

Алгебра логики

Сперва хочу Вам в долг вменить
На курсы логики ходить,
Ваш ум, нетронутый доныне,
На них приучат к дисциплине.
Чтоб взял он направленья ось,
Не разбредаясь вкривь и вкось.

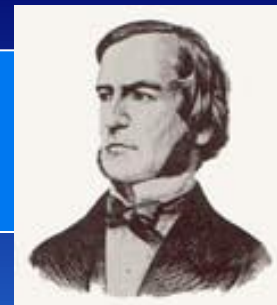
Гёте, «Фауст»



История появления логики

- Построение и анализ логических элементов и схем ЭВМ основываются на применение формального метода математики к области логики
- Основоположником математической логики считают великого немецкого математика **Лейбница**. Это он, в **XVII** веке попытался построить первые логические исчисления. Он сблизил логику с исчислением, усовершенствовал и уточнил логическую символику.
- На фундаменте, заложенном Лейбницем, другой великий математик **Джордж Буль** продолжал изучать логику.

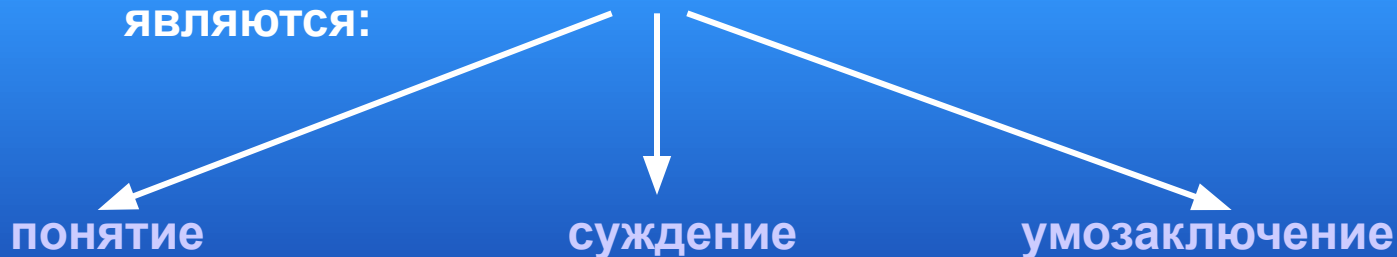
Джордж Буль



- В XIX в. в трудах английского математика Дж. Буля начала формироваться новая область математических знаний - **алгебра логики**, созданная для решения традиционных логических задач алгебраическими методами. Он вывел для логических построений особую алгебру - **алгебру логики**. В ней, в отличие от обычной алгебры, символами обозначают не числа, а высказывания.

Основные формы

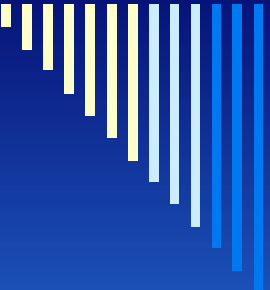
- Слово **ЛОГИКА** означает как совокупность правил, которым подчиняется процесс мышления, так и науку о правилах рассуждений. Логика, как наука о законах и формах мышления изучает абстрактное мышление как средство познания объективного мира.
- Основными формами абстрактного мышления являются:





Логические элементы в ЭВМ

- В основе логических схем и устройств ПК лежит специальный математический аппарат, использующий законы математической логики. Знание логики необходимо:
 - при разработке алгоритмов и программ, так как в большинстве языков программирования есть логические операции;
 - при решении задач (составлении отчетов) с условиями в электронных таблицах;
 - для построения фильтров для запросов в базах данных;
 - для поиска информации в Интернете.



К основным понятиям логики относятся следующие:

- **Высказывание (суждение)** - некоторое предложение, которое может быть *истинно (верно)* или *ложно*. Например, высказывание «Сумма внутренних углов треугольника равна 180° » - истинно, а высказывание «Все углы треугольника - прямые» - ложно.

Истинность или ложность получаемых таким образом высказываний и соответствующей трактовки связок как операций над высказываниями.

Для обозначения истинности водится символ **И** (или **1**), а для обозначения ложности - **Л** (или **0**).



Логические высказывания

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Является ли высказыванием ?

- Птицы летят на север.
- Информатика- интересный предмет.
- Сколько сейчас времени?
- Сейчас идет снег.



Основные понятия логики

- *Конъюнкцией высказываний* (логическим умножением) называется логическая операция, которая принимает значение истинна тогда и только тогда, когда истинны исходные логические выражения. Обозначается $(X \wedge Y)$, читается «X и Y».
- *Дизъюнкцией высказываний* (логическим сложением) называется логическая операция, которая принимает значение истина тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из исходных логических выражений. Обозначается $(X \vee Y)$, читается «X или Y».



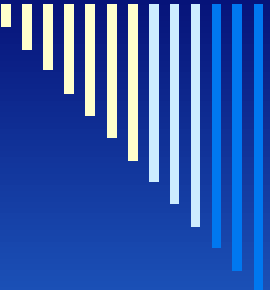
Основные понятия логики

- ▣ *Отрицание или инверсия*, определяется следующим образом если выражение истинно, то результат его отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное выражение ложно, то его отрицание будет истинным. Обозначается ($\neg X$), читается «не X».
- ▣ *Импликацией высказываний (логическое следование)* называется логическая операция, которая принимает значение ложь тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно. Обозначается ($X \Rightarrow Y$), читается «Если X, то Y».



Основные понятия логики

- ▣ **Эквивалентность высказываний** называется логическая операция, которая принимает значение истинно тогда и только тогда, когда исходные выражения одновременно истинны или одновременно ложны. Обозначается $(X \Leftrightarrow Y)$, читается « X эквивалентно Y ».
- Употребляемые в обычной речи логические связки «и», «или», «если ..., то», «эквивалентно», частица «не» позволяют из уже заданных высказываний строить новые, более «сложные высказывания. Так, из высказываний « $X > 2$ », « $X \leq 3$ » при помощи связки «и» можно получить « $X > 2$ и $X \leq 3$ », при помощи связки «или» - « $X > 2$ или $X \leq 3$ ».



Все задачи раздела «Основы логики и логические основы компьютера» можно разделить на группы:

- на пересечение и объединение множеств;
- построение таблиц истинности выражений;
- упрощение логических формул;
- *написание структурных формул для переключательных схем;*
- *написание логических формул по комбинационной схеме устройства;*
- *текстовые задачи.*

При решении задач по логике необходимо помнить:

В естественном языке	В логике
и, а, но, хотя, однако	Конъюнкция
неверно, что...	отрицание
или	дизъюнкция
либо..., либо...	сложение по mod 2 (строгая дизъюнкция)
из... следует..., ...влечет... ...тогда, когда... если..., то... ...необходимо...	импликация
...достаточно...	обратная импликация
...в том и только в том случае... ...тогда и только тогда, когда... ...необходимо и достаточно... ...равносильно...	эквивалентность

Романов Константин
Михайлович, учитель



Таблицы истинности

- Для задания функций алгебры логики иногда используют таблицы, содержащие все наборы значений переменных и значения функций на этих наборах. Это так называемый табличный способ задания функций.
- Сами же таблицы в алгебре логики называют **таблицами истинности** (истинностные таблицы).
- Так например: таблица, задающая логическое отрицание $\neg X$, умножение (конъюнкция) $X \wedge Y$, сложение (дизъюнкция) $X \vee Y$, следования (импликация) $X \Rightarrow Y$, эквивалентность $X \Leftrightarrow Y$, имеет следующий вид: \longrightarrow

Таблица истинности

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Романов Константин
Михайлович, учитель

Законы алгебры логики

$X \wedge Y = Y \wedge X$ $X \vee Y = Y \vee X$	Закон коммутативности
$(X \wedge Y) \wedge Z = X \wedge (Y \wedge Z)$ $(X \vee Y) \vee Z = X \vee (Y \vee Z)$	Закон ассоциативности
$X \wedge (X \vee Y) = X$ $X \vee (X \wedge Y) = X$ $X \wedge (\neg X \vee Y) = X \wedge Y$ $X \vee (\neg X \wedge Y) = X \vee Y$	Закон поглощения
$X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$	Закон дистрибутивности
$\neg 0 = 1$ $\neg 1 = 0$	Отрицание



Законы алгебры логики

$$X \vee 0 = X$$

$$X \wedge 1 = X$$

$$X \vee 1 = 1$$

$$X \wedge 0 = 0$$

Свойства - операции ИЛИ, И

$$X \vee X = X$$

$$X \wedge X = X$$

Закон идемпотентности

$$X \vee \neg X = 1$$

$$X \wedge \neg X = 0$$

Закон противоречия

$$\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$$

$$\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$$

Закон де Моргана

$$X \wedge Y \vee X \wedge \neg Y = X$$

$$(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) = X$$

Закон склеивания

Пример 1

Записать в виде логического выражения следующее высказывание: «Зимой Саша поедет в деревню и, если будет хорошая погода, то он будет кататься на лыжах»

1. Проанализируем составное высказывание.
 - Оно состоит из следующих простых высказываний: «Саша поедет в деревню», «Будет хорошая погода», «он будет кататься на лыжах». Обозначим их через логические переменные:
 - A= Саша поедет в деревню;
 - B= Будет хорошая погода;
 - C=Он будет кататься на лыжах;
2. Запишем высказывание в виде логического выражения, учитывая порядок действий. Если необходимо расставим скобки:
 - $F=A\&(B \rightarrow C)$



Упражнение 1

Запишите следующие высказывания в виде логических выражений:

1. Число 19 нечетное и двузначное.
2. Если Катя- сестра Миша, то Миша- брат Кати.
3. Если число делится на 4 , то оно- четное.
Не переходи улицу на красный свет.
4. Неверно, что кролик- хищное животное.



Упражнение 2

Запишите логические выражения,
соответствующие следующим
высказываниям:

- a) Ботаника изучает растения и ботаника изучает животных.
- б) В состав атома входят электроны или в состав электронов входят атомы.
- в) Гелий- это жидкость и вода- это газ.
- г) Неверно, что положительный ион- это лишившийся электронов атом.



Упражнение 3

Запишите следующие высказывания в виде логических выражений:

1. Если будет светить солнце, то ребята пойдут в зоопарк, а если пойдет дождь, то ребята займутся уборкой квартиры.
2. Мы поедем в деревню и, если встретим там друзей, то интересно проведем время.
3. Неверно, что если солнце светит, то ветер дует только тогда, когда идет дождь.



Какое из суждений ложно:

- 1) В пятеричной системе счисления $2 + 3 = 10$
- 2) 1 байт = 8 бит
- 3) Некоторые простые числа, большие 101, делятся на 3
- 4) В семеричной системе счисления 10 - нечетное число



Задача

- . Закон нарушили двое из 4-х граждан: А, В, С, D. Напишите в алфавитном порядке без запятой кто это, если известно что:
- 1) Если нарушил А или не нарушил В, то нарушил С и не нарушил D
- 2) Если не нарушил D или нарушил С, то не нарушил А и не нарушил В



Вопросы для повторения:

1. Что такое логика?
2. Логическая функция- это...
3. Объединение двух высказываний в одно с помощью оборота «если..., то...» называется...
4. Таблица, содержащая все возможные значения логических выражений называется...