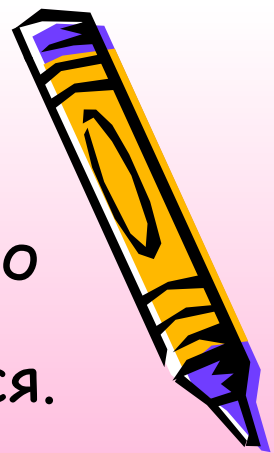
При каких значениях параметра  $\alpha$  эта формула задает меру,  $\sigma$ -аддитивную меру? Если мера не является  $\sigma$ -аддитивной, то указать полуинтервал  $A$  и его разбиение  $A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$  такое, что  $m(A) \neq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$  .



## Решение.

Так как функция  $F$  ограничена на множестве  $X$ , то  $m$  является отображением  $S$  в  $\mathbb{R}$ . Аксиома аддитивности в определении меры выполняется. Возьмем произвольный полуинтервал  $[a, b[ = [a, c[ \cup [c, b[$ , тогда  $m([a, b[) = F(b) - F(a)$ ,  
 $m([a, c[) + m([c, b[) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = m([a, b[)$ .

Для выполнения второй аксиомы в определении меры необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $F(b) - F(a) \geq 0$ , если  $b \geq a$ , т.е., чтобы функция  $F$  была монотонно возрастающей. Функция  $F$  монотонно возрастает, если  $\alpha \in [1, 2]$ . Итак, функция  $F$  порождает меру при  $\alpha \in [1, 2]$ .





По теореме о  $\sigma$ -аддитивности меры Лебега-Стилтьеса:  $F$  порождает  $\sigma$ -аддитивную меру тогда и только тогда, когда функция  $F$  является непрерывной слева в каждой точке. Это условие выполняется только при  $\alpha = 1$ . Пусть  $\alpha \in ]1, 2]$

и  $A = [\frac{1}{2}, 1[$ . Рассмотрим последовательность

$a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . Представим полуинтервал

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, \text{ где } A_k = [a_k, a_{k+1}[.$$





• Тогда  $m(A) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha - \frac{1}{2}$  ,  
 $m(A_k) = F(a_{k+1}) - F(a_k) = \frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1}$  ;  $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1} \right)$  .

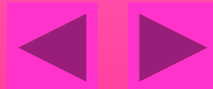
Вычислим сумму ряда по определению:

$$S_n = \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) + \dots + \left( \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right) = \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{2} ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

Итак, мы получили, что

$$m(A) = \alpha - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) , \text{ если } \alpha \in ]1, 2] .$$



Спасибо  
за внимание!

