Логарифмический мир

Проект выполнен учащимися 11 класса.
2008г.

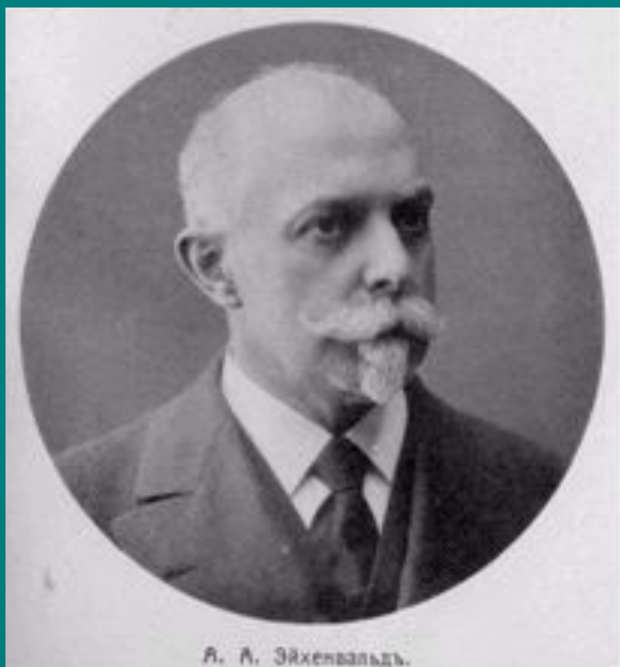
Гениальное изобретение логарифмов, упрощая арифметические операции, облегчает все применения вычисления к реальным предметам и, таким образом, расширяет сферу всех наук, в которых эти численные применения, частные случаи искомой истины являются одним из способов сравнения с фактами результатов гипотезы или теории и путем этого сравнения позволяют дойти до открытия законов природы. В самом деле, в математике протяженность и усложнение чисто практических вычислений имеют предел, который ни время, ни даже силы не позволяют переходить, и без помощи этих удачных сокращений время отметило бы границы самой науки и предел, который усилия гения не могли бы преодолеть.

Кондорсе Ж.

История открытия логарифма

Логарифмы были введены шотландским математиком Дж. Непером (1550-1617) и независимо от него швейцарским механиком и математиком И. Бюрги (1552-1632). Бюрги пришел к логарифмам раньше, но опубликовал свои таблицы с опозданием (в 1620 г.), и первой в 1614 г. появилась работа Непера «Описание удивительной таблицы логарифмов». Основанием таблицы логарифмов Непера является иррациональное число, к которому неограниченно приближаются числа вида (1 + 1/n)n при безграничном возрастании *n.* Это число называют неперовым числом и со времен *Л.Эйлера* обозначают буквой *е.* Непер составил таблицы, взяв очень хорошее приближение числа *е.* Логарифмы по основанию *е* называются натуральными логарифмами и обо значаются ln (образовано от первых букв слов «логарифм натуральный»).

Логарифмы в музыке



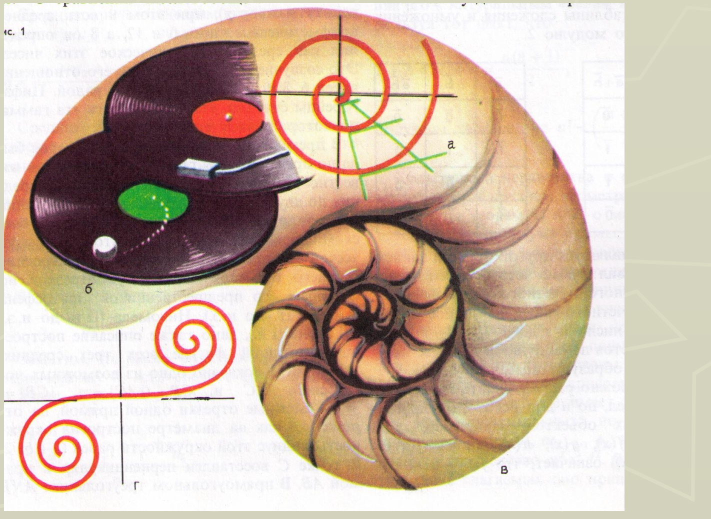
А.А. Эйхенвальд

Даже изящные искусства
питаются ею
Разве музыкальная гамма
не есть
Набор передовых
логарифмов?

Музыканты редко увлекаются математикой. Между тем, музыканты – даже те, которые не проверяют подобно Сальери у Пушкина «алгеброй гармонию» – соприкасаются с математикой, чаще, чем сами подозревают и при том с такими страшными вещами, как логарифмы.

Физик, профессор Эйхенвальд пишет в своей статье (она была напечатана в «Русском астрономическом календаре» на 1919 год и озаглавлена «О больших и малых расстояниях»): «Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математики. Он даже говорил с пренебрежением, что музыка и математика не имеют друг с другом ни чего общего.

Правда Пифагор нашел какие-то соотношения между звуковыми колебаниями,- но ведь Пифагорова-то гамма и оказалась неприемлемой для нашей музыки. Представьте, как не приятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно говоря, на логарифмах…»



Положим, что ноте “до” самой низкой октавы – будем ее называть нулевой – соответствует частота, равная *n* колебаниям в секунду. В октаве частота колебаний нижнего звука в 2 раза меньше верхнего, т.е. эти частоты соотносятся как 1 : 2. Тогда ноте “до” первой октавы будут соответствовать 2*n* колебания в сек., а ноте “до” m-ой октавы - n·2m колебания в сек. и д.. Тогда высоту, т.е. частоту любого звука можно выразить формулой:

$$N_{mp} = n \cdot 2^{m} \left(\sqrt[12]{2}\right)^{p}$$

Здесь p - номер ноты хроматической гаммы рояля

Логарифмируя эту формулу, получаем:

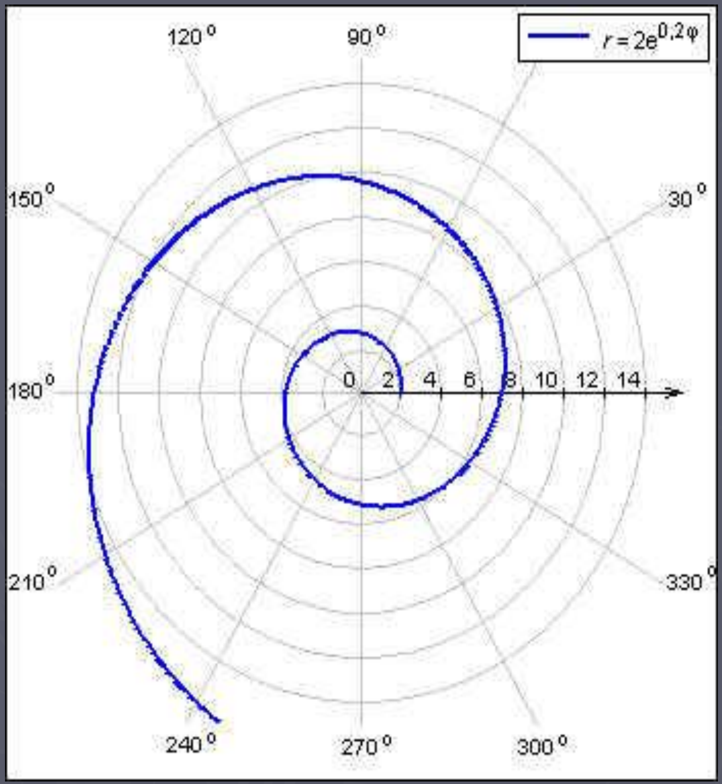
lg Nmp = lg n + m lg2 +p(lg2)/12,

lg Nmp = lg n + (m + p/12)lg2.

Принимая частоту самого низкого “до” за единицу (n = 1) и приводя все логарифмы к основанию 2 имеем:

$$\log_2 N_{mp} = m + \frac{p}{12}$$

Логарифмическая спираль



Спирали – плоские кривые линии, многократно обходящие одну из точек на плоскости, называемую полюсом спирали. Логарифмическая спираль имеет бесконечное множество витков и при раскручивании, и при скручивании. Последнее означает, что она не проходит через свой полюс. Логарифмическая спираль является траекторией точки, которая движется вдоль равномерно вращающейся прямой, удаляясь от полюса со скоростью, пропорциональной пройденному расстоянию. Точнее, в логарифмической спирали углу поворота пропорционален логарифм этого расстояния.

Первым ученым, открывшим эту удивительную кривую, был Рене Декарт (1596-1650г.г.).
Логарифмическая спираль часто используется в технических устройствах. Например, вращающиеся ножи имеют профиль, очерченный по логарифмической спирали- под постоянным углом к разрезаемой поверхности, благодаря чему лезвие ножа стачивается равномерно. Ночные бабочки, которые пролетаю большие расстояние, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полета и лучом света. Если же они ориентируются на точечный источник света, скажем, на пламя свечи, то инстинкт их подводит, и бабочки попадают в пламя по скручивающейся логарифмической спирали.

Особенности логарифмической спирали поражали не только математиков. Ее свойства удивляют и биологов, которые считают именно эту спираль своего рода стандартом биологических объектов самой разной природы. Например, раковины морских животных могут расти лишь в одном направлении. Чтобы не слишком вытягиваться в длину, им приходится скручиваться, причем каждый следующий виток подобен предыдущему. А такой рост может совершаться лишь по логарифмической спирали или ее аналогиям. Поэтому раковины многих моллюсков, улиток, закручены по логарифмической спирали. Один из наиболее распространенных пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает нити вокруг центра по логарифмической спирали. Хищные птицы кружат над добычей по логарифмической спирали. Дело в том, что они лучше видят, если смотрят не прямо на добычу, а чуть в сторону.

Логарифмический софизм

Что за прелесть «Логарифмическая комедия 2 > 3»

Комедия начинается с неравенства $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ бесспорно правильного.

Затем следует преобразование $$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

тоже не внушающее сомнение. Большему числу соответствует больший логарифм, значит,

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad 2\lg\frac{1}{2} > 3\lg\frac{1}{2}$$

После сокращения на lg получаем: 2>3. В чем ошибка этого рассуждения? Ошибка в том, что $\lg\frac{1}{2}<0$, поэтому после сокращения на него знак неравенства надо было поменять.

Логарифмическая головоломка

На съезде физиков в Одессе участники развлекались одной остроумной головоломкой. Предлагается задача: любое данное число, целое и положительное, изобразить с помощью трех двоек и математических символов.

Покажем, как задача решается на примере цифры 3.

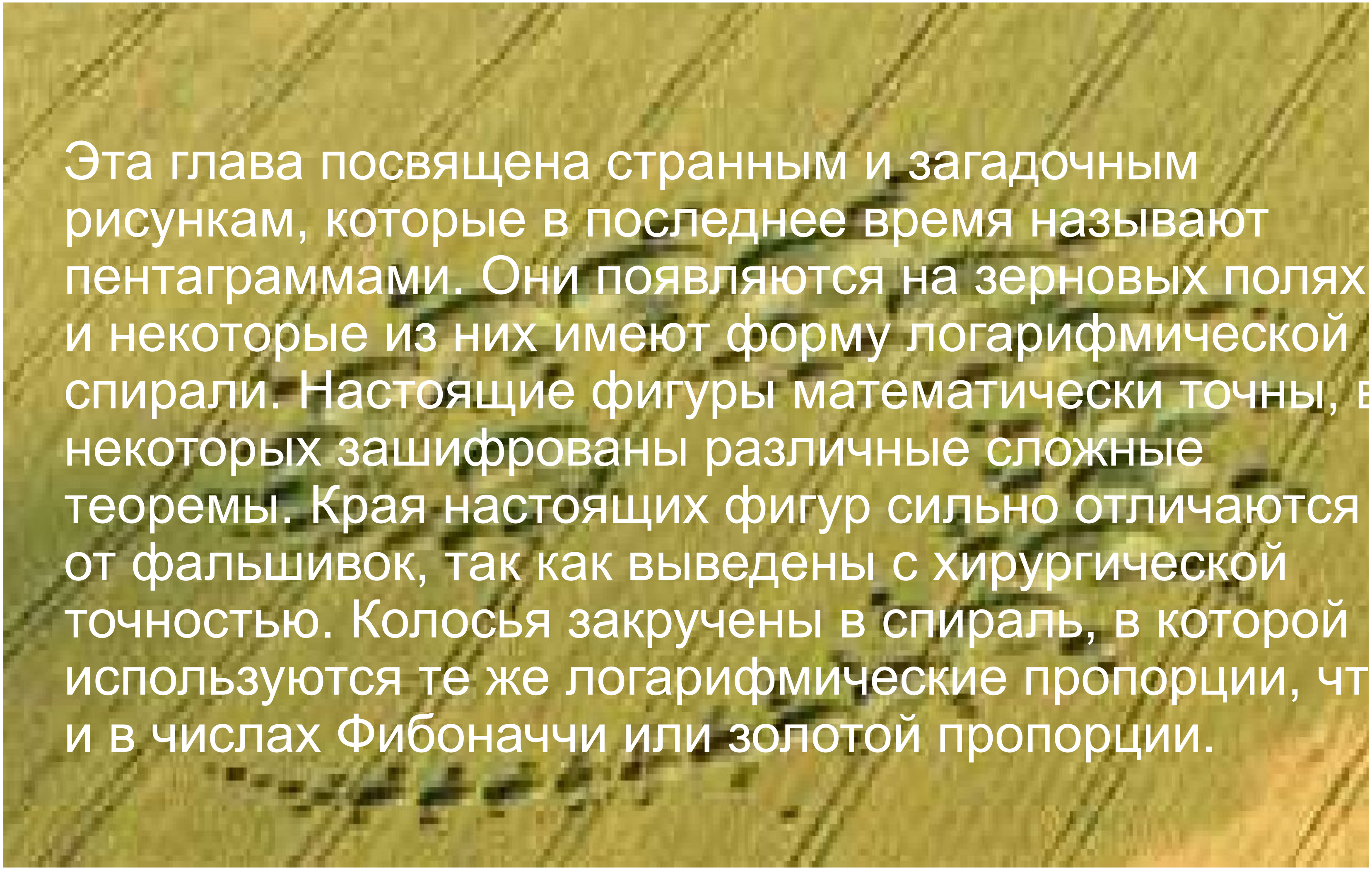
$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

Действительно,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}} \qquad \log_2 2^{2^{-3}} = 2^{-3} \qquad -\log_2 2^{-3} = 3$$

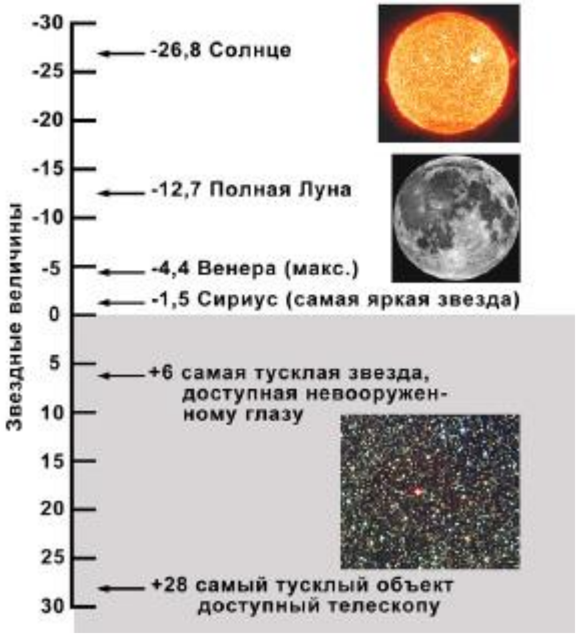
Как видим, мы используем здесь то, что при квадратном радикале показатель корня не пишется. Общее решение задачи таково. Если заданное число N, то число радикалов равно числу единиц в этом числе.

Логарифмические пришельцы



Эта глава посвящена странным и загадочным рисункам, которые в последнее время называют пентаграммами. Они появляются на зерновых полях и некоторые из них имеют форму логарифмической спирали. Настоящие фигуры математически точны, в некоторых зашифрованы различные сложные теоремы. Края настоящих фигур сильно отличаются от фальшивок, так как выведены с хирургической точностью. Колосья закручены в спираль, в которой используются те же логарифмические пропорции, чт и в числах Фибоначчи или золотой пропорции.

Шум, яркость звезд и логарифмы



Блеск в астрономии — величина пропорциональная логарифму светового потока. Однако коэффициент пропорциональности отрицателен (при основании логарифма больше единицы), поэтому самым ярким объектам на небе соответствует большая отрицательная величина (–26,8 для Солнца), а для самых тусклых — положительная (28 для едва различимых в телескоп звезд)

Сходным образом оценивается и громкость шума. В шкале обычных десятичных логарифмов единица измерения называется бел в честь американского изобретателя телефона Александера Белла (1847–1922). Чаще применяется её десятая часть — децибел. Обе единицы в основном используются в акустике для измерения уровня интенсивности звука и звукового давления, а также в электротехнике. Разность уровней в 1 дБ означает отношение в 100,1 =1,2589… раз. Три децибела почти точно означают удвоение. В акустике за ноль-пункт принимают еле слышимый звук (давление около 2×10–5 Н/м2), так что при уровне громкости в 90 дБ звуковое давление на барабанную перепонку в миллиард раз больше, чем при едва уловимом шепоте. Громкость шума, выраженная в Беллах, равна десятичному логарифму его физической силы.

Завещание на сотни лет

Известно завещание знаменитого американского государственного деятеля Веньямина Франклина. Оно опубликовано в «Собрания различных сочинений Веньямина Франклина» Вот извлечение из него: «Препоручаю тысячу фунтов стерлингов бостонским жителям. Если они примут эту тысячу фунтов, то должны поручить ее отборнейшим гражданам, а они будут давать их с процентами, по 5 на 100 в год, в заем молодым ремесленникам. Сумма эта через сто лет возвысится до 131000 фунтов стерлингов. Я желаю, чтобы тогда 100000 фунтов были употреблены на постройку общественных зданий, остальные же 31000 фунтов отданы были в проценты на 100 лет. По истечению второго столетия сумма возрастет до 4060000 фунтов стерлингов. Из коих 1060000 фунтов оставляю в распоряжение бостонских жителей, а 3000000 – правлению Массачусетской общины. Далее не осмеливаюсь простирать своих видов».

Завещание на сотни лет

Оставляя всего 1000 фунтов, Франклин распределяет миллионы. Математический расчет подтверждает, что соображения завещателя вполне реальны. 1000 фунтов, увеличиваясь в 1,05 раза, через 100 лет должны превратиться в фунтов. Это выражение можно вычислить с помощью логарифмов lg x= lg 1000 + +100lg1, 05 = 5,11893 откуда x = 131000 в согласии с текстом завещания. Далее 31000 фунтов в течение следующего столетия превращается в сумму

y = $31000 \cdot 1{,}05^{100}$, откуда вычисляя с помощью логарифмов, находим

y = 4076000, сумму, несущественно отличающуюся от условия завещания.

Заключение

В этом проекте мы еще раз убедились в том, что математика это универсальный язык, используя который, как инструмент познания мира, можно увидеть в нем гармонию, красоту, а самое главное проявление закономерности в вещах, на первый взгляд никак между собой не связанных. Возможно, язык математики станет универсальным ключом к познанию мирозданья и перевернет представление человечества о пространстве и времени.