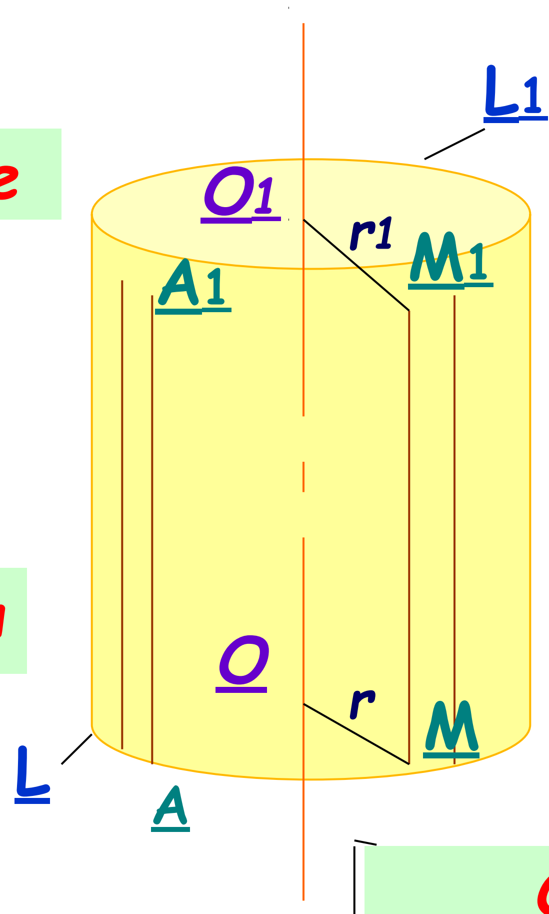
Цилиндр, конус и шар

Основные понятия

Понятие цилиндра



основание

образующая

Цилиндрическая поверхность

основание

Ось цилиндра

Основные понятия

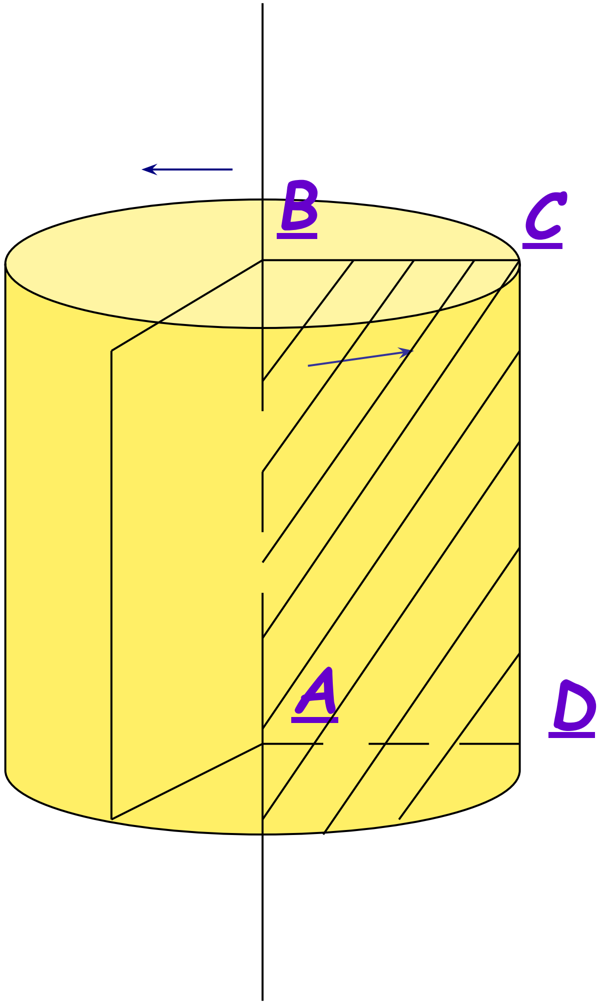
Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L1, называется **цилиндром.**

Цилиндрическая поверхность – **боковая поверхность цилиндра**, а круги – **основания цилиндра**

Образующие цилиндрической поверхности – **образующие цилиндра**, а прямая OO1 – **ось цилиндра**
(все образующие параллельны и равны)

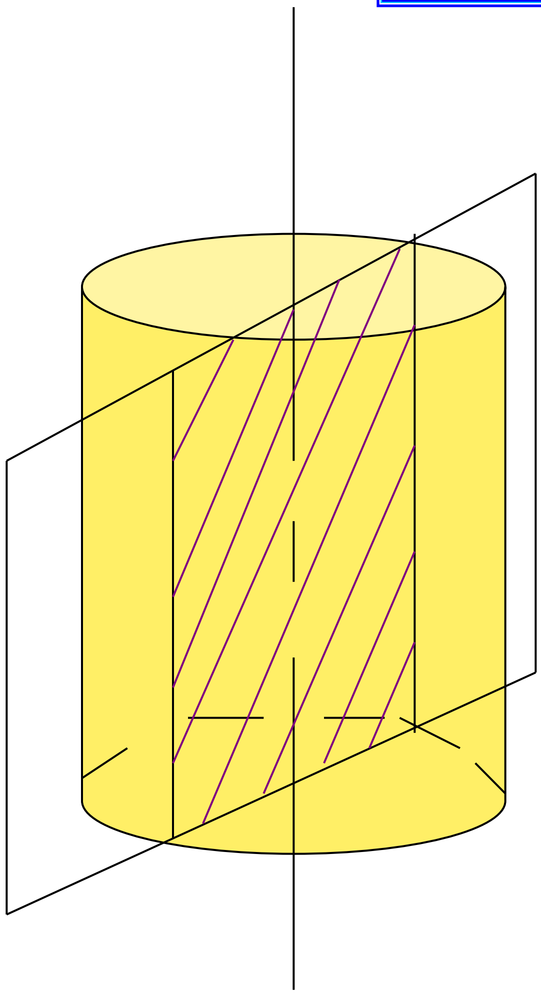
Длина образующей – **высота цилиндра**, а радиус основания – **радиус цилиндра**

Запомни это !

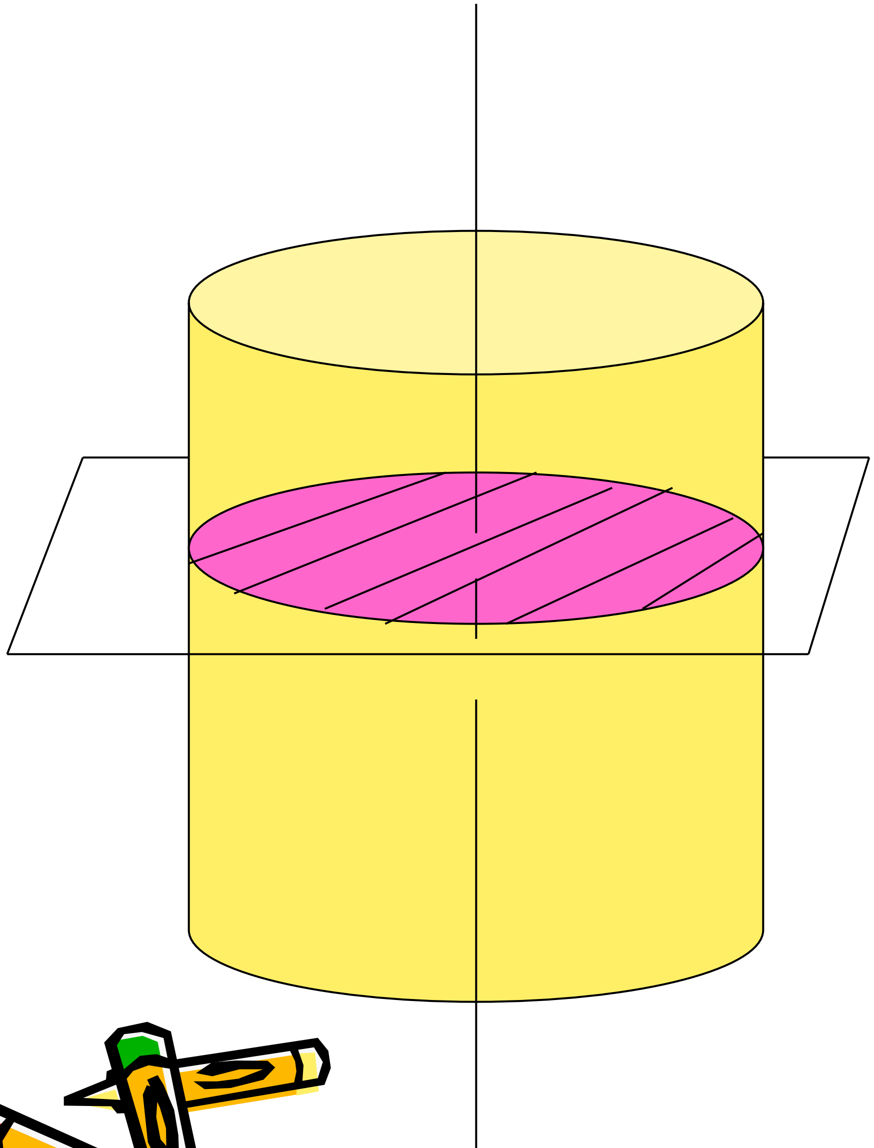


Цилиндр можетбыть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.
На рисунке цилиндр получен вращением прямоугольника ABCD вокруг стороны AB.
При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основания – вращением сторон BC и CD.

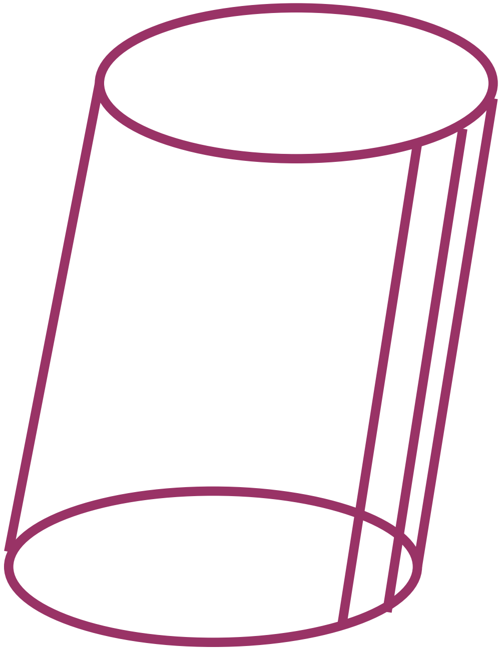
Сечение цилиндра



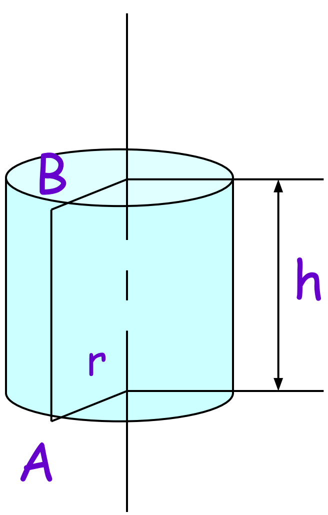
Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой Прямоугольник, 2 стороны которого – образующие, а 2 другие – диаметры оснований цилиндра.
Это сечение – **осевое**

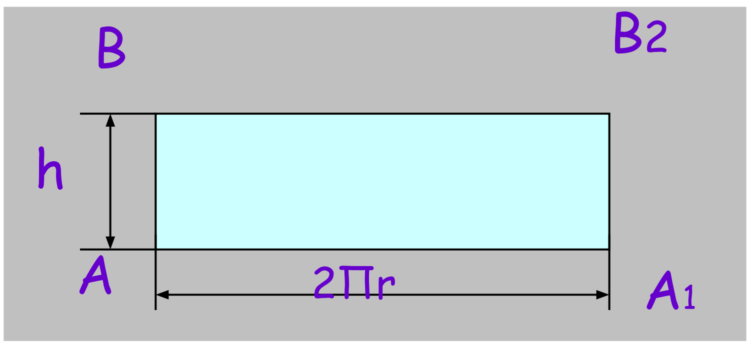


Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом.



На практике нередко встречаются предметы, которые имеют форму более сложных цилиндров, например, наклонный цилиндр





Представим, что боковую поверхность цилиндра разрезали по образующей АВ так, что все образующие оказались расположенными в некоторой плоскости. В результате получился прямоугольник ABA_1B_1 Это развертка боковой поверхности цилиндра.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимают площадь ее развертки.

См. далее

Основание AA1 прямоугольника является разверткой окружности основания цилиндра, а высота AB – образующей цилиндра, поэтому

$AA1 = 2\Pi r$; $AB = h$,

где r – радиус цилиндра, h – высота.

Так как площадь прямоуг.

$ABA1B1 = AA1 * AB = 2\Pi rh$,

то

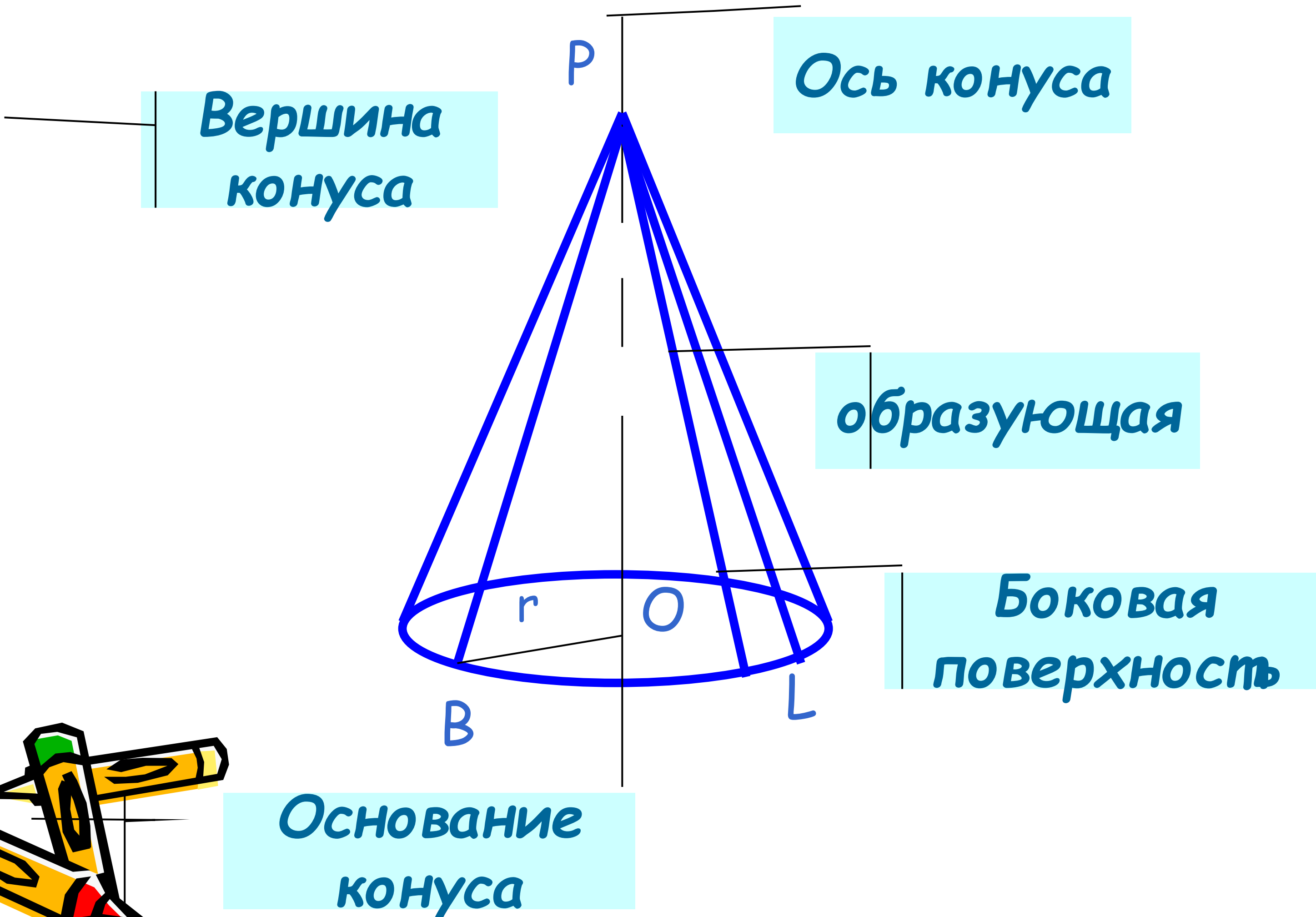
$$S_{бок} = 2\Pi rh$$

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

Площадь полной поверхности цилиндра = сумме площадей
боковой поверхности и двух оснований

$$S_{цил} = 2\Pi rh + 2\Pi r*r = 2\Pi r(r + h)$$

Понятие конуса



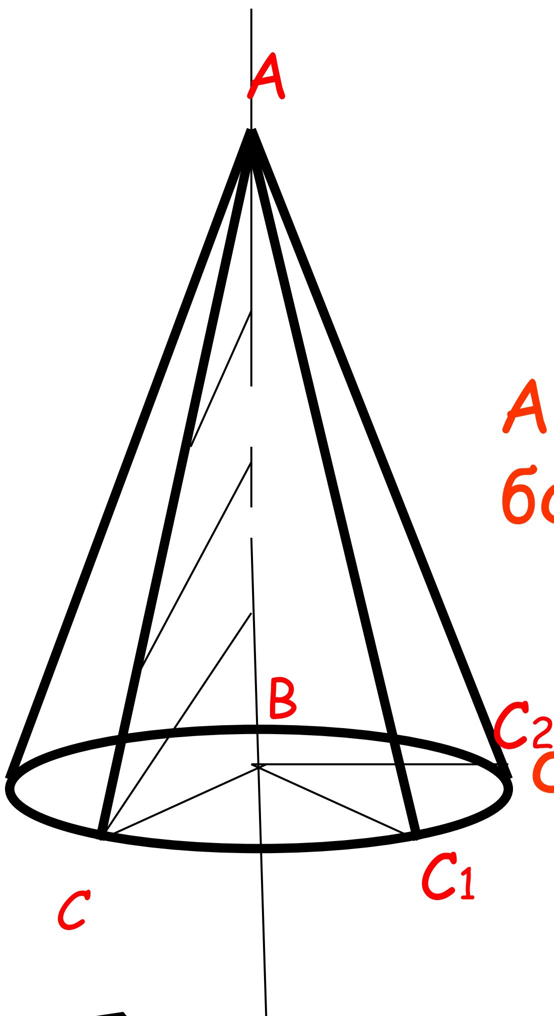
Основные понятия

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется **конусом**

Коническая поверхность – боковая поверхность конуса, а круг – основание конуса

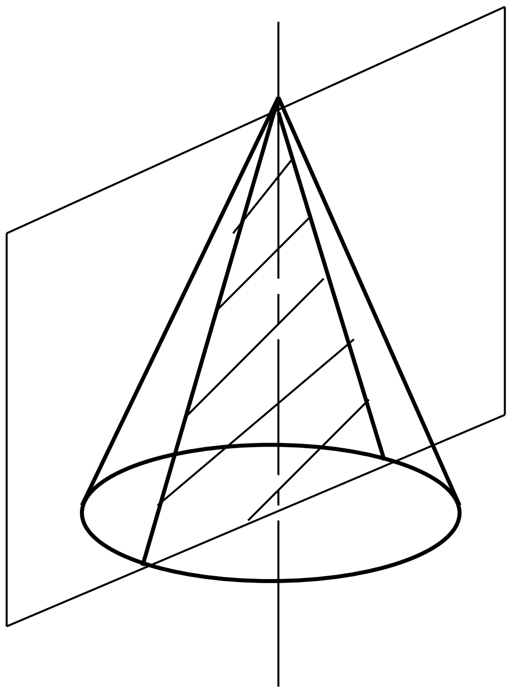
Точка P- вершина конуса, а образующие конической поверхности- -образующие конуса.

Прямая OP, проходящая через центр основания и вершину, называется осью конуса.
Ось конуса перпендикулярна к плоскости основания.
Отрезок OP- высота конуса.



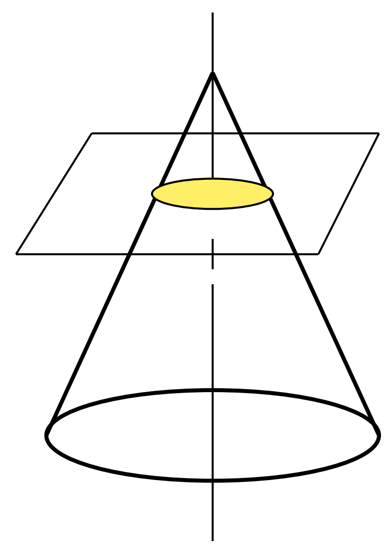
Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB. При этом боковая поверхность образуется путем вращения гипотенузы AC, а основание - вращением катета BC.

Сечение конуса



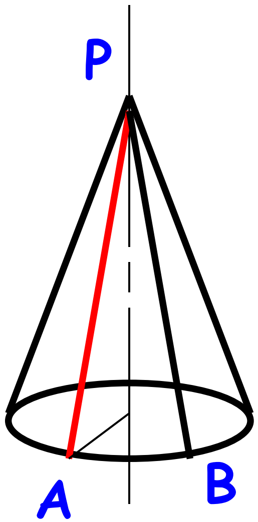
Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение- равнобедренный
треугольник, основание которого – диаметр основания, а боковые стороны – образующие,
Это сечение- осевое

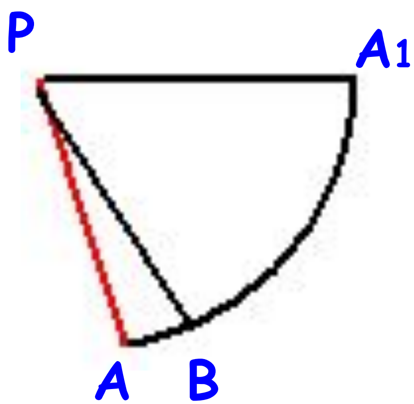
Если секущая плоскость перпендикулярна к оси OP, то сечение – круг с центром O_1, причем
$r=(PO_1:PO)*r$,
где r-радиус основания конуса.



Площадь поверхности конуса

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь его развертки.





Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора- длине окружности основания
конуса.

О:**Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую**

См. далее

Выразим площадь боковой поверхности конуса $S_{бок}$ через его образующую l и радиус основания r. Площадь кругового сектора

-равна $ПL*Lα/360$,где

а- градусная мера дуги ABA_1,поэтому

$S_{бок} = ПL*Lα/360$

Выразим α через l и r.

Так как длина дуги $ABA_1 = 2Пr$(длине окружности основания конуса), то $2Пr=ПLα/180$,откуда $α = 360r/L$

Подставим это выражение в формулу

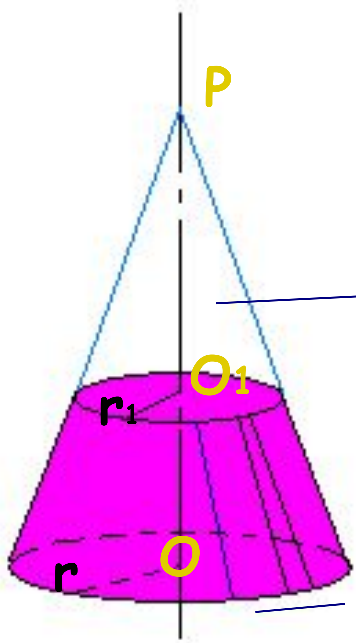
$$S_{бок} = \frac{ПL*L*360r}{360*L} \Rightarrow \boxed{S_{бок} = ПrL}$$

Площадь полной поверхности конуса = сумме площадей боковой поверхности и основания

$S_{кон} = ПrL+Пr*r= Пr(L+r)$

$$\boxed{S_{кон} = Пr(L+r)}$$

Усечённый конус



Основание конуса

образующая

Боковая поверхность

Основание конуса

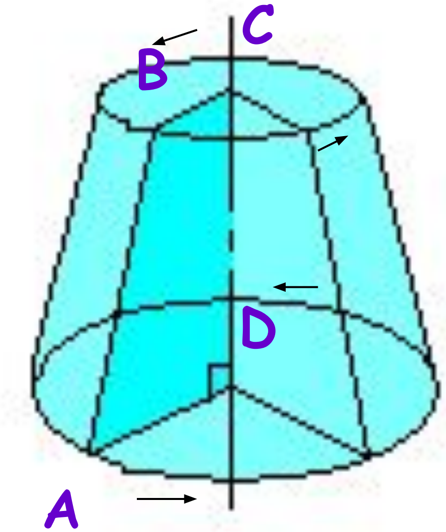
Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость разобьет конус на две части. Одна из них и будет **усечённым конусом.**

Основные понятия

Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью- **основания усечённого конуса**, а отрезок, соединяющий их центры- **высота**

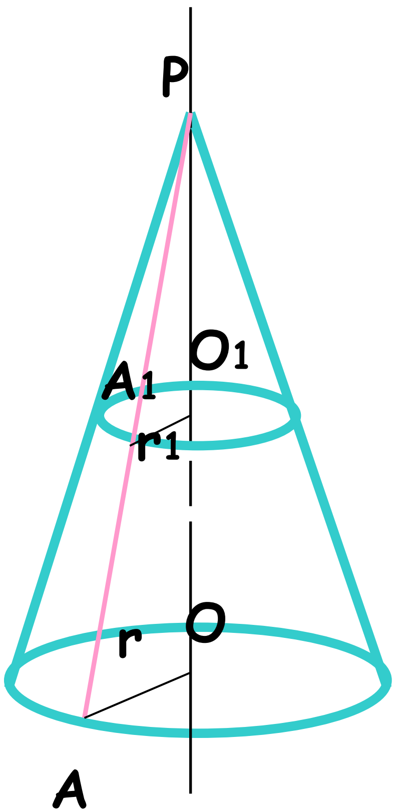
Часть конической поверхности, ограничивающая усечённый конус- его **боковая поверхность**, а отрезки образующих конической поверхности - **образующие усечённого конуса**

Это нужно выучить!



Усечённый конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям.
При этом боковая поверхность образуется вращением боковой стороны AB, а основания- вращением оснований CB и DA трапеции.

Площадь поверхности усечённого конуса



Пусть P- вершина конуса, из которого получен усечённый конус, AA_1 -одна из образующих, O иO_1 – центры оснований.

Используя формулу $S_{бок\ конуса} = \Pi rL$ получим

$S_{бок} = \Pi r*PA-\Pi r_1*PA_1=\Pi r(PA_1+AA_1)-\Pi r_1*PA_1$

отсюда, учитывая, что $AA_1 = L$, находим $S_{бок}=\Pi rL + \Pi(r-r_1)PA_1$.

Выразим PA_1 через L, r и r_1.

(прямоугольные треугольники POA_1 и POA подобны, так как имеют общий угол P, поэтому

$PA_1:PA= r_1:r$ или $PA_1:PA_1+L=r_1:r$

отсюда получаем $PA_1=Lr_1: r-r_1$)

См. далее

Подставим это выражение в формулу

$$S_{бок} = \pi rL + \pi(r-r_1)PA_1,$$

получим

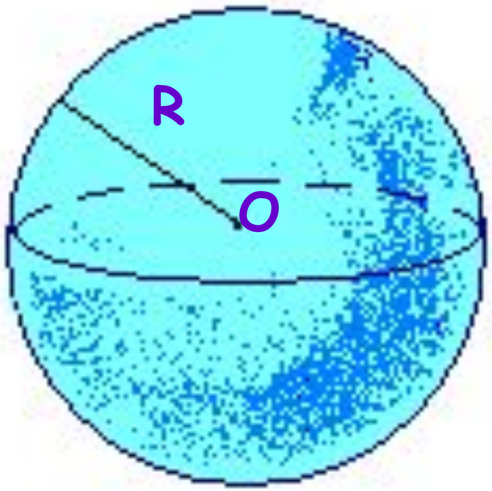
$$\pi rL + \pi(r-r_1)\frac{Lr_1}{r-r_1}$$

$$= \pi rL + \pi r_1 L = \pi(r+r_1)L$$

$$\boxed{S_{бок} = \pi(r+r_1)L}$$

О: Площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую

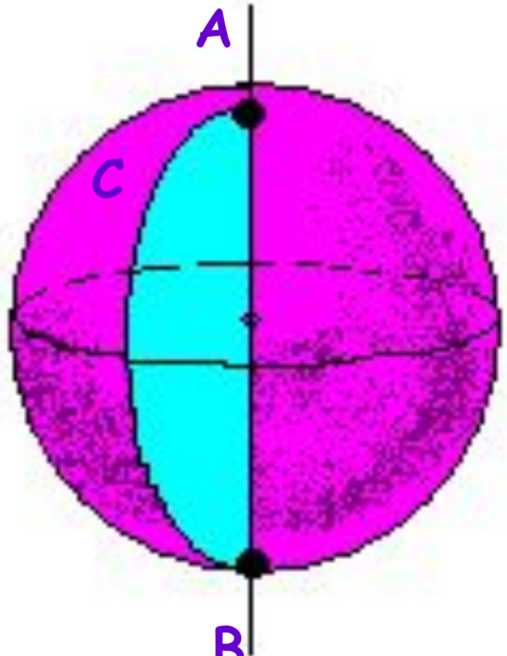
Сфера и шар



Сферой называется
поверхность,
состоящая из всех точек
пространства, которые
расположены на данном
расстоянии от данной точки.

Данная точка – центр сферы, а
данное расстояние-
-радиус сферы.

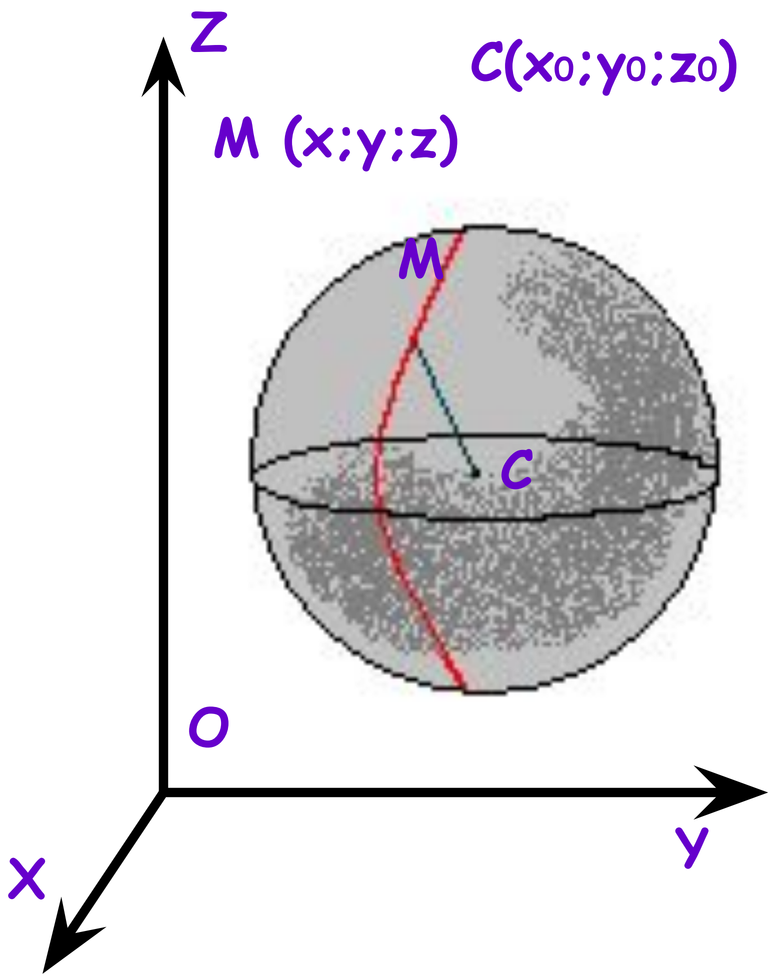
Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку
сферы,
также является радиусом. Отрезок, соединяющий две точки
сферы
и проходящий через её центр- диаметр(=2R)



Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг её диаметра.
На рисунке сфера получена вращением полуокружности АВС вокруг её диаметра АВ.

Тело, ограниченное сферой, называется шаром.
Центр, радиус и диаметр сферы- центр, радиус и диаметр шара.
Шар с радиусом R и центром О содержит все точки пространства, которые расположены от точки О на расстоянии, не превышающем R (включая точку О), и не содержит других точек.

Уравнение сферы



Пусть задана прямоугольная система координат O $_{xyz}$ и дана поверхность f,например плоскость или сфера. Уравнение с тремя переменными x, y, z называется уравнением поверхности F,если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

См. далее

Выведем уравнение сферы радиуса R с центром $C(x_0;y_0;z_0)$
Расстояние от произвольной точки $M(x;y;z)$ до точки C вычисляется по формуле:

$$MC=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

Если точка M лежит на данной сфере, то M=R, т.е. $MC^2=R^2$, то есть координаты точки M удовлетворяют уравнению

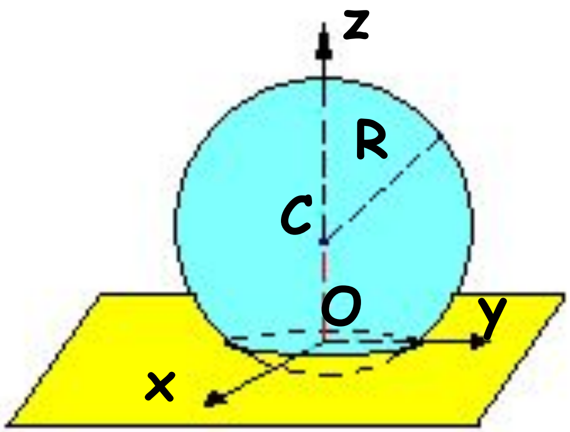
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

Если же точка M не лежит на данной сфере, то $MC\neq R$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют первому уравнению.

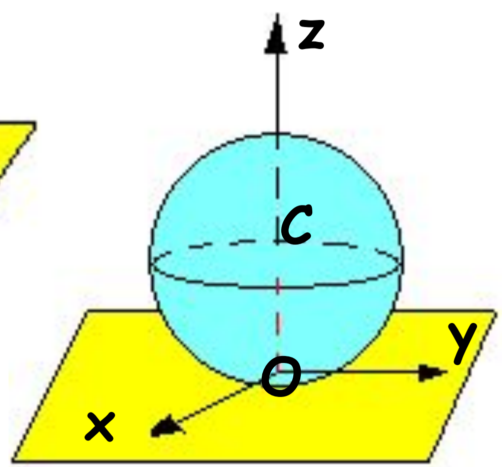
В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром C(x;y;z) имеет вид

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$

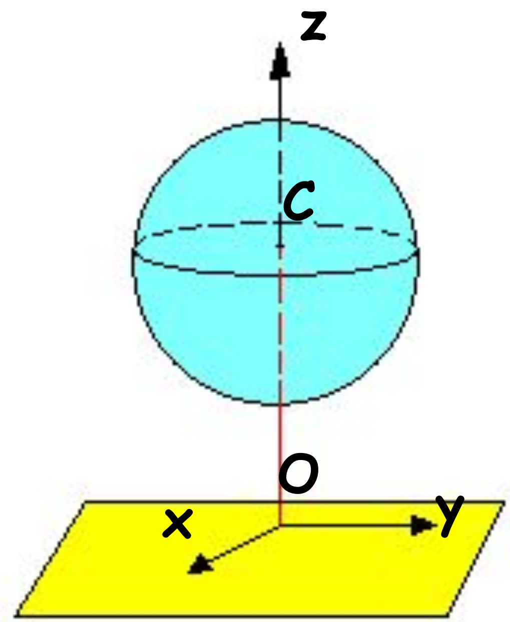
Взаимное расположение сферы и плоскости



$d<R, r=\sqrt{R^2-d^2}$



d=R



d>R

См. далее

Обозначим радиус сферы –R, а расстояние от её центра до плоскости – d.

Введем систему координат :плоскость Oxy совпадает с плоскостью, а центр C сферы лежит на положительной полуосиOz.

В этой системе C имеет координаты (0;0; d),поэтому сфера имеет уравнение

$$x^2+y^2+(z-d)^2=R^2$$

Плоскость α совпадёт с плоскостью Oxy, значит z=0.

Вопрос о взаимном расположении сферы и плоскости сводится к исследованию системы уравнений:

$$\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2+(z-d)^2=R^2 \end{cases}$$

Подставив z=0 во второе уравнение получим:

$$x^2+y^2=R^2-d^2.$$

Возможны три случая:

1.d<R,тогда

$$R^2-d^2>0,$$

и уравнение окружности радиуса

$$r=\sqrt{R^2-d^2}$$

с центром в точке O на плоскости Oxy.В данном случае сфера и плоскость пересекаются по окружности.

Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы- окружность

2.d=R,тогда

$$R^2-d^2=0,$$

И ур-нию удовлетворяют значения x=0,y=0.Значит O(0;0;0),то есть

Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы0 то сфера и плоскость имеют только одну общую точку.

3.d>R,тогда

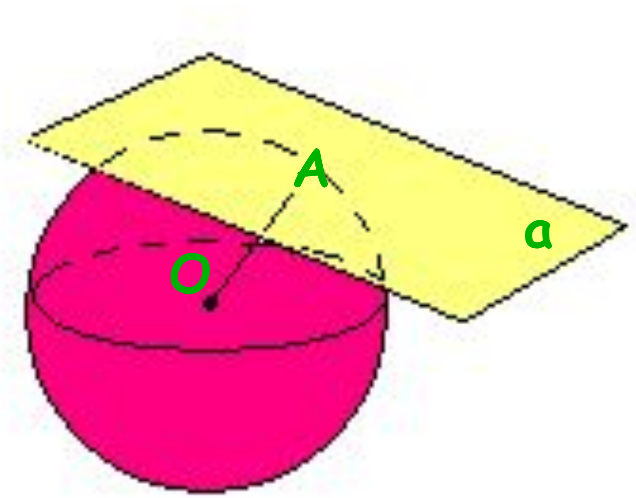
$$R^2-d^2<0,$$

И уравнению не удовлетворяют координаты никакой точки.

Если расстояние от центра до плоскости больше радиуса сферы,

то сфера и плоскость не имеют общих точек.

Касательная плоскость к сфере



Плоскость., имеющая со сферой одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка- точка касания плоскости и сферы.
На рисунке плоскость а- касательная плоскость к сфере с центром О,
а А-точка касания.

См. далее

Свойство касательной плоскости:

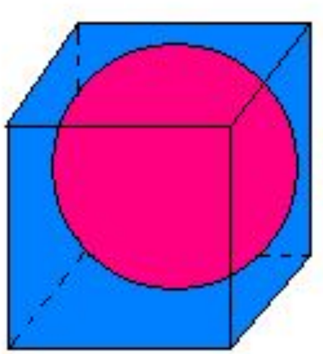
Т: радиус сферы, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной плоскости.

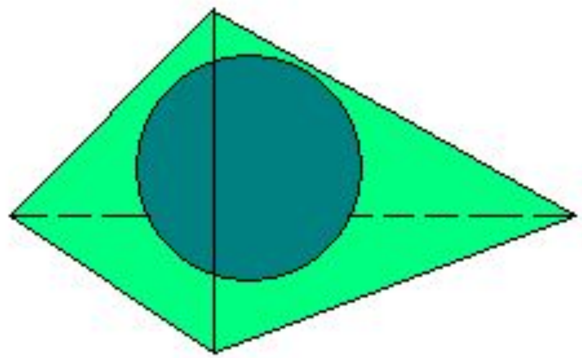
Доказательство:
Рассмотрим рисунок, показанный ранее. Предположим, что радиус не перпендикулярен к плоскости. Тогда он является наклонной к плоскости а, то есть расстояние от сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то есть они пересекаются по окружности, а это невозможно, так как а- касательная. Значит радиус перпендикулярен к плоскости, ч. т. д.

Обратная теорема: если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость- касательная к сфере

Доказательство:
Из условия следует, что радиус- перпендикуляр, проведённый из центра сферы к плоскости. Значит, расстояние от центра сферы до плоскости = радиусу, сфера и плоскость имеют одну общую точку, то есть данная плоскость- касательная к сфере, ч. т. д.

Площадь сферы





Сферу нельзя развернуть на
плоскость, поэтому для определения её площади пользуются понятием описанного многогранника.

(Многогранник описанный, если сфера касается всех его граней. При этом сфера- вписанная.На рис. Сфера вписана в куб и тетраэдр)
За площадь сферы принимается предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани.

S=4П(R*R)

-это будет доказано в дальнейшем курсе геометрии.

конец