

# В Древней Греции



Математики Древней Греции (из ранних изданий работ Архимеда)

- Настоящей наукой математика стала только у древних греков. Это был удивительно талантливый народ, у которого есть чему поучиться даже сейчас, тысячи лет спустя. В древние времена Греция состояла из маленьких государств. Каждый раз, когда приходилось решать какой-нибудь важный государственный вопрос, горожане собирались на площадь, обсуждали его, спорили о том, как лучше сделать, а потом голосовали. Греки считали, что спор помогает найти самое лучшее, самое правильное решение – «В споре рождается истина». И в науке греки стали поступать также, как в народном собрании. Они не просто заучивали правила, а доискивались причины: почему правильно делать так, а не иначе. Каждое правило греческие математики старались объяснить, доказать, что оно действительно верное. Для этого они спорили друг с другом, рассуждали, старались найти в рассуждениях ошибки. Из правил складывались законы, из законов – наука математика.

# Александрийская эпоха. Евклид.

- В самом конце I V века до н.э. важнейшие математические достижения учёных Древней Греции были систематизированы и изложены в «Началах» Евклида, с которого начинается новый, самый блестящий период развития древнегреческой математики, так называемая александрийская эпоха.
- Известно, что после смерти Александра Македонского его огромная империя распалась. При её разделе один из греко-македонских полководцев, Птолемей, сын Лага, стал править Египтом с новопостроенным городом Александрией. Птолемей основал знаменитый музей (храм муз, покровительниц науки и искусств), ставший высшим культурным и научным учреждением, центром научной мысли эпохи эллинизма. В состав музея входила и богатейшая Александрийская библиотека, насчитывавшая около 700 000 томов (свитков). В Александрии в III – II вв. до н.э. сосредоточились знаменитые математики того времени: Евклид, Эратосфен, Аполлоний. К Александрийской математической школе относится также Архимед, хотя он жил в Сиракузах. В этот период геометрия отделяется от философии и достигает высокого уровня совершенства.
- К первым представителям Александрийской школы принадлежит Евклид.



# Евклид

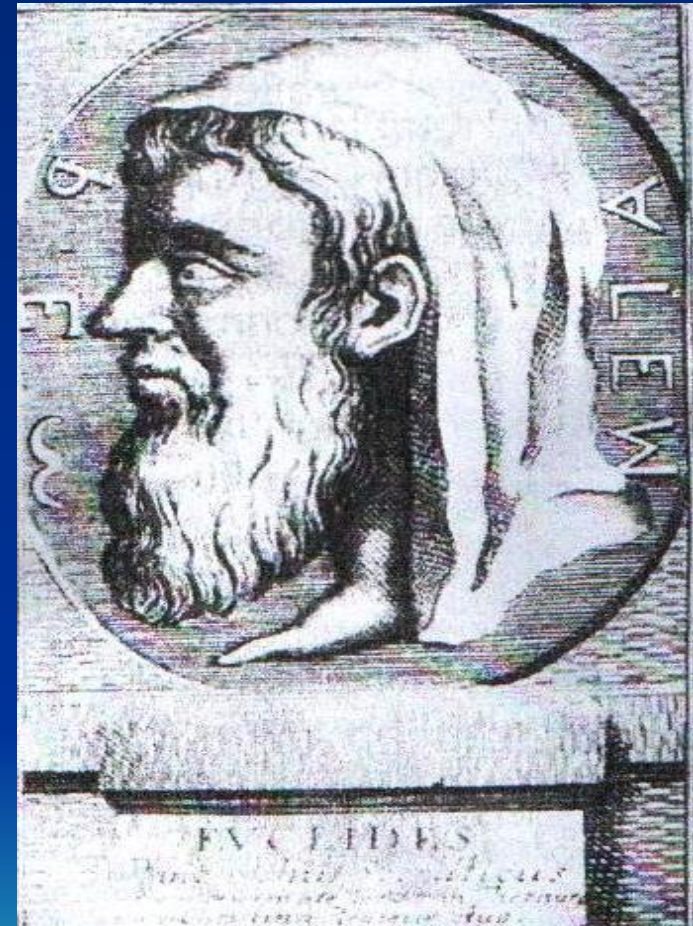


- **Наречён:** Евклид (в некоторых транскрипциях – Эвклид)
- Точная дата рождения неизвестна, известно лишь то, что он младше Птолемея 1 Сотера (306 – 283 г. до нашей эры), но старше Архимеда (287 – 212 г. до нашей эры).

**Обстоятельства рождения:** по данным арабских хроник: «Евклид, сын Нуакрата, известный под именем «Геометра», по своему происхождению грек, по месту жительства сириец, родом из небольшого городка Тира, недалеко от Афин. По другим данным, родина Евклида – Афины.

# Евклид Александрийский

- **Характер:** В одном из своих сочинений математик Папп, живший в Александрии в 3-4 в.в. н.э., изображает Евклида, как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм.  
**Семейное положение:** неизвестно, но учитывая огромное научное наследие и безграничную любовь к геометрии, наверняка был холост.
- **За что ценим:** будучи основателем математической школы в Александрии, написал для её учеников фундаментальный труд, на тысячелетия определивший путь развития геометрии.

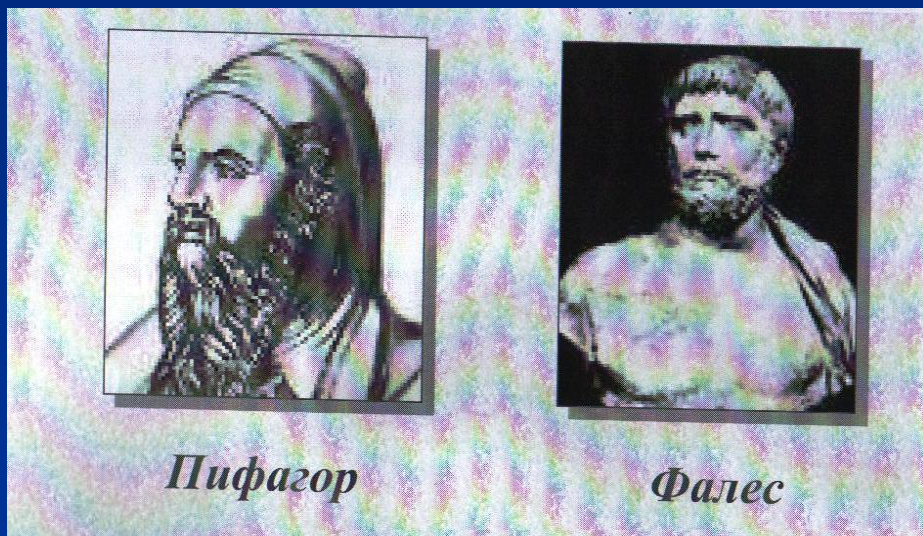


# Евклид - учитель



- **В свободное от математики время:** одарённый от природы Евклид проявил себя и в совершенно неожиданных областях науки и культуры. В музыке – он изобретатель прообраза камертона – монохорда. В оптике – основатель геометрической оптики.
- Евклид преподавал в Александрии, куда был приглашён царём Птолемеем 1 Сотером для организации математической школы. Известно, что он учился в платоновской Академии в Афинах. Евклид был последователем древнегреческого философа Платона, и преподавал он вероятно, четыре науки, которые по мнению Платона должны предшествовать занятиям философией: арифметику, геометрию, теорию гармонии и астрономию.

## Нет царской дороги к геометрии.



- Славу Евклиду принёс написанный около 325 года до н.э. для своих учеников Александрийской математической школы фундаментальный труд «Начала», в котором он подвёл итог построению геометрии, объединил результаты своих предшественников, упорядочил и привёл в одну систему основные геометрические знания того времени и придал изложению столь совершенную форму, что на 2000 лет «Начала» стали энциклопедией геометрии. Прокл в комментариях к первой книге «Начал» приводит рассказ о том, что будто бы царь Птолемей спросил Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его «Начала». Евклид ответил: «Нет царской дороги к геометрии!». Так в виде легенды дошло до нас это ставшее крылатым выражение.
- Предшественники Евклида – Фалес, Пифагор, Аристотель и другие много сделали для развития геометрии. Но всё это были отдельные фрагменты.

# Начала.

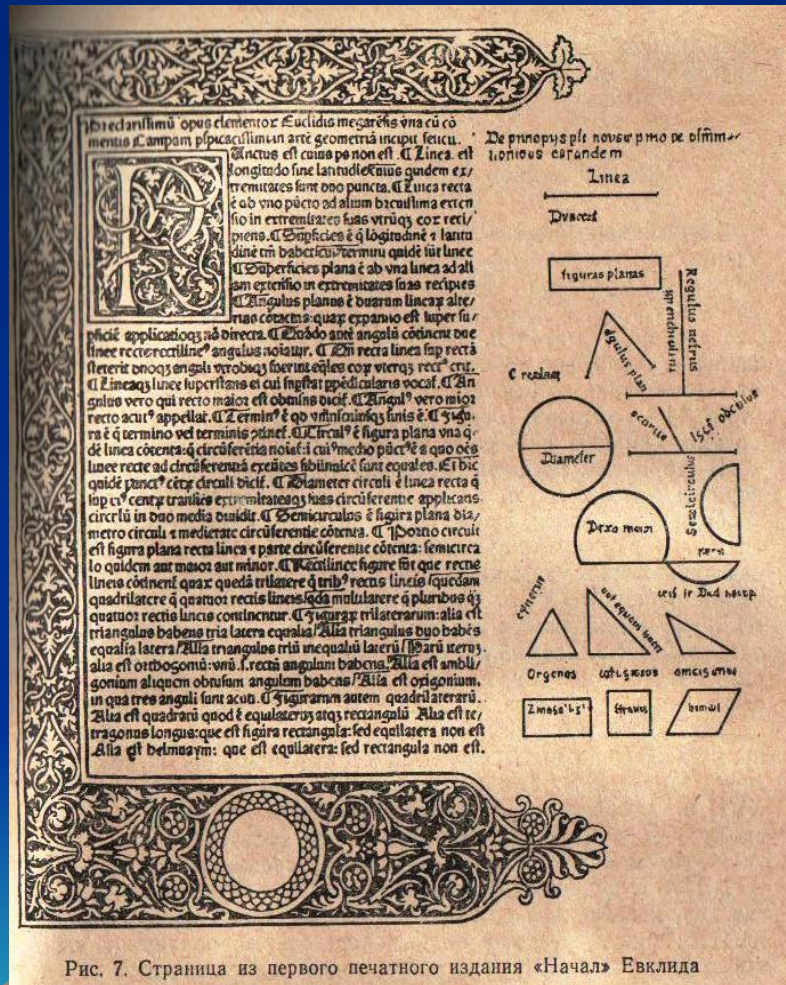


Рис. 7. Страница из первого печатного издания «Начал» Евклида

- Евклид с величайшим искусством расположил материал по 13 книгам так, чтобы трудности не возникали преждевременно. Все эти книги построены по единой логической схеме. Позже греческие математики включили в «Начала» ещё две книги – 14-ю и 15-ю, написанные другими авторами.

В «Началах» Евклид придерживается аристотелевских принципов построения науки. Величайший философ древности – Аристотель жил и творил в период, непосредственно предшествующий «Началам» Евклида. В трудах Аристотеля разъясняется сущность научных определений, аксиом и доказательств. Согласно Аристотелю, одно определение (например, квадрата) не говорит ещё о существовании определяемого. Существование следует доказать. Доказательством же служит построение. Именно эта и другие установки Аристотеля нашли своё отражение в «Началах» Евклида. Как и Аристотель, Евклид обозначает величины буквами.

- Первые шесть книг «Начал» посвящены планиметрии, 7-10 – учению о числе, 11-13 – стереометрии. Оригинальная рукопись, которая долгое время сохранялась в Александрийском музее, не дошла до нас. Древнейшая из сохранившихся копий принадлежит IX веку. На русском языке «Начала» были изданы 3 раза в 18 веке и четыре раза в 19 веке. Последний и самый совершенный перевод с греческого на русский язык был осуществлён в 1948-1950 гг.

# 1-13 книги «Начал»

- В первой книге формулируются исходные положения геометрии, а также содержатся основополагающие теоремы планиметрии, среди которых теорема о сумме углов треугольника и теорема Пифагора.
- Во второй книге излагаются основы геометрической алгебры. С помощью геометрических чертежей даются решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. Алгебраической символики тогда не существовало.
- Третья книга посвящена свойствам круга, его касательных и хорд.
- В четвёртой книге рассматриваются правильные многоугольники, причём построение правильного пятнадцатиугольника принадлежит, видимо, самому Евклиду. Появляются основы учения о подобии.
- Книги 5-я и 6-я посвящены теории отношений и её применению к решению алгебраических задач.
- Книги 7-я, 8- и 9-я посвящены теории целых и рациональных чисел, разработанной пифагорейцами не позднее 5в. до н.э. Приводится алгоритм нахождения наибольшего общего делителя.
- В книге 10-й рассматриваются квадратичные иррациональности и излагаются результаты, полученные Теэтетом.
- В книге 11-й рассматриваются основы стереометрии.
- В 12-й книге доказываются теоремы, относящиеся к площади круга и объёму шара, выводятся отношения объёмов пирамид, призм и конусов.
- В основу 13-й книги легли результаты, полученные Теэтетом в области правильных многогранников.
- В «Начала» не попало одно из величайших достижений греческих геометров – теория конических сечений. О них Евклид написал отдельную книгу «Начала конических сечений», не дошедшую до нас, но её цитировал в своих сочинениях Архимед.





# Евклидова геометрия

- «Начала» Евклида представляют собой изложение той геометрии, которая известна и поныне под названием Евклидовой геометрии. Начиная с III в. до н.э. и до середины 19 века «Начала» считались образцом строго логического изложения геометрии. Евклид исходит из определений геометрических понятий и аксиом. Каждое геометрическое понятие формулируется в общих выражениях, затем конкретно указывается на чертеже то, что дано и что требуется доказать или построить. После доказательства следует заключение, повторяющее начальную формулировку и заканчивающееся словами: «что и требовалось доказать» или «что и требовалось сделать».
- На протяжении многих столетий до 19 века геометрия изучалась в школах по «Началам» Евклида. Наши современные учебники имеют много общих черт с «Началами»: планиметрия и стереометрия излагаются отдельно, каждая из них примерно в том же порядке, что и у Евклида; теоремам предшествуют определения и аксиомы. Многие теоремы, изложенные в современных учебниках, совпадают с теми, которые имеются в «Началах», методы доказательства в большинстве случаев те же.  
**Но есть и различия.** В «Началах» даже не упоминается о непосредственном измерении площадей и объёмов фигур, а только об их сравнении. Так, например, у Евклида нет теоремы о том, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту; имеется только теорема о том, что треугольник равновелик половине параллелограмма с тем же основанием и той же высотой. В «Началах» нигде не говорится о числе  $\pi$  и его приближённом значении. Все теоремы и их доказательства излагаются в чисто геометрической форме. Евклид не вычисляет длин, площадей, объёмов (таких слов даже нет в книге), а находит посредством геометрических построений соотношения между величинами геометрических фигур. В «Началах» все предложения расположены в виде цепи логических рассуждений и выводов, исходя из простых аксиом и доходя постепенно до сложных теорем.



# 1 книга Евклида. Определения и постулаты.

- **Первая книга Евклида начинается с 23 определений, среди них такие:**

- Точка есть то, что не имеет частей.
- Линия есть длина без ширины.
- Границы линии суть точки.
- Прямая есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.
- Поверхность есть то, что имеет длину и ширину.
- Границы поверхности суть линии.
- Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим.
- Плоский угол есть взаимное наклонение двух встречающихся линий, расположенных в одной плоскости.
- Такие определения нельзя считать логически корректными. Во-первых, в этих определениях употребляются такие понятия, которые сами должны быть определены (часть, длина, ширина, граница). Во-вторых, идея основных понятий у Евклида вообще отсутствует.
  - За определениями следуют 5 постулатов и 9 аксиом, которые Евклид не отождествляет
    - Постулаты.
- 1. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.
- 2. И чтобы каждую прямую можно было неопределённо продолжить.
- 3. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.
- 4. И чтобы все прямые углы были равны.
- 5. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых. Это знаменитый постулат. Многочисленные попытки в 19 столетии «поправить» Евклида, сделать из этой аксиомы теорему закончились провалом.



# АКСИОМЫ

- 1. Равные порознь третьему равны между собой.
- 2. И если к равным прибавим равные, то получим равные.
- 3. И если от равных отнимем равные, то получим равные
- 4. И если к неравным прибавим равные, то получим неравные.
- 5. И если удвоим равные. То получим равные.
- 6. И половины равных равны между собой.
- 7. И совмещающиеся равны.
- 8. И целое больше части.
- 9. И две прямые не могут заключать пространства.
- Важнейшим недостатком системы евклидовых аксиом, включая и его постулаты, является их неполнота, то есть недостаточность их для строго логического построения геометрии. Лишь в 19 веке удалось выяснить, что Евклид перечислил далеко не все аксиомы, которые на самом деле нужны для построения геометрии. В действительности при доказательствах учёный ими пользовался, но не сформулировал. Но это нисколько не умаляет роли Евклида, первого показавшего, как можно и как нужно строить математическую теорию. А значит, все последующие математики в известной степени являются учениками Евклида.



# Задачи по геометрии и их решения

- **Из 1-й книги «Начал»**
  - 1. Данный прямолинейный угол рассечь пополам.
  - 2. Данную ограниченную прямую (т.е. отрезок) рассечь пополам.
- **Из 3-й книги «Начал»**
  - 1. Найти центр данного круга.
  - 2. Рассечь данную дугу пополам.
- **Из 4-й книги «Начал»**
  - 1. В данный круг вписать хорду данной длины.
- **Из 6-й книги «Начал»**
  - 1. Для данных двух отрезков найти средний пропорциональный.
  - 2. Для трёх данных отрезков найти четвёртый средний пропорциональный.
- 1. Чтобы разделить угол  $BAC$  пополам, Евклид берёт на  $AB$  произвольную точку  $D$  и на  $AC$  откладывает  $AE = AD$ . Далее, на  $DE$  он строит равносторонний треугольник  $DEF$ . Прямая  $AF$  делит угол  $BAC$  пополам.
- 2. Чтобы разделить отрезок  $AB$  пополам, Евклид строит на нём равносторонний треугольник  $ABC$ , делит угол  $ACB$  пополам прямой  $CD$ . Точка  $D$  – середина отрезка  $AB$ .
- 3. Доказательство Евклида (методом от противного) сводится к тому, что центр круга лежит на перпендикуляре, восстановленном из середины хорды.
- 4. Евклид делит пополам хорду  $AB$ , стягивающую данную дугу. Из точки  $C$ , середины хорды, он строит перпендикуляр к  $AB$ , пересекающий дугу в искомой точке  $D$ .

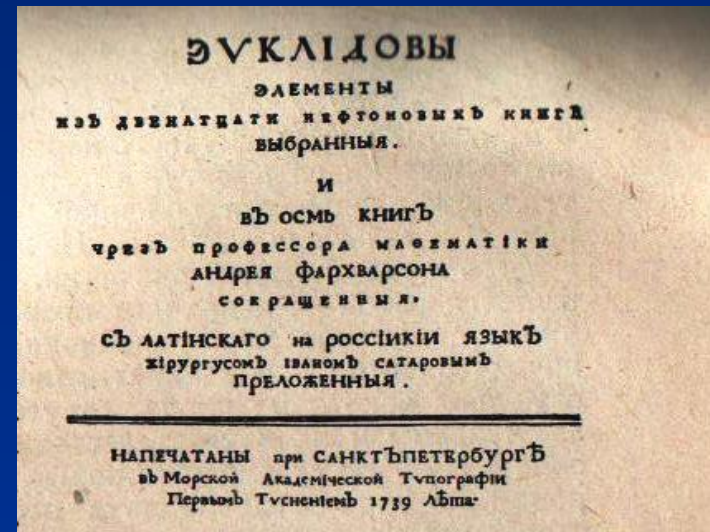
# Алгоритм Евклида



- Алгоритм Евклида – это способ нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел, двух многочленов, а также наибольшей общей меры двух соизмеримых отрезков.
- Чтобы найти наибольший общий делитель двух целых положительных чисел, нужно сначала большее число разделить на меньшее, затем второе число разделить на остаток от первого деления, потом первый остаток – на второй и т.д. Последний ненулевой остаток в этом процессе и будет наибольшим общим делителем данных чисел.
- Пример: Найти НОД 777 и 629.  
 $777 = 629 * 1 + 148.$
- $629 = 148 * 4 + 37.$
- $148 = 37 * 4.$
- Последни  ненулевой остаток 37 и есть наибольший общий делитель чисел 777 и 629.
- Для нахождения наибольшей общей меры двух отрезков поступают аналогично. Операцию деления с остатком заменяют его геометрическим аналогом: меньший отрезок откладывают на большем столько раз, сколько возможно: оставшуюся часть большего отрезка откладывают на меньшем отрезке и т.д. Последни  ненулевой остаток даст наибольшую меру этих отрезков.

# Популярный памятник древности

- Обычно о «Началах» говорят, что после Библии это самый популярный написанный памятник древности. В течение 2000 лет эта книга являлась настольной книгой школьников, использовалась как начальный курс геометрии. «Начала» пользовались исключительной популярностью, с них было снято множество копий трудолюбивыми писцами в разных странах и городах. Позднее «Начала» с папируса перешли на пергамент, а затем на бумагу. До 20 века книга считалась основным учебником не только для школ, но и для университетов.
- «Начала» Евклида – образец дедуктивного (от общего к частному) изложения геометрии, алгебраические выводы сделаны в геометрическом стиле.



Впоследствии геометрия развивалась, появилась неевклидова геометрия, геометрия стала экспериментальной наукой в физике. Но предпосылками этого развития стали именно труды великого Евклида.

# Другие сочинения

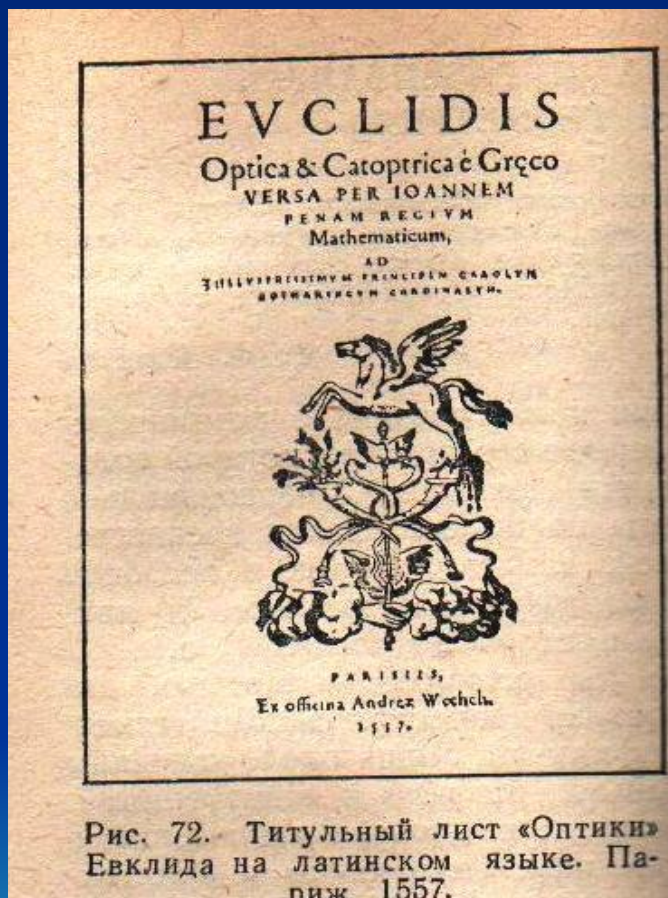
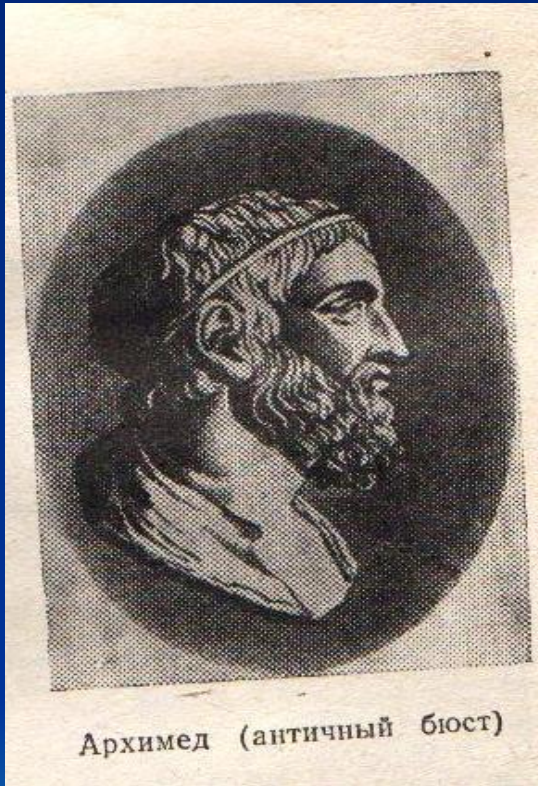


Рис. 72. Титульный лист «Оптики» Евклида на латинском языке. Париж. 1557.

- «Данные» - задачи, решаемые с помощью геометрической алгебры.
- «О делении фигур» - задачи на построение.
- «Явления» - астрономическое сочинение.
- «Оптика»
- «Сечения канона» - небольшой трактат, содержит десять задач о музыкальных интервалах.
- Изложение во всех этих сочинениях, как и в «Началах» подчинено строгой логике, причём теоремы выводятся из точно сформулированных физических гипотез и математических постулатов.

# Выдающиеся геометры после Евклида



- Евклид умер между 275 и 270 годами до н.э.
- Большой вклад в дальнейшее исследование различных вопросов геометрии внесли Архимед, Аполлоний Пергский.
- После Аполлония в Древней Греции не было крупных открытий в области геометрии. Труды Архимеда и Аполлония считались слишком сложными, они не читались, и часть их со временем была утеряна.