Научное направление “Оптика мутных сред” на кафедре светотехники

Будак Владимир Павлович,

Московский энергетический институт (ТУ)

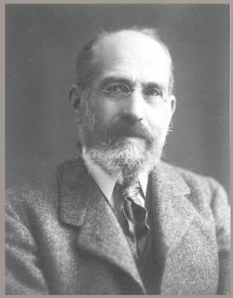
кафедра светотехники

□: +7 (095) 362-7067 BudakVP@mpei.ru

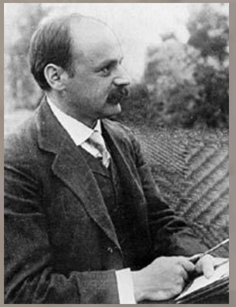
Уравнение переноса излучения

Chwolson O.D. Grundzüge einer matimatischen Theorie der inneren Diffusion des Licht //Melanges phys. et chim. tires du Bull. De l'Acad. Imp. de Sci. de St.-Petersb., 1889. V. XIII, Livr.3. - 83P.

Lommel E. Die Photometric der diffusen Zuruckwerfung// Sitzber. Acad. Wissensch. Munchen, 1889, 17, S.95-124.



Schuster A. The influence of radiation of the transmission of heat // Phil.Mag., 1903. V.5(6), N24. - P.243-257.
Schwarzschild K. Ueber das Gleichgewicht der Sonnenatmos-phäre //Nachr. Konig.Gesel. der Wiss., Gottingen, 1906. Math.-Phys. Klasse. H.1. - S.41-53.



УПИ – единственное уравнение классической матфизики сформулированное российской научной школой

Теория переноса и лазеры

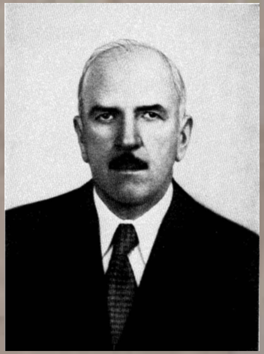
Menzel D. Physical processes in gaseous nebulae. I. Absorption and emission radiation // Ap. J. , 1937, 85, p.330

Outside of thermodynamic equilibrium, the condition may conceivably arise when the value of the integral turns out to be negative. The physical significance of such a result is that energy is emitted rather than absorbed. This energy must be distinguished, however, from that arising in random emissions. The process merely puts energy back into the original beam, as if the atmosphere had a negative opacity. This extreme will probably never occur in practice.

В теории переноса возникает возможность усиления света

Теория переноса в МЭИ

Гинзбург В.Л., Пульвер В.А., Фабрикант В.А. К рассеянию света в сильно мутных средах //Тр. ГОИ, 1936. Т.10, №97. С.24-42.



Биберман Л.М. К теории диффузии резонансного излучения // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. № 5. С. 416.

Векленко Б.А. О функции Грина уравнения диффузии излучения // ЖЭТФ, 1957,т.33, Вып.3(9),817-819.

Теория переноса – важное направление исследований на ЭТФ

Теория переноса в светотехнике

Гуревич М.М. О рациональной классификации свето-рассеивающих веществ // Тр. ГОИ, 1931, 6, 57, 1-8

Гершун А.А. Прохождение света через плоский слой светораасеивающей среды // Тр. ГОИ, 1931, 11, 43, 99

Савенков В.И., Мельников Г.А. О решении интегрального уравнения переноса применительно к световым полям в водных средах, создаваемых искусственными источниками /В кн.: Световые поля в океане. - М.: ИО АН СССР, 1979. С.98-109.

$$(\hat{\mathbf{l}},\nabla)L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})+\varepsilon L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}})=\frac{\varepsilon\Lambda}{4\pi}\int L(\mathbf{r},\hat{\mathbf{l}}')x(\hat{\mathbf{l}}',\hat{\mathbf{l}})d\hat{\mathbf{l}}'$$

С 1981 года на кафедре действует еженедельный научный семинар «Фотометрическая теория диффузного светового поля»

Заслуга Савенкова В.И., Мельникова Г.А., что они определили задачи светового поля, как краевые задачи УПИ

Состояние теории переноса в мире

1. Амбарцумян В.А. К задаче о диффузном отражении света //ЖЭТФ, 1943. Т.13, №9-10. С.323-334.
2. Wick G.C. Über ebene Diffussionsprobleme //Zeit. f. Phys., 1943. B.121, H.11-12. S.702-718.
3. Jeans J.H. The equations of radiative transfer of energy //Mon. Not. R. Astr. Soc., 1917. V.78. P.28-36.
4. Bothe W. Die Streuabsorption der Elektronenstrahlen //Zeit.f. Physik, 1929. B.54, H.3. -S.161-178.
5. Goudsmit S., Saunderson J.L. Multiple Scattering of Electrons //Phys.Rev., 1940. Part I. V.57. -P.24-29; -Part II. V.58. -P.36-42.
6. Компанеец А.С. Многократное рассеяние тонких пучков быстрых электронов //ЖЭТФ, 1947. Т.17, N12. -С.1059-1062.
7. Dave J.V. A direct solution of the spherical harmonics approximation to the radiative transfer equation for arbitrary solar elevation. Part I: Theory // J. Atm. Sci., 1975. V.32. PP.790-798.

Центральной проблемой теории оставалось сильно анизотропное рассеяние

Особенности развития в нашей стране

1. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / Под общ. ред. Марчука Г.И. - Новосибирск: Наука, 1976. - 284С.
2. Зеге Э.П, Иванов А.П, Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающих средах. - Минск: Наука и техника, 1985. - 240С.
3. Гермогенова Т.А., Басс Л.П., Волощенко А.М. Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. - М.: ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1986, С.231

Этапы развития теории переноса на кафедре светотехники

I. Будак В.П., Мельников Г.А., Савенков В.И., Федосов В.П. (1978 – 1989)
  - Формулировка задач теории светового поля, как краевых задач УПИ
  - МСГ для точечного изотропного источника (ТИМИС)
  - Численные методы решения УПИ

II. Астахов И.Е., Барцев А.А., Будак В.П., Лисицин Д.В., Сармин С.Э., Церетели Г.Г.
  - Поляризация – векторное УПИ (1989 – 1995)
  - Теория переноса изображения
  - Энергетический расчет, как краевая задача УПИ

III. Будак В.П., Векленко Б.Б., Петровичев В.А., Козельский А.В., Савицкий Е.Н.
  - Точечный мононаправленный источник поляризованного света (1996-02)
  - Метод выделения анизотропной части решения
  - Глобальное освещение, как краевая задача УПИ

IV. Будак В.П., Желтов В.С., Клюйков Д.А., Коркин С.Э., Макаров Д.Н., Меламед О.П., Муханов П.В., Смирнов П.А. (2002 - …)
  - Математическая модель отражения поляризованного света 3М объемом вещества
  - Глобальное освещение и энергетический расчет

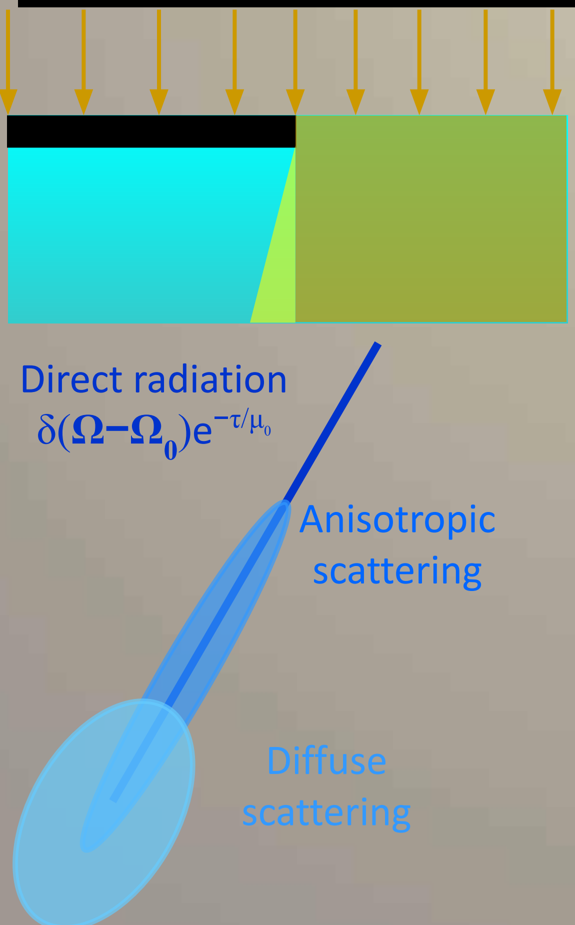
МСГ сводит систему дифференциальных уравнений к одному уравнению в частных производных

Малоугловая модификация метода сферических гармоник (МСГ)

1. Будак В.П., Савенков В.И. Расчет светового поля точечного изотропного монохроматического источника света методом сферических гармоник // Тр. Моск.энерг.ин-т, 1980. N488.-С.42-50.
2. Будак В.П., Савенков В.И. О новом решении уравнения переноса излучения в рамках малоуглового приближения //Тр.Моск. энерг. ин-т, 1982. N591. - С.141-144.
3. Будак В.П., Мельников Г.А, Савенков В.И. Использование метода сферических гармоник для расчета световых полей в мутных средах с анизотропным рассеянием //Межвед. тем. сб. МЭИ, 1983. N12. - С.9-16.
4. Будак В.П., Сармин С.Э. Решение уравнения переноса излучения методом сферических гармоник в малоугловой модификации //Оптика атмосферы, 1990. Т.3, N9. - С.981-987.

МСГ точно описывает анизотропную часть решения УПИ, открывая путь к описанию сильно анизотропного рассеяния

Устранение анизотропии в решении



$$\begin{cases} \mu \dfrac{dL(\tau,\mu,\varphi)}{d\tau} = -L(\tau,\mu,\varphi) + \boxed{\dfrac{\Lambda}{4\pi}\oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')L(\tau,\mu',\varphi')d\hat{\mathbf{l}}'}, \\ \tilde{L}(\tau,\mu,\varphi)\big|_{\tau=0,\,\mu\ge 0} = \delta(\hat{\mathbf{l}}-\hat{\mathbf{l}}_0), \quad \tilde{L}(\tau,\mu,\varphi)\big|_{\tau=\tau_0,\,\mu\le 0} = 0; \end{cases}$$

$$\oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')L(\tau,\mu',\varphi')d\hat{\mathbf{l}}' \approx \sum_{i,j} x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}_{ij})L(\tau,\mu_i,\varphi_j)w_{ij}$$

$$L(\tau,\mu,\varphi) = \tilde{L}(\tau,\mu,\varphi) + L_a(\tau,\mu,\varphi)$$

$$\begin{cases} \mu \dfrac{d\tilde{L}(\tau,\mu,\varphi)}{d\tau} = -\tilde{L}(\tau,\mu,\varphi) + \dfrac{\Lambda}{4\pi}\oint x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')\tilde{L}(\tau,\mu',\varphi')d\hat{\mathbf{l}}' \boxed{+S(\tau,\mu,\varphi),} \\ \tilde{L}(\tau,\mu,\varphi)\big|_{\tau=0,\,\mu\ge 0} = \boxed{0,} \quad \tilde{L}(\tau,\mu,\varphi)\big|_{\tau=\tau_0,\,\mu\le 0} = -L_a(\tau_0,\mu,\varphi); \end{cases}$$

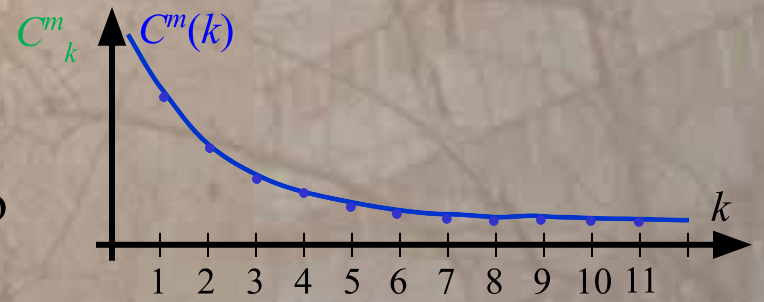
- Eddington, Milne (1926) $\delta(\mathbf{l}-\mathbf{l}_0)e^{-\tau/\mu 0}$
- Wiscombe (1977) δ-M method
- Nakajima-Tanaka (1988) single- double-scattering

Выделение анизотропии позволяет заменить интеграл рассеяния конечной суммой – дискретизация УПИ

Малоугловая модификация метода сферических гармоник

$$L(\tau,\mu,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{l}\frac{2l+1}{4\pi}C_n^l(\tau)\,\mathrm{Q}_l^n(\mu)\,\mathrm{e}^{-in\varphi},\quad x(\hat{\mathbf{l}},\hat{\mathbf{l}}')=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)x_l\,\mathrm{P}_l(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}')$$

1. От дискретных коэффициентов $C^m{}_k(\tau)$ к непрерывной зависимости $C^m(k,\tau)$;
2. При сильной анизотропии рассеяния введенная зависимость $C^m(k)$ есть медленно монотонно убывающая функция индекса k



$$C^m(\tau,k\pm 1)\approx C^m(\tau,k)\pm\frac{\partial C^m(\tau,k)}{\partial k}$$

3. Основной вклад в решение дают члены с k>> 1 и анизотропия тела яркости существенно больше ее асимметрии k>>m

$$\mu_0\frac{\partial C^m}{\partial\tau}+\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial C^{m+1}}{\partial k}+\frac{\partial C^{m-1}}{\partial k}+\frac{1}{\kappa}\Big((m+1)C^m-(m-1)C^m\Big)\right]=-(1-\Lambda x_k)C^m(\tau,\kappa)$$

В окрестности особенности углового распределения яркости ее спектр убывает медленно и монотонно

Решение полученного уравнения

$$L_a(\tau,\mu,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}\frac{2l+1}{4\pi}\exp\left(-(1-\Lambda p_k)\frac{\tau}{\mu_0}\right)\mathrm{Q}_k^n(\mu_0)\,\mathrm{Q}_l^n(\mu)\,\mathrm{e}^{in\varphi}$$

Введем функцию такую, что ее азимутальный спектр равен искомой функции

$$f(\tau,\mathbf{l}_{0\perp},\boldsymbol{\kappa})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}C^m(\tau,\kappa)\,\mathrm{e}^{im\psi};\quad C^m(\tau,\kappa)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau,\mathbf{l}_{0\perp},\kappa)\,\mathrm{e}^{-im\psi}\,d\psi$$

Умножим на $\mathrm{e}^{im\psi}$ и просуммируем по m от -Ґ до +Ґ

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\mu_0 f+(\mathbf{l}_{0\perp},\nabla_\kappa)f\right]=-(1-\Lambda x_k)f(\tau,\mathbf{l}_{0\perp},\boldsymbol{\kappa})$$

допускает аналитическое решение

$$C_k^m(\tau)=\exp\left(-\frac{\tau}{\mu_o}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos m\varphi\,\exp\left[\frac{\Lambda\tau}{\mu_o}\int_0^{\infty}x\left(\sqrt{\kappa^2+a^2\zeta^2-2\kappa a\zeta\cos\varphi}\right)\mathrm{e}^{-\zeta}\,d\zeta\right]d\varphi$$

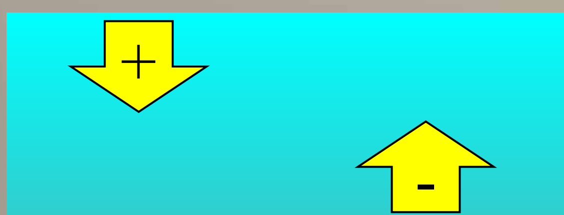
В отличие от Goudsmit-Sounderson, где система уравнений разваливается на независимые, здесь уравнения зацепляются

Регулярная часть решение

$$\tilde{L}(\tau,\mu,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C^m(\tau,\mu)\, e^{im\varphi}, \quad x(\cos\gamma) = \sum_{l=0}^{N}(2l+1)x_l\, P_l(\cos\gamma)$$

$$\frac{d}{d\tau}C = -BC + f(\tau), \quad -C(0) + U\, e^{\Gamma\tau_0}\, U^{-1}\, C(\tau_0) = U\int_0^{\tau_0} e^{\Gamma t}\, U^{-1} f(t)\,dt$$

$$SU^{-1}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & e^{-\Gamma_+\tau_0} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}: \quad -S\,U^{-1}\,C(0) + H\,U^{-1}\,C(\tau_0) = \sum_{k=0}^{N} SJ_k(\tau_0)\,U^{-1} m^{-1} P_k$$

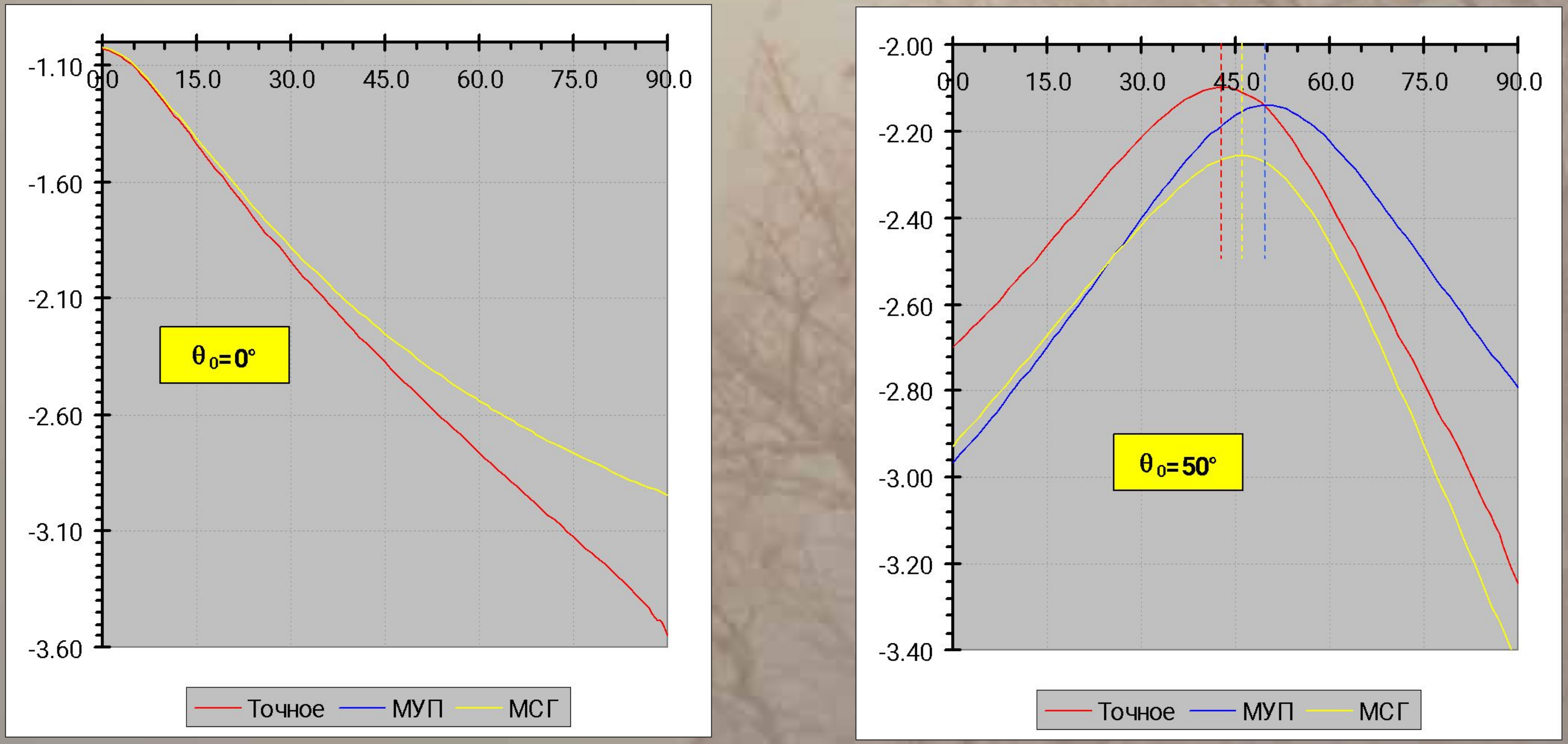


$$-\begin{bmatrix} C_-(0) \\ C_+(0) \end{bmatrix} + e^{B\tau_0}\begin{bmatrix} C_-(\tau_0) \\ C_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \int_0^{\tau_0} e^{Bt}\begin{bmatrix} F_-(t) \\ F_+(t) \end{bmatrix} dt$$

$$\begin{bmatrix} -e^{-\Gamma_+\tau_0} u_{22} & u_{21} \\ -u_{12} & e^{\Gamma_-\tau_0} u_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_-(0) \\ C_+(\tau_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_- \\ J_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-\Gamma_+\tau_0} u_{21} & -u_{22} \\ u_{11} & -e^{\Gamma_-\tau_0} u_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_+(0) \\ C_-(\tau_0) \end{bmatrix}$$

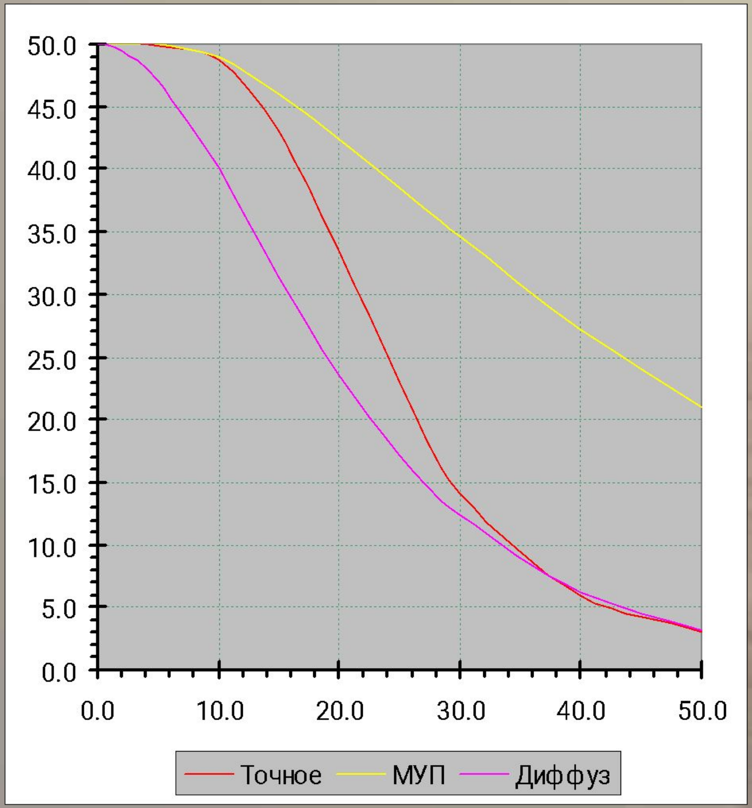
Дискретизация приводит к матричному решению, сложность вычислений определяется размером матриц

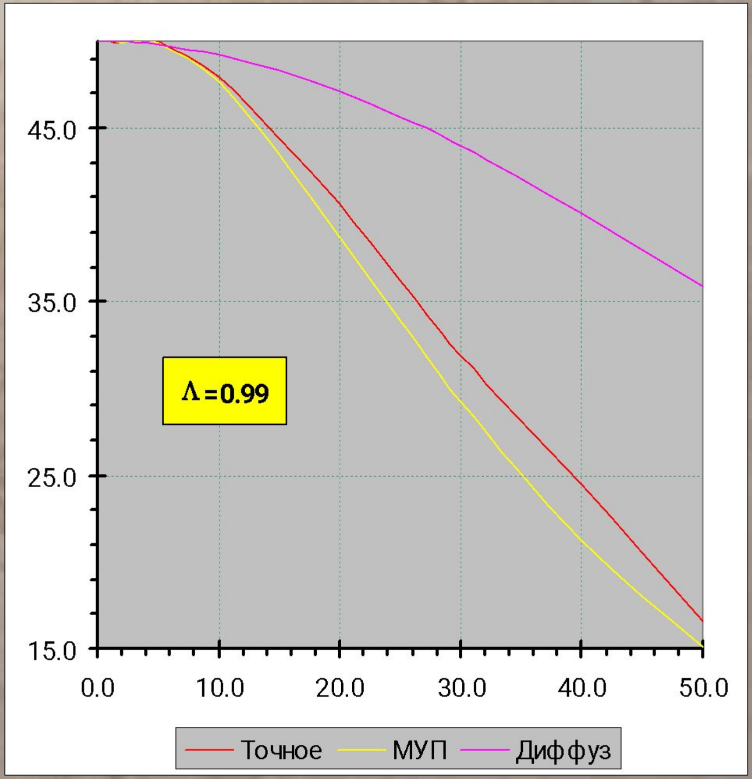
Тело яркости



$\Lambda = 0.8,\ g = 0.97,\ \tau = 15$

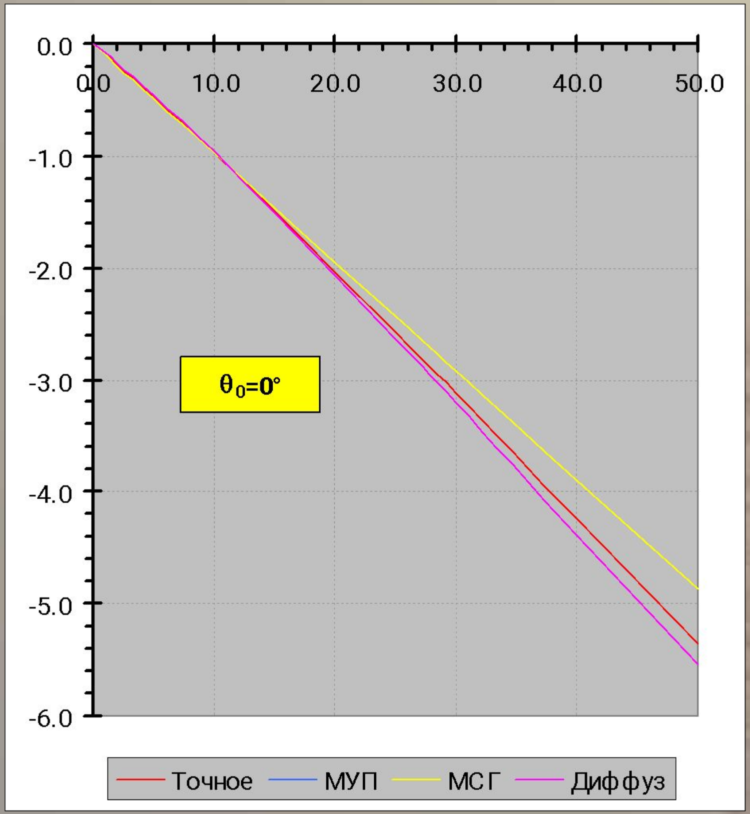
Поворот тела яркости с глубиной

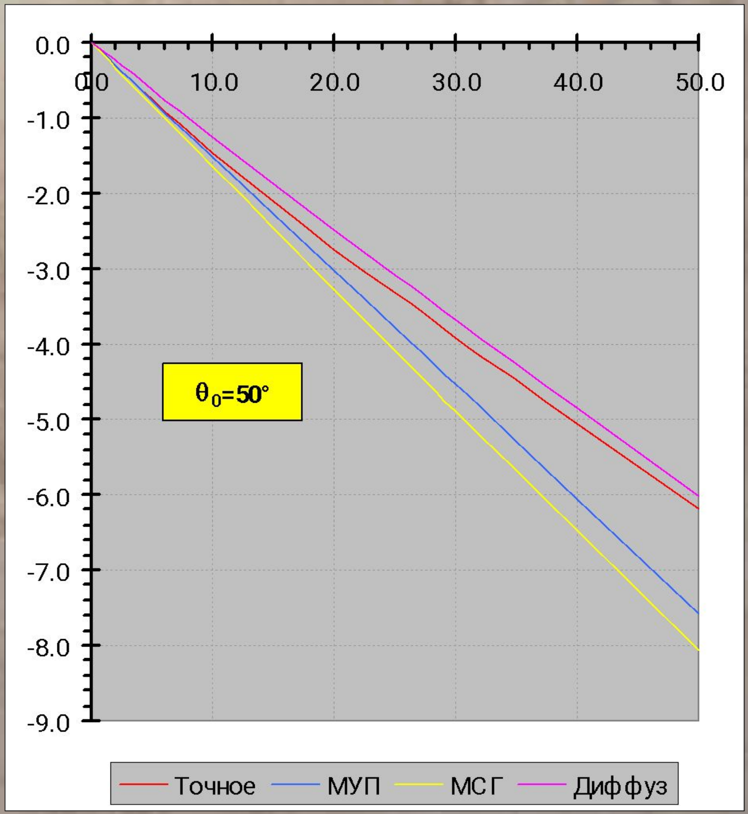




$\Lambda = 0.8$, $g = 0.97$, $\theta_0 = 50^o$

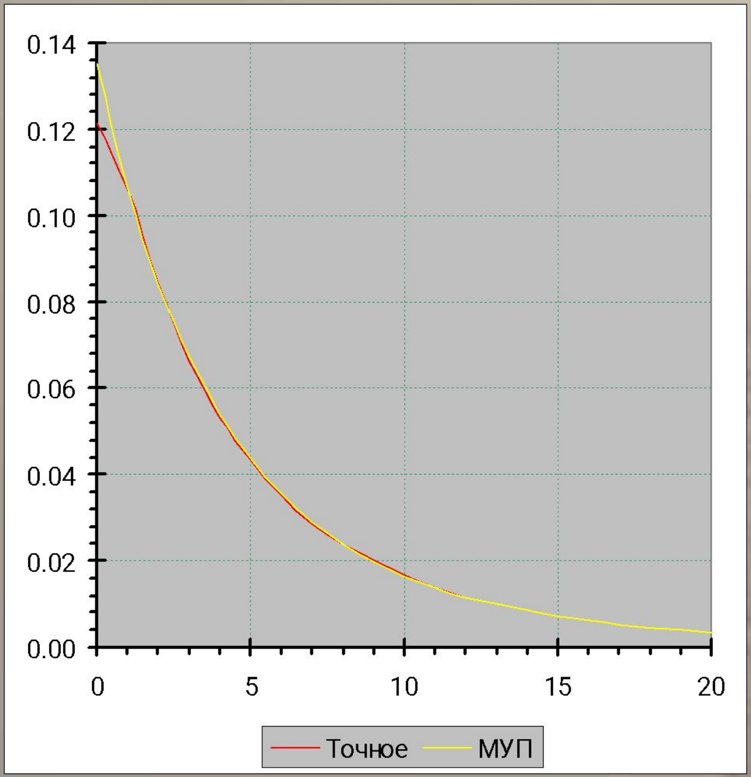
Ослабление облученности с глубиной

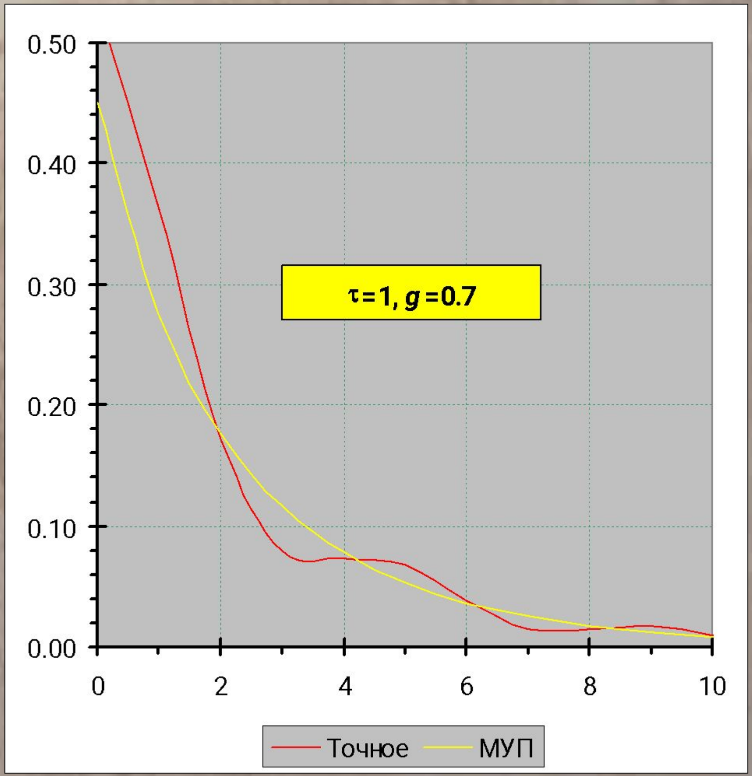




$\Lambda = 0.8, g = 0.97$

Амплитуды гармоник





$\Lambda = 0.8$, $g = 0.97$, $\theta_0 = 50^o$, $\tau = 10$

Векторное обобщение

CP → ОСФ → МСГ → SP → DOM

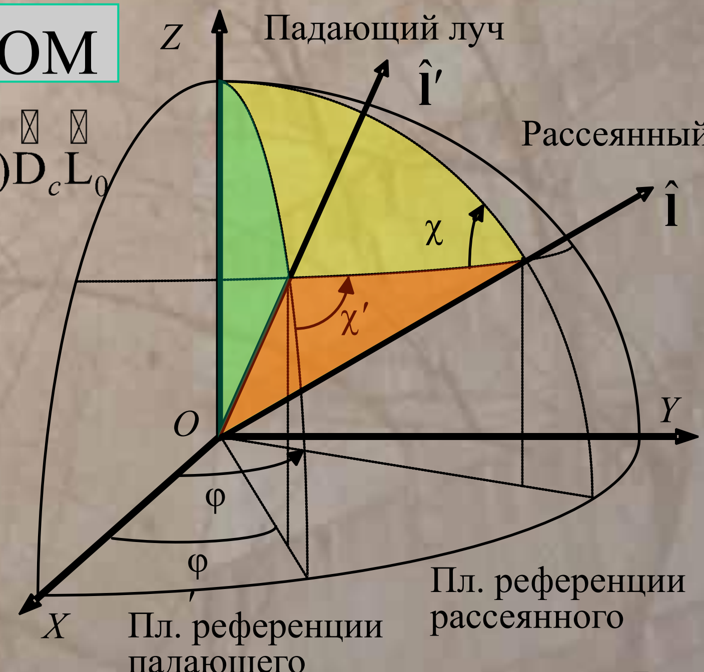
$$\vec{L}_a(\tau,\hat{\mathbf{l}}) = \sum_{c=1,2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{4\pi}\sum_{m=0}^{k}(2-\delta_{0,m})\vec{\phi}_c(m\varphi)\vec{\Pi}_m^k(\mu)\vec{Z}_k(\tau)\vec{\Pi}_m^k(\mu_0)\vec{D}_c\vec{L}_0$$

$$\vec{Z}_k(\tau) = \exp\left[-(\vec{1}-\Lambda\vec{\chi}_k)\frac{\tau}{\mu_0}\right]$$

$$\vec{\Pi}_m^k(\mu) = \begin{bmatrix} Q_k^m(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_k^m(\mu) & -T_k^m(\mu) & 0 \\ 0 & -T_k^m(\mu) & R_k^m(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_k^m(\mu) \end{bmatrix}$$

$$\vec{L}_\pm(\tau) = \left[I(\tau,\mu_1^\pm), Q(\tau,\mu_1^\pm), U(\tau,\mu_1^\pm), V(\tau,\mu_1^\pm),\ \dots\ , I(\tau,\mu_{N/2}^\pm), Q(\tau,\mu_{N/2}^\pm), U(\tau,\mu_{N/2}^\pm), V(\tau,\mu_{N/2}^\pm)\right]^T$$

$$\frac{d\vec{L}(\tau)}{d\tau} = -\vec{B}\vec{L}(\tau) + \vec{M}^{-1}\vec{\Delta}(\tau) \Rightarrow \begin{bmatrix}\vec{L}_-(0)\\ \vec{L}_+(\tau_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec{F}_-\\ \vec{F}_+\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\vec{R}_- & \vec{T}_-\\ \vec{T}_+ & \vec{R}_+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{L}_+(0)\\ \vec{L}_-(\tau_0)\end{bmatrix}$$



Абсолютно идентичная форма решения, но матрицы 4N × 4N

Векторное обобщение

$$\begin{cases}
\begin{bmatrix} \vec{L}^1_-(0) \\ \vec{L}^1_+(\tau_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{J}^1_- \\ \vec{J}^1_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{R}^1_- & \hat{T}^1_- \\ \hat{T}^1_+ & \hat{R}^1_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{L}^1_\downarrow(0) \\ \vec{L}^1_\uparrow(\tau_1) \end{bmatrix}; \\
\begin{bmatrix} \vec{L}^2_-(\tau_1) \\ \vec{L}^2_+(\tau_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{J}^2_- \\ \vec{J}^2_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{R}^2_- & \hat{T}^2_- \\ \hat{T}^2_+ & \hat{R}^2_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{L}^2_\downarrow(\tau_1) \\ \vec{L}^2_\uparrow(\tau_2) \end{bmatrix};
\end{cases}$$

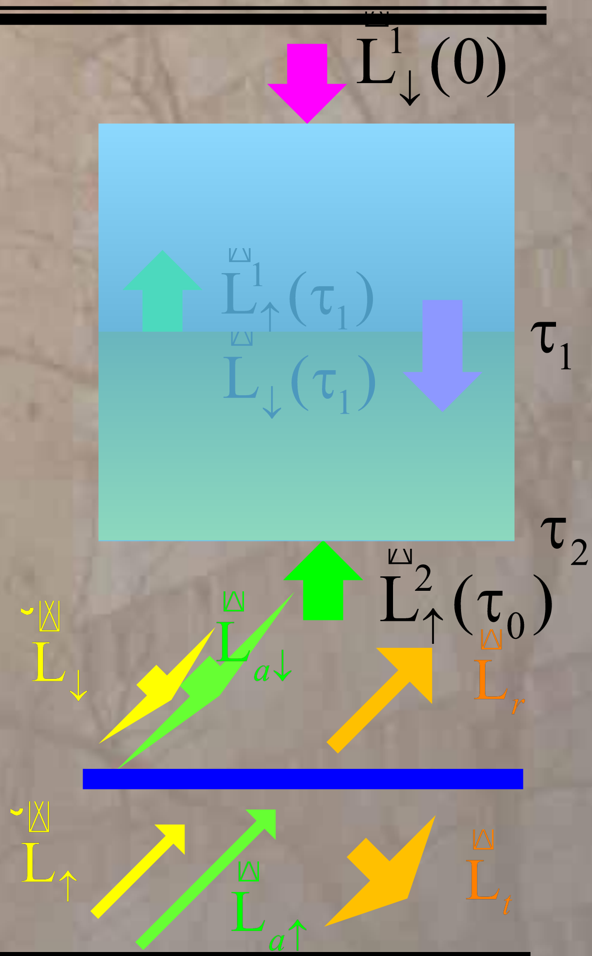
Взаимосвязь граничных условий

$$\vec{L}^1_\uparrow(\tau_1) = \vec{L}^2_-(\tau_1) \equiv \vec{L}_\uparrow(\tau_1), \quad \vec{L}^1_+(\tau_1) = \vec{L}^2_\downarrow(\tau_1) \equiv \vec{L}_\downarrow(\tau_1)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{L}^1_-(0) \\ \vec{L}^2_+(\tau_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{J}^S_- \\ \vec{J}^S_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{R}^S_- & \hat{T}^S_- \\ \hat{T}^S_+ & \hat{R}^S_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{L}^S_\downarrow(0) \\ \vec{L}^S_\uparrow(\tau_2) \end{bmatrix};$$

Граница раздела также представима в МОМ:

$$\begin{bmatrix} \vec{L}_r \\ \vec{L}_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{J}_- \\ \vec{J}_+ \end{bmatrix}}_{\text{МСГ}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{R}_- & \hat{T}_- \\ \hat{T}_+ & \hat{R}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{L}_\downarrow \\ \vec{L}_\uparrow \end{bmatrix}}_{\text{гладкая часть решения}}$$



Абсолютно идентичная форма решения, но матрицы 4N × 4N

Основные выводы:

1. Область применимости МУП - вся передняя полусфера визирования, название "малоугловое" отражает не область применимости, а сущность основного допущения
2. Применимо для всей области углов визирования в переднюю полусферу – “any angle approximation”
3. Областью справедливости МСГ является требование анизотропии тела яркости, а не анизотропии рассеяния
4. МСГ носит не асимптотический, а промежуточно - асимптотический характер: решение аппроксимирует точное на всей области
5. Диффузионное приближение абсолютно непригодно для описания яркости, но достаточно точно описывает интегральные характеристики поля: метрика в среднем и равномерная метрика

The simple is the seal of the true
Beauty is the splendour of truth