

Линейные пространства

- Базис линейного пространства
- Подпространства линейного пространства
- Линейные операторы
- Собственные векторы и собственные значения
- Скалярное произведение векторов
- Евклидово пространство
- Процесс ортогонализации векторов
- Длина вектора
- Элементы общей алгебры

Определение. Множество L называется *вещественным линейным пространством*, если для любых элементов $a, b, c \in L$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ выполняются условия:

1. $a + b = b + a$;

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$;

3. Существует нулевой элемент o , что $a + o = a$;

4. Для любого $a \in L$ существует противоположный элемент $-a \in L$ такой, что $a + (-a) = o$;

5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;

6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;

7. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;

8. $1a = a$.

Лемма 1.1. Пусть L – вещественное линейное пространство. Тогда для любых элементов $a, b \in L$ и любых действительных чисел α, β справедливы следующие утверждения:

1 $0 \cdot a = o, \quad \alpha \cdot o = o;$

2 $(-\alpha) \cdot a = \alpha \cdot (-a) = -\alpha a, \quad (-\alpha) \cdot (-a) = \alpha a;$

3 $\alpha \cdot (a - b) = \alpha \cdot a - \alpha \cdot b, \quad (\alpha - \beta) \cdot a = \alpha \cdot a - \beta \cdot a.$

1. $a + b = b + a$;
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3. Существует нулевой элемент o , что $a + o = a$;
4. Для любого $a \in L$ существует противоположный элемент $-a \in L$ такой, что $a + (-a) = o$;
5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
7. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
8. $1a = a$.

Пусть M – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа,

$m_1, m_2, \dots, m_k \in M$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – числа.

Тогда $\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \dots + \alpha_k \cdot m_k$ – *линейная комбинация* элементов m_1, m_2, \dots, m_k .

Если $m = \alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \dots + \alpha_k \cdot m_k$, то говорят, что m *линейно выражается* через элементы m_1, m_2, \dots, m_k .

L – линейное пространство, $a_1, a_2, \dots, a_k \in L$.

Определение. Говорят, что векторы a_1, a_2, \dots, a_k **линейно зависимы**, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_k \cdot a_k = 0$ (нулевому элементу линейного пространства L).

Если же равенство $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_k \cdot a_k = 0$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, то векторы a_1, a_2, \dots, a_k называют **линейно независимыми**.

Лемма 2.1. Векторы a_1, a_2, \dots, a_k линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.

Доказательство.

Смотри лемму о линейной зависимости строк (столбцов) матрицы (§4, глава 1) или лемму 3.1 о линейной зависимости свободных векторов (§3, глава 2).

Примеры.

$$1. \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. g_1(x) = 1, g_2(x) = x, g_3(x) = x^2, g_4(x) = (1+x)^2.$$

$$3. \mathbf{a}_1 = (2; -3; 1), \mathbf{a}_2 = (3; -1; 5), \mathbf{a}_3 = (1; -4; 3).$$

Определение. Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется *базисом* этого линейного пространства.

$e_1, e_2, \dots, e_n \in L$ – базис, если

- 1) e_1, e_2, \dots, e_n – линейно независимы;
- 2) e_1, e_2, \dots, e_n, a – линейно зависимы для любого a из L .

Теорема 2.2. Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то пространство называют *конечномерным*, а n называют *размерностью* линейного пространства.

$$\dim L = n$$

Если в линейном пространстве L для любого натурального n можно найти линейно независимую систему векторов, то пространство называют *бесконечномерным*.

$$\dim L = \infty$$

Теорема 2.3 (о базисе). Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.

Доказательство.

Доказательство этой теоремы полностью совпадает с доказательством теоремы 3.6 (глава 2, §3).

Определение. Коэффициенты в разложении вектора по базису называются ***координатами*** этого вектора в данном базисе.

Теорема 2.4. 1) Если вектор a имеет в базисе e_1, e_2, \dots, e_n координаты $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, а вектор b имеет в том же базисе координаты $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, то вектор $a + b$ будет иметь в базисе e_1, e_2, \dots, e_n координаты $\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n\}$.

2) Если вектор a имеет в базисе e_1, e_2, \dots, e_n координаты $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, то для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ вектор λa будет иметь в том же базисе координаты $\{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n\}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{По условию } a &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \\ b &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } a + b &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) + \\ &\quad + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) e_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и } \lambda a &= \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \\ &= \lambda \alpha_1 e_1 + \lambda \alpha_2 e_2 + \dots + \lambda \alpha_n e_n \end{aligned}$$

Теорема 2.5. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n и e'_1, e'_2, \dots, e'_n – два базиса линейного пространства L . Причем

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n, \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Если вектор a имеет в базисе e_1, e_2, \dots, e_n координаты $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, а в базисе e'_1, e'_2, \dots, e'_n – координаты $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$, то справедливо $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}$,

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ –

так называемая матрица перехода от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису e'_1, e'_2, \dots, e'_n .

Пусть L – вещественное линейное пространство, L_1 – непустое подмножество в L .

Определение. L_1 называется *подпространством* линейного пространства L , если оно само образует линейное пространство относительно операций, определенных на L .

Теорема 3.1 (критерий подпространства). Пусть L – вещественное линейное пространство, L_1 – непустое подмножество в L . L_1 является подпространством линейного пространства L тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in L_1$ и любого действительного α выполняются условия:

- 1) $a - b \in L_1$;
- 2) $\alpha \cdot a \in L_1$.

Пример. M – множество решений системы линейных однородных уравнений с n неизвестными.

Покажем, что M – линейное пространство.

Для этого покажем, что M – подпространство \mathbf{R}^n .

По свойству решений СЛОУ (параграф 6, глава 2) линейная комбинация решений – также решение \Rightarrow

для любых $a, b \in M$ и любого действительного α :

$a - b$ и $\alpha \cdot a$ являются решениями \Rightarrow

$a - b \in M$ и $\alpha \cdot a \in M$.

По критерию подпространства M – подпространство \mathbf{R}^n , то есть само линейное пространство.

Базисом пространства M является ФСР.

$L^{(n)}$ – линейное пространство размерности n .

Определение. Отображение $f : L^{(n)} \rightarrow L^{(n)}$ называется **линейным оператором** линейного пространства $L^{(n)}$, если для $\forall x, y \in L^{(n)}$

$$1) f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$2) f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$$

Замечание. $f(o) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$

Пусть f – линейный оператор пространства $L^{(n)}$,
 e_1, e_2, \dots, e_n – некоторый базис $L^{(n)}$.

Любой вектор линейно выражается через базис \Rightarrow

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ &\quad \vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{– матрица линейного оператора в базисе } e_1, e_2, \dots, e_n$$

$$\text{Из (1)} \Rightarrow \boxed{(f(e_1) \ f(e_2) \ \dots \ f(e_n)) = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \cdot A} \quad (2)$$

$\mathbb{R}^n[x]$, f – оператор дифференцирования

Базис $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$, $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$

$$f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$f(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$f(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

...

$$f(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + (n-1) \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 4.1. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством линейных операторов n -мерного линейного пространства и множеством квадратных матриц порядка n .

Определение. Если f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, то $f(x)$ называют **образом** вектора $x \in L^{(n)}$.

Пусть f – линейный оператор пространства $L^{(n)}$,
 A – матрица линейного оператора f ,
 e_1, e_2, \dots, e_n – некоторый базис $L^{(n)}$.

Теорема 4.2. Если A – матрица линейного оператора f в базисе e_1, e_2, \dots, e_n и вектор x имеет координаты x_1, x_2, \dots, x_n в этом же базисе, то координаты y_1, y_2, \dots, y_n вектора $f(x)$ находятся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \boxed{Y = A \cdot X} \quad (5).$$

$$\begin{aligned}
 f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \boxed{} + a_{n1}e_n \\
 f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \boxed{} + a_{n2}e_n \\
 &\quad \boxed{} \\
 f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \boxed{} + a_{nn}e_n
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \boxed{} & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \boxed{} & a_{2n} \\
 \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\
 a_{n1} & a_{n2} & \boxed{} & a_{nn}
 \end{pmatrix}$$

Лемма 4.3. Если для любого столбца $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \boxtimes \\ x_n \end{pmatrix}$

имеет равенство $Ax = Bx$, где A и B – квадратные матрицы порядка n , то $A = B$.

Теорема 4.4. Если A – матрица линейного оператора f в базисе e_1, e_2, \boxtimes, e_n , то матрица B этого линейного оператора в базисе $e'_1, e'_2, \boxtimes, e'_n$ имеет вид:

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T,$$

где T – матрица перехода от базиса e_1, e_2, \boxtimes, e_n к базису $e'_1, e'_2, \boxtimes, e'_n$.

Определение. Ненулевой вектор $x \in L^{(n)}$ называется **собственным вектором** линейного оператора f , если существует такое $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, что

$$f(x) = \lambda_0 x,$$

при этом λ_0 называют **собственным значением** линейного оператора и говорят, что собственный вектор x *относится* к собственному значению λ_0 .

Теорема 5.1. Собственный вектор линейного оператора относится к единственному собственному значению.

Теорема 5.2 (свойство собственных векторов).

Если x_1, x_2, \dots, x_n — линейно независимые собственные векторы линейного оператора, относящиеся к одному и тому же собственному значению, то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов является собственным вектором, относящимся к этому же собственному значению.

Теорема 5.3. Собственные векторы x_1 и x_2 линейного оператора, относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы.

Теорема 5.4. Собственные векторы линейного оператора, относящиеся к его попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Пусть f – линейный оператор пространства $L^{(n)}$,
 A – его матрица в некотором базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Определение. Матрица $\lambda E - A$ называется **характеристической матрицей** оператора f .

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

– многочлен от λ степени n .

Определение. Определитель $|\lambda E - A|$ называется **характеристическим многочленом** оператора f .

Теорема 5.5. Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом линейного оператора.

Определение. Корни характеристического многочлена, то есть корни уравнения $|\lambda E - A| = 0$, называются **характеристическими корнями** линейного оператора.

Теорема 5.6. 1) Любое собственное значение линейного оператора является его характеристическим корнем.

2) Любой вещественный характеристический корень линейного оператора является его собственным значением.

Определение. Оператор называется *диагонализируемым*, если существует базис, относительно которого его матрица диагональная.

Теорема 5.7 (критерий диагонализируемости линейного оператора). Оператор является диагонализируемым тогда и только тогда, когда в пространстве существует базис, каждый вектор которого является собственным вектором этого оператора.

Определение. Пусть $L^{(n)}$ – вещественное линейное пространство. Отображение, ставящее в соответствие каждой паре векторов $x, y \in L^{(n)}$ некоторое вещественное число, обозначаемое (x, y) , называется **скалярным произведением** векторов, если для $\forall x, y \in L^{(n)}$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ выполняется:

$$1) (x, y) = (y, x);$$

$$2) (\alpha x, y) = \alpha(x, y);$$

$$3) (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$$

$$4) (x, x) \geq 0, \text{ причём } (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Замечания. 1) $(x, \alpha y) = (\alpha y, x) = \alpha(y, x) = \alpha(x, y)$

$$2) (x, y_1 + y_2) = (y_1 + y_2, x) = (y_1, x) + (y_2, x) = (x, y_1) + (x, y_2)$$

$$3) (x, o) = (x, 0 \cdot y) = 0 \cdot (x, y) = 0$$

Определение. Вещественное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение векторов, называется ***евклидовым***.

$E^{(n)}$

Определение. Векторы $x, y \in E^{(n)}$ называются ***ортгоналными***, если $(x, y) = 0$.

Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n \in E^{(n)}$ называется ***ортгоналной***, если эти векторы попарно ортгоналны.

Теорема 6.1. Любая ортгоналная система ненулевых векторов является линейно независимой.

Процесс ортогонализации векторов Грама – Шмидта

Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – линейно независимая система векторов пространства $E^{(n)}$.

Построим с помощью этой системы векторов ортогональную систему ненулевых векторов b_1, b_2, \dots, b_n

Замечание. b_1, b_2, \dots, b_n – ортогональная система ненулевых векторов \Rightarrow по теореме 6.1 является линейно независимой.

Определение. **Длиной** вектора $x \in E^{(n)}$ называется

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

Также говорят **модуль** вектора или **норма** вектора.

Определение. Базис e_1, e_2, \dots, e_n евклидова пространства называется **ортогональным**, если $(e_i, e_k) = 0$ при $i \neq k$.

Базис e_1, e_2, \dots, e_n евклидова пространства называется **ортонормированным**, если

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

Замечание. Если e_1, e_2, \dots, e_n – ортонормированный базис, то векторы e_1, e_2, \dots, e_n – попарно ортогональны и $|e_1| = |e_2| = \dots = |e_n| = 1$.

Теорема 6.2. В любом евклидовом пространстве существуют ортонормированные базисы.

Теорема 6.3 (неравенство Коши–Буняковского).

Для $\forall x, y \in E^{(n)}$ $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$.

Определение. Углом между векторами $x, y \in E^{(n)}$ называется угол, косинус которого равен

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

Определение. Говорят, что на множестве M задана **бинарная алгебраическая операция**, если любой паре элементов из этого множества ставится в соответствие однозначно определённый элемент из этого же множества.

$$\langle M, * \rangle$$

Определение. Множество M с введённой на нём бинарной алгебраической операцией называется **полугруппой**, если для любых элементов $a, b, c \in M$ выполняется

$$a * (b * c) = (a * b) * c,$$

то есть выполняется закон ассоциативности.

Определение. Пусть на множестве M задана бинарная алгебраическая операция $*$.

Элемент $e \in M$ называется *нейтральным*, если для любого элемента $a \in M$ выполняется

$$a * e = e * a = a .$$

Элемент $a' \in M$ называется *симметричным* к элементу $a \in M$, если

$$a * a' = a' * a = e .$$

Лемма 7.1. Если нейтральный элемент существует, то он – единственный.

Лемма 7.2. Пусть $\langle M, * \rangle$ – полугруппа. Если элемент $a \in M$ имеет симметричный элемент, то этот симметричный элемент – единственный.

Определение. Множество M с введённой на нём бинарной алгебраической операцией называется *группой*, если

- 1) M – полугруппа;
- 2) в M существует нейтральный элемент;
- 3) для любого элемента $a \in M$ существует симметричный элемент.

Определение. Группа $\langle M, * \rangle$ называется *абелевой (коммутативной)*, если для любых элементов $a, b \in M$ выполняется

$$a * b = b * a.$$

Определение. Пусть M – множество, на котором заданы две алгебраические операции, которые будем называть сложение и умножение. Множество M называется *кольцом*, если

1) $\langle M, + \rangle$ – абелева группа;

2) $\langle M, \cdot \rangle$ – полугруппа;

3) сложение и умножение в M связаны законами дистрибутивности, то есть для любых элементов $a, b, c \in M$ выполняется $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Лемма 7.3. Пусть M – кольцо. Тогда для любого элемента $a \in M$ выполняется

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Определение. Пусть M – произвольное кольцо, $a, b \in M$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, но $ab = 0$. В этом случае элементы a и b называют *делителями* нуля, элемент a – *левым*, элемент b – *правым*.

Определение. Кольцо M называется *коммутативным*, если для умножения выполняется коммутативный закон, то есть для любых элементов $a, b \in M$ выполняется

$$a \cdot b = b \cdot a .$$

Определение. Коммутативное кольцо называется *полем*, если оно состоит не только из одного нулевого элемента и все элементы, отличные от нуля, образуют группу относительно операции умножения.

$\langle M, +, \cdot \rangle$ – поле, если

- 1) $M \neq \{0\}$;
- 2) $\langle M, + \rangle$ – абелева группа;
- 3) $\langle M \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ – абелева группа;
- 4) сложение и умножение в M связаны законами дистрибутивности.

Характерные отличия поля от кольца:

1. Любое поле содержит единичный элемент, так как относительно умножения все элементы, отличные от нулевого, образуют группу.

Кольцо не обязательно содержит единичный элемент.

2. Поле не содержит делителей нуля.

3. В поле справедлив закон сокращения для умножения, в кольце он необязательно имеет место.