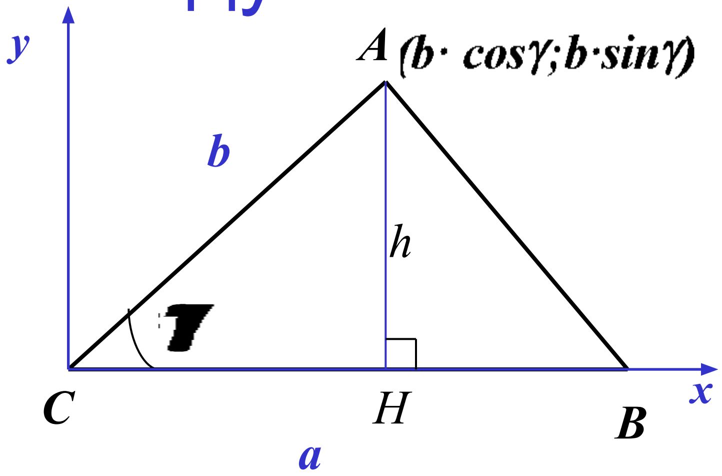
Теорема о площади треугольника

•Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.



Дано: ΔABC, $BC=a$, $CA=b$, $\angle C=\gamma$

Доказать: $S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma$

Доказательство:

Введём прямоугольную систему координат ,
тогда координаты точки
A (b cosγ; b sinγ)

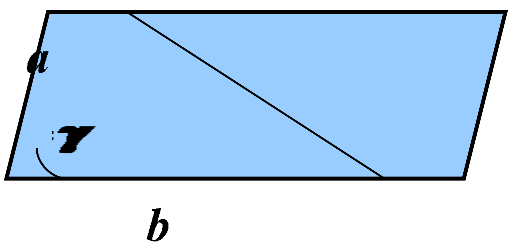
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h,$$

$$h=b\cdot \sin\gamma$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin\gamma$$

Следствие 1

- Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними



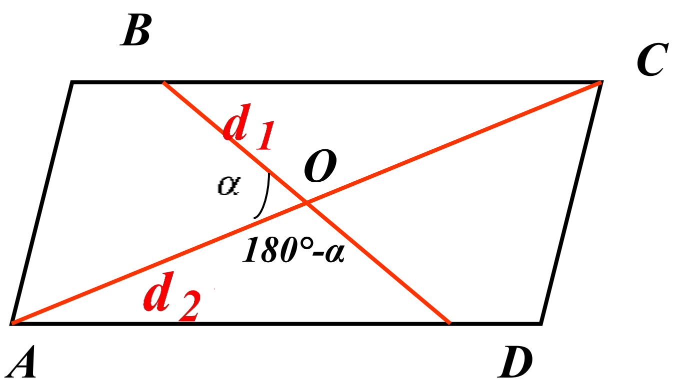
$$S_{пар} = a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

- (докажите самостоятельно)

Диагональ параллелограмма , делит его на два равновеликих треугольника : $S_{\Delta} = \frac{1}{2} a\, b \sin\gamma$, $S_{пар} = a\, b \sin\gamma$

Следствие 2

- Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними



Дано: *ABCD- параллелограмм,*

$BD=d_1,\ AC=d_2,\ \angle AOB=\alpha$

Доказать: $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$

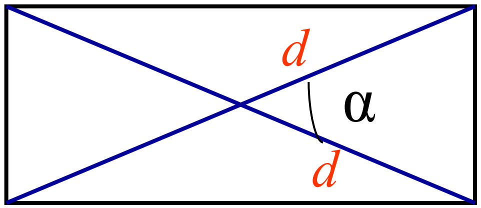
Доказательство:

По свойству параллелограмма $S_{AOB}=S_{COD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin\alpha=\frac{d_1\cdot d_2}{8}\sin\alpha,$

$S_{BOC}=S_{AOD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}\sin\alpha=\frac{d_1\cdot d_2}{8}\sin\alpha,$

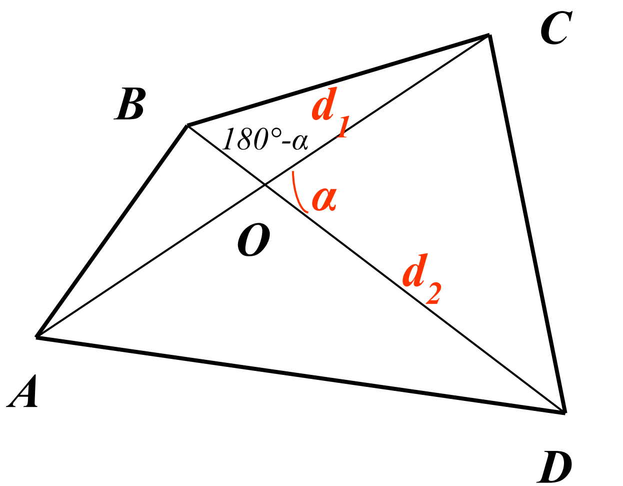
т.к. $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha.$ Значит, $S_{пар}=4\cdot S_\Delta=4\cdot\frac{d_1\cdot d_2}{8}\sin\alpha,=\frac{d_1\ d_2}{2}\sin\alpha$

Площадь прямоугольника



$$S=\frac{1}{2}\cdot d^2\cdot\sin\alpha$$

Площадь произвольного четырёхугольника



Дано: *ABCD- 4-угольник,*

BD=d_1, AC=d_2, ∠COD=α

Доказать: $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$

Доказательство:

$$S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}$$

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{COB}=\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{COD}=\frac{1}{2}CO\cdot DO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{AOD}=\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}CO\cdot BO\cdot\sin\alpha+$$

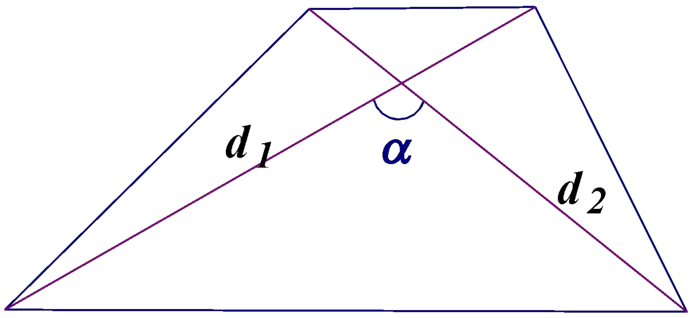
$$+\frac{1}{2}CO\cdot DO\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}DO\cdot AO\cdot\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}BO\cdot\sin\alpha\cdot\underbrace{(AO+OC)}_{AC}+\frac{1}{2}DO\cdot\sin\alpha\cdot\underbrace{(AO+OC)}_{AC}=$$

$$=\frac{1}{2}AC\cdot\sin\alpha\underbrace{(BO+OD)}_{BD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$$

Площадь трапеции

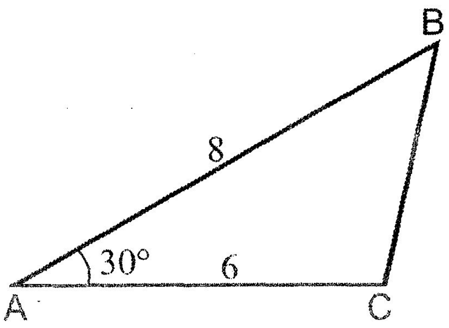


$$S=\frac{1}{2}\,d_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha$$

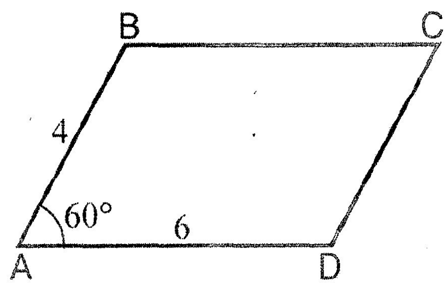
Задания по готовым чертежам

Вычислите площадь

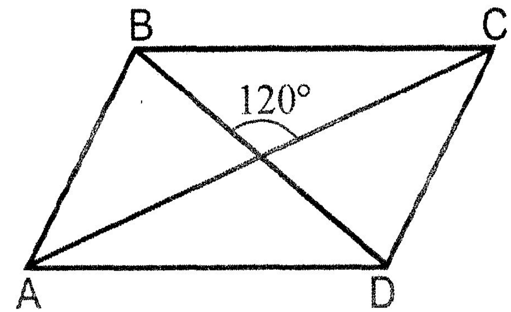
№ 1.



№ 2.



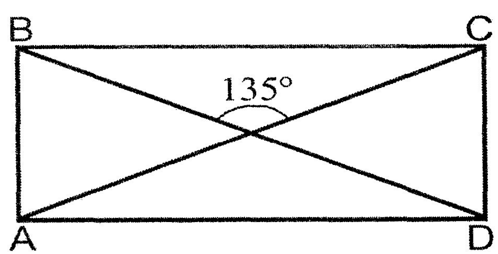
№3.



$ABCD$ – параллелограмм.

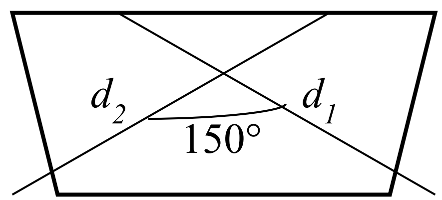
$BD = 6$, $AC = 10$.

№4

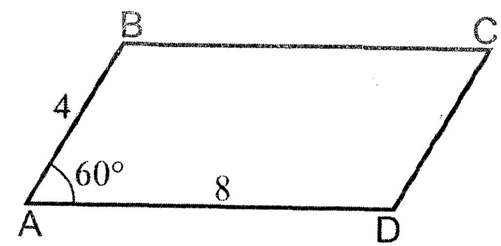


$ABCD$ – прямоугольник. $AC = 12$.

№5



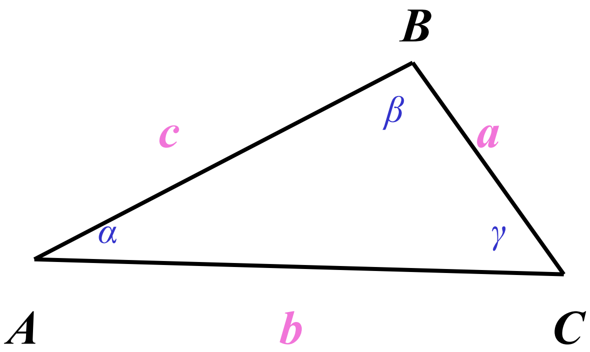
№6



Найти: высоты параллелограмма

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов



Дано: $\Delta ABC, AB=c,\ BC=a,\ AC=b$

Доказать: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

Доказательство:

$$\left.\begin{aligned} S_{ABC}&=\frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha \\ S_{ABC}&=\frac{1}{2}\,c\,a\sin\beta \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha=\frac{1}{2}\,c\,a\sin\beta \Rightarrow b\sin\alpha=a\sin\beta \ \Big|:(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$$

следовательно, $\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

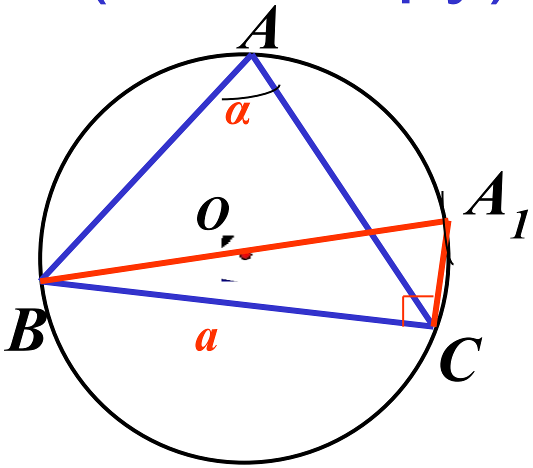
$$\left.\begin{aligned} S_{ABC}&=\frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha \\ S_{ABC}&=\frac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{1}{2}\,c\,b\sin\alpha=\frac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma \Rightarrow c\sin\alpha=a\sin\gamma \ \Big|:(\sin\alpha\cdot\sin\gamma),$$

следовательно, $\dfrac{c}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

Значит, $\dfrac{c}{\sin\gamma}=\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$

Следствие 1

Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно двум радиусам (диаметру) описанной окружности.



Дано: $\omega(O;R)$, ΔABC, $BC=a$, $\angle A=\alpha$

Доказать: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$

Доказательство: 1 случай

Рассмотрим остроугольный треугольник

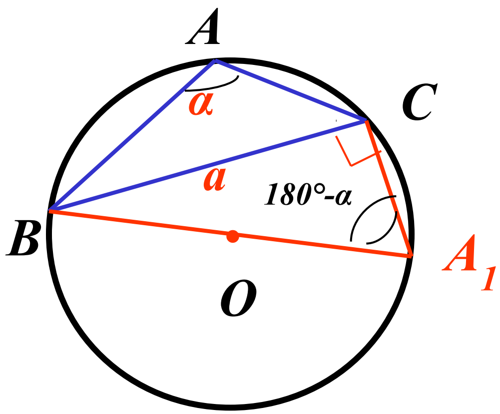
1) Проведём диаметр BA_1

2) $\Delta BCA_1: \angle C=90^\circ$ (по свойству вписанного угла, опирающегося на диаметр)

3) $\angle A=\angle A_1=\alpha$ (по свойству вписанных углов, опирающихся на одну дугу), значит, $\sin\angle A=\sin\angle A_1=\sin\alpha$

4) $\Delta BCA_1: \angle C=90^\circ$, $\sin\angle A_1=\dfrac{BC}{BA_1}$, т.е. $\sin\alpha=\dfrac{a}{2R}$, отсюда $2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

2 случай *ΔABC- тупоугольный (докажите самостоятельно)*



Следствие 2

- Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4R}$
- $a,\ b,\ c$ – стороны треугольника,

R – радиус окружности ,описанной около треугольника .

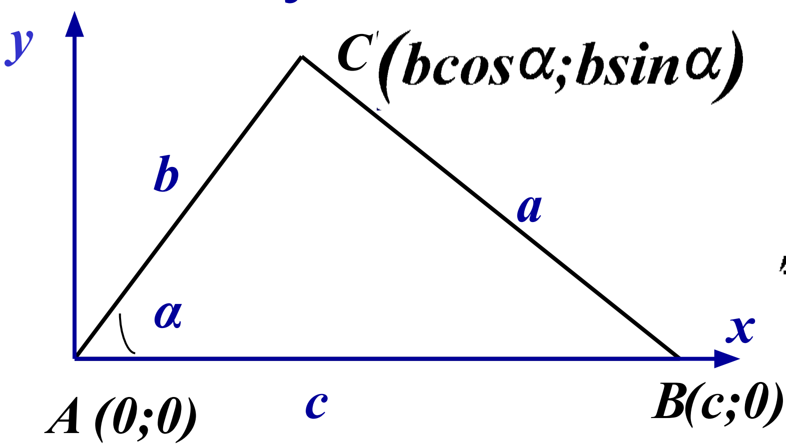
(*докажите самостоятельно, используя теорему о площади треугольника и следствие из теоремы синусов*)

$$S=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot \sin\alpha \qquad \frac{a}{\sin\alpha}=2R \qquad \sin\alpha=\frac{a}{2R}$$

Значит, $S=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4R}$

Теорема косинусов

- Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



Дано: $\Delta ABC,\ AB = c,\ AC = b,$
$CB = a,\ \angle A = \alpha$

Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Доказательство:

Введём прямоугльную систему координат

По формуле расстояния между двумя точками получаем:

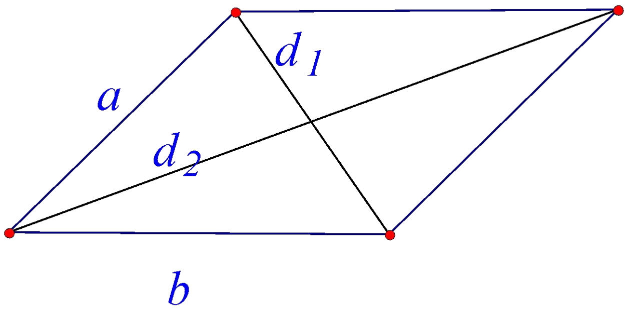
$$BC^2 = a^2 = (b\cos\alpha - c)^2 + b^2\sin^2\alpha = \underline{b^2\cos^2\alpha} - 2bc\cos\alpha + c^2 + \underline{b^2\sin^2\alpha} =$$

$$= b^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Докажите самостоятельно , используя теорему

косинусов , следующее утверждение:

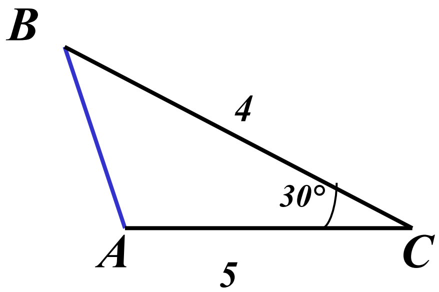
- Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

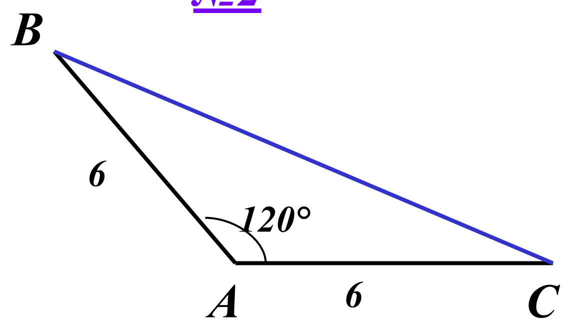
Задания по готовым чертежам

№1



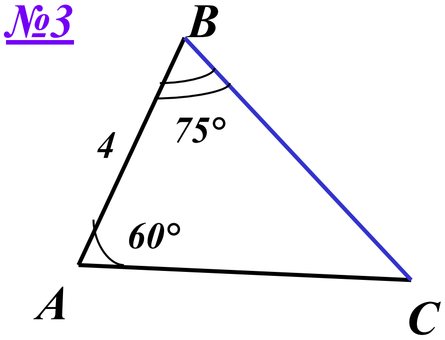
Найти: AB

№2



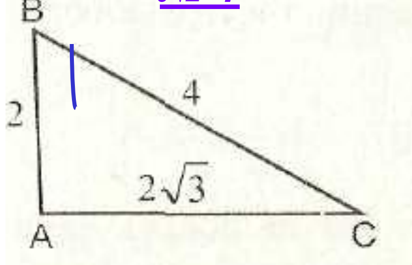
Найти: BC

№3



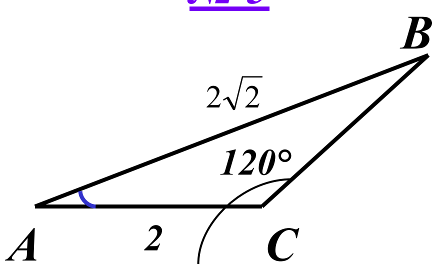
Найти: BC

№ 4



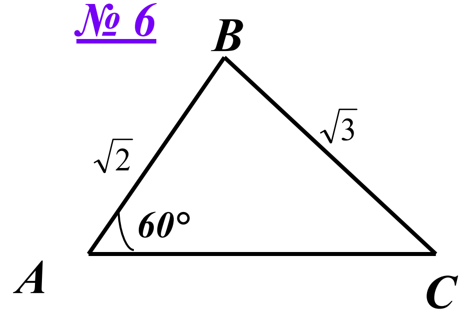
Найти: $\angle$***B*.**

№ 5



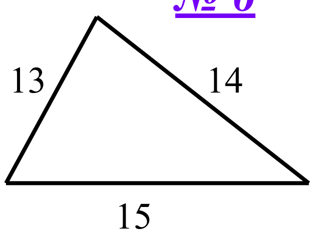
Найти: $\angle$***A*.**

№ 6



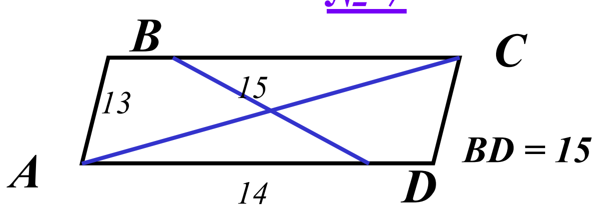
Найти: $\angle$ ***B и R****(радиус описанной окружности)*

№ 6



Найти: R*(радиус описанной окружности)*

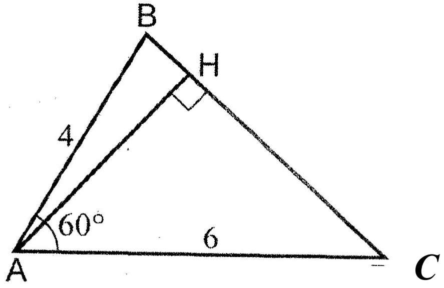
№ 7



Найти: AC

Задания по готовым чертежам

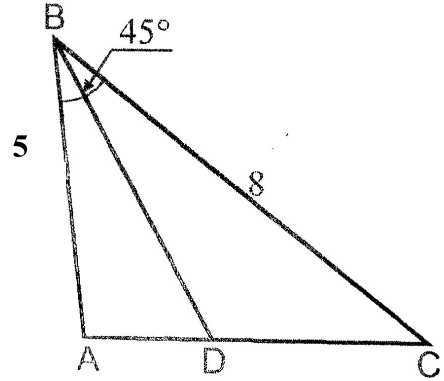
№1



BC**=** $2\sqrt{7}$

Найти : AH

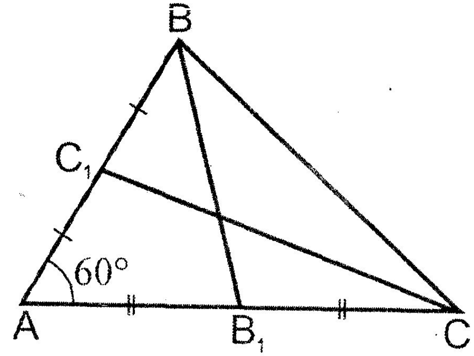
№2



BD- *биссектриса*

Найти : S_{ABD} **,** S_{BDC}

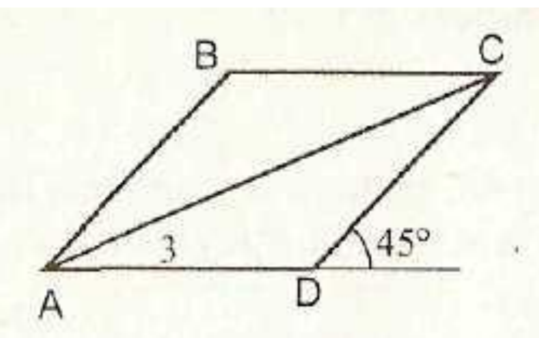
№3



AB=10, AC=14.

Найти: S_{BOC},

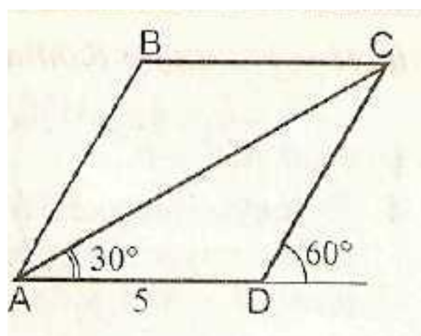
№4



ABCD *- ромб*

Найти : AC

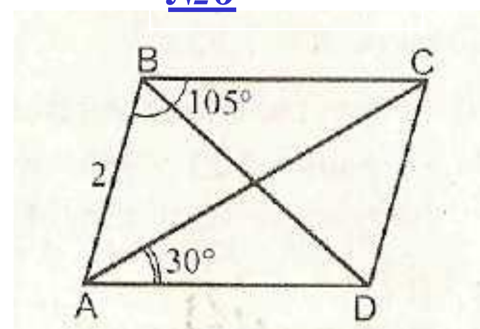
№5



ABCD *- параллелограмм*

Найти : AC

№6



ABCD *- параллелограмм*

Найти : BC