

# Лекция 9

Модель реальных деловых циклов  
(ТШ, гл. 15)

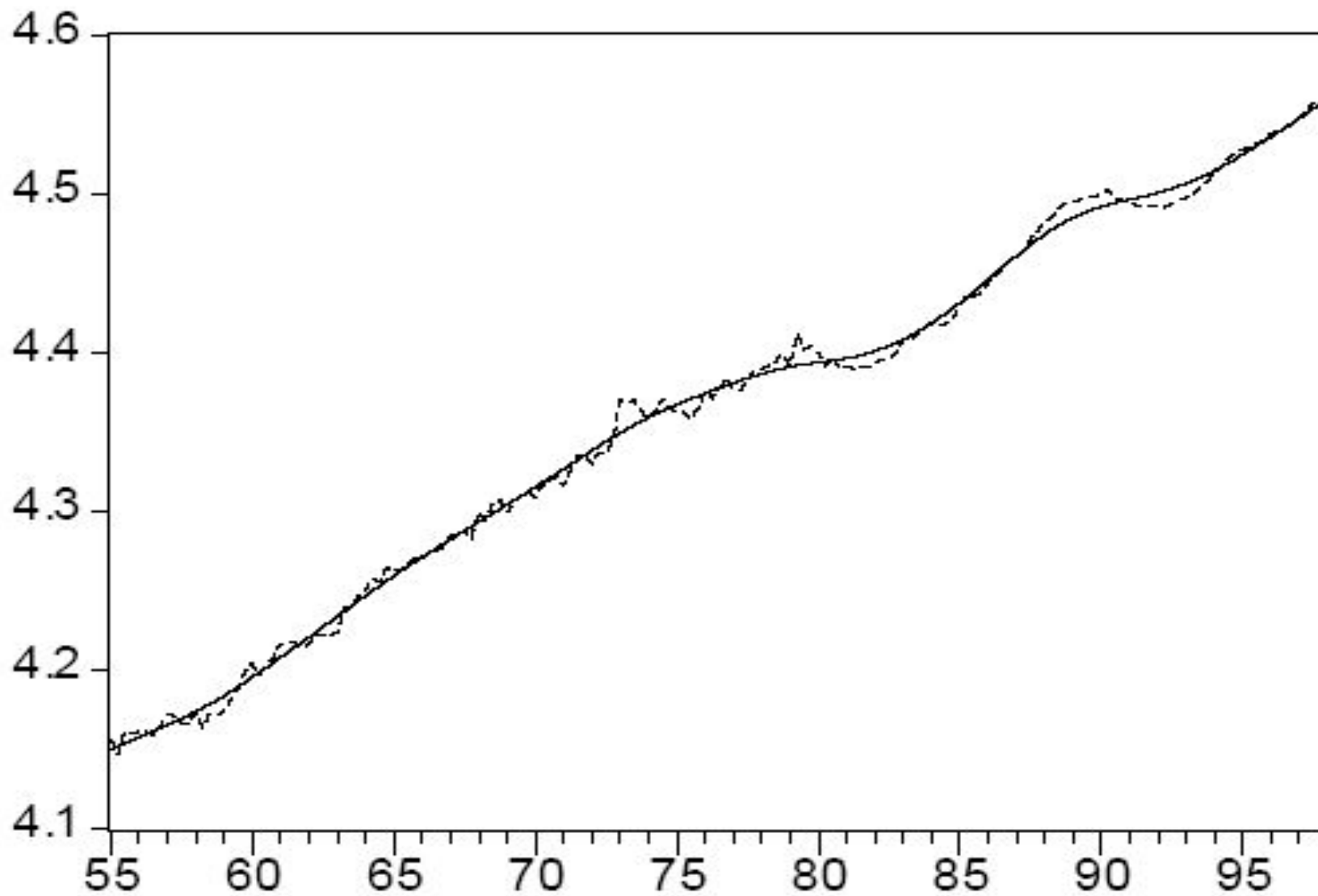
# Мотивация

- В действительности значения экономических переменных скорее подвержены частым колебаниям, нежели поступательному движению по направлению к стационарному состоянию или устойчивому росту.
- Поэтому помимо теории роста нужна еще и теория, объясняющая эти колебания.
- Традиционно колебания экономических переменных объяснялись изменениями совокупного спроса. Мы изучим эти модели в разделе, посвященном взаимодействию реального и денежного секторов.
- Краткосрочные колебания и долгосрочная динамика объяснялись по-разному.
- Однако, что если попытаться построить единую теорию роста и краткосрочных колебаний экономических переменных?

## Тренд и колебания

- Чтобы производить статистический анализ, желательно, чтобы рассматриваемые величины были стационарными. Выпуск, потребление, инвестиции, предложение труда – переменные, которые в моделях роста нестационарны. Они имеют тенденцию расти (а некоторые, например, продолжительность рабочей недели – возможно, падать) с течением времени. Иными словами эти величины имеют тренд.
- Насколько постоянны ли темпы роста?
- Насколько существенны колебания по сравнению с трендом?

# Тренд и колебания (Великобритания)



# Освобождение от тренда

- Раньше мы концентрировались на темпах прироста и абстрагировались от колебаний. Теперь сконцентрируемся на колебаниях. Для этого вычтем из рядов тренды. Такая процедура называется *detrending*, а алгоритм вычитания тренда называется фильтром. Фильтров существует множество. Нам нужно, чтобы фильтр дал стационарную переменную.

# TS и DS ряды (1)

- Многие нестационарные ряды бывают стационарными относительно детерминистского тренда (их называют TS – trend stationary) или относительно стохастического тренда, и тогда они оказываются стационарными в разностях, возможно, не первых (DS – difference stationary).
- Соответственно, есть процедуры, нацеленные на различение TS и DS рядов. Например, работу по различению таких рядов для России проделали сотрудники ИЭПП и ВШЭ. [Эконометрический анализ динамических рядов основных макроэкономических показателей, 2001.](#)
- <http://www.iet.ru/publication.php?folder-id=44&category-id=116&publication-id=1721>

# TS и DS ряды (2)

- Различие между TS и DS, грубо говоря, в следующем. Если ряд TS, то после особенно большого прироста переменной, может быть, не сразу, но будет ожидатья прирост меньший, чем в среднем. Если же ряд стационарен в первых разностях, то возникший прирост - это уже навсегда.
- В ТШ (с. 311) на рис. 15.1 изображен выпуск, который является TS, а на рисунке 15.2 – DS.

## Простейший фильтр

- Самый простой фильтр таков: у нас есть динамический ряд. Логарифмируем его, строим линейную регрессию по времени и оставляем для анализа ошибки:
- $\ln Y_t = \alpha + \beta t + y_t$
- Однако, здесь есть трудности.
- Во-первых, темп роста может колебаться тоже колебаться (с какой-нибудь низкой частотой).
- Во-вторых, нам ведь нужно, чтобы  $y_t$  было стационарным. А для этого ряд в логарифмах должен быть TS.



# Фильтр Ходрика-Прескотта (1)

- Разработчики теории реальных деловых циклов (РДЦ) использовали Hodrick-Prescott, HP-filter. Рассмотрим его.
- Выпуск разлагается на тренд и отклонения от него (в логарифмах):
- $y_t = y_t^g + y_t^c$ ;
- Теперь минимизируем сумму квадратов отклонений при ограничении, что сумма квадратов колебаний темпов прироста от периода к периоду не будет очень велика, т.е. тренд достаточно сглаженный. Сформулируем эту задачу так:

$$\min \sum_{t=0}^{\infty} (y_t^c)^2 \text{ s.t.}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left[ (y_{t+1}^g - y_t^g) - (y_t^g - y_{t-1}^g) \right]^2 \leq \mu$$

## Фильтр Ходрика-Прескотта (2)

- Однако в качестве параметра сглаживания возьмем не  $\mu$ , а множитель Лагранжа:

$$\min \sum_{t=0}^{\infty} (y_t^c)^2 + \lambda \sum_{t=0}^{\infty} \left[ (y_{t+1}^g - y_t^g) - (y_t^g - y_{t-1}^g) \right]^2$$

- Как изменяется вид тренда по мере роста параметра  $\lambda$ ?

## Фильтр Ходрика-Прескотта (3)

- Чем выше  $\lambda$ , тем ближе тренд к линейному, который мы рассматривали выше.
- При анализе квартальных данных стало традиционным использовать предложенное разработчиками значение  $\lambda = 1600$ .

# Характеристики колебаний вокруг тренда (США)

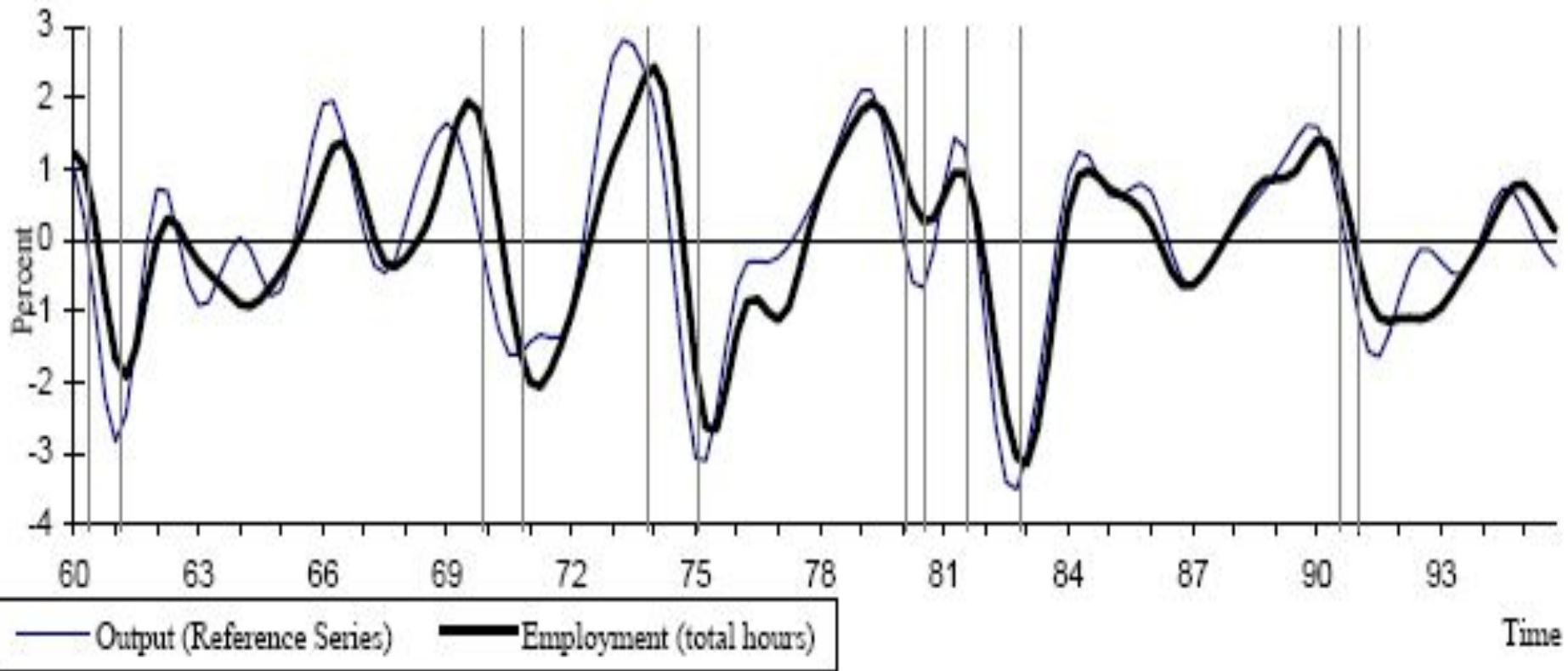
| $x_t$  | $\sigma x / E(x) * 100\%$ | $Corr(x, y)$ |
|--|---------------------------|--------------|
| Выпуск ( $y_t$ )                                     | 1,72                      | 1            |
| Потребление  | 1,29                      | 0,86         |
| в т.ч. за вычетом<br>благ длительного<br>пользования | 0,86                      | 0,82         |
| инвестиции   | 8,24                      | 0,9          |
| Отработанные<br>часы                                 | 1,66                      | 0,85         |
| Занятость  | 1,3                       | 0,87         |
| Производитель-<br>ность труда                        | 1,18                      | 0,9          |

# Характеристики колебаний вокруг тренда (США)

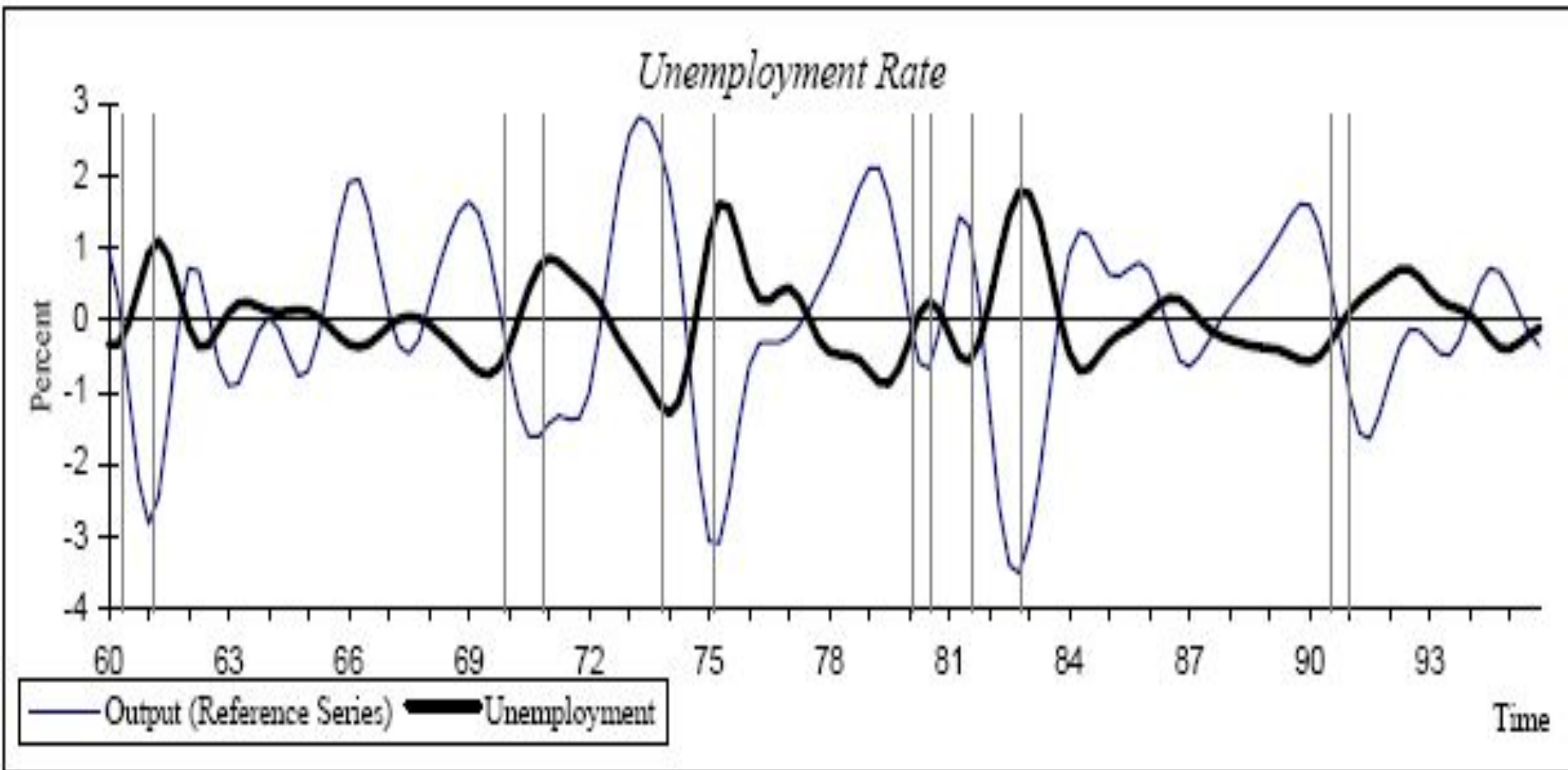
- Потребление товаров текущего потребления и услуг колеблется в существенно меньшей степени, чем выпуск;
- Инвестиции колеблются существенно больше.
- Особенно велики колебания в запасах (17,3%).
- Колебания общего числа отработанных часов (L) почти такие же, как у выпуска...
- ... и как у занятости.
- Колебания средней продолжительности рабочей недели в часах существенно меньше, чем у выпуска.
- Реальные зарплаты слабо коррелированы с выпуском, но:
  - По данным национальных счетов корреляция отсутствует, тогда как
  - По данным опросов корреляция положительная.
- Производительность труда положительно коррелирует с выпуском.

# Отклонения от тренда (отработанные часы)

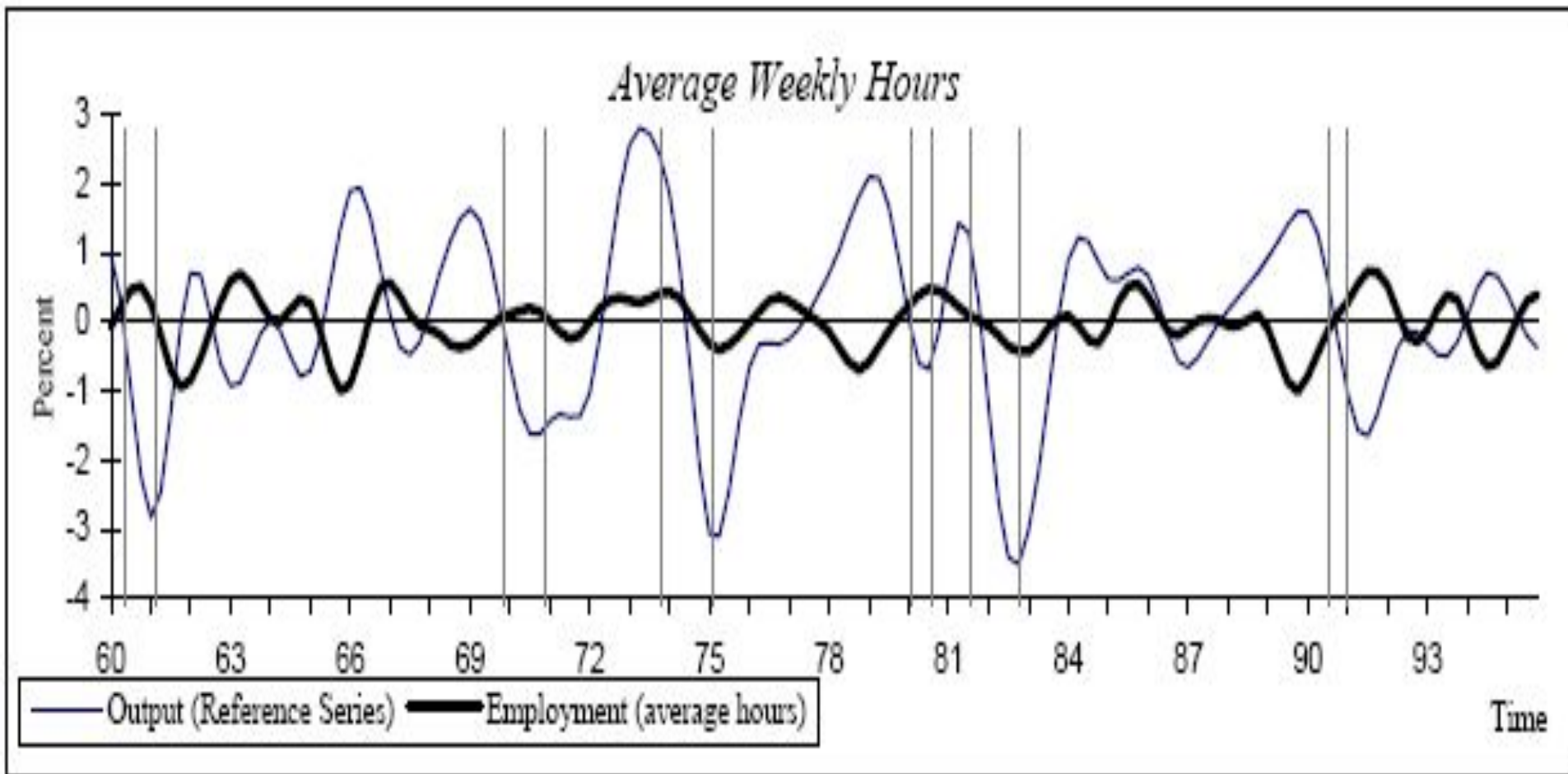
*Aggregate Hours*



# Отклонения от тренда (безработица)



# Отклонения от тренда (средняя продолжительность рабочей недели)





# Предпосылки модели (1)

- В качестве базовой модели будем использовать модель Рамсея.
- Время дискретное.

## Предпосылки модели (2) – рынки факторов

Производственная функция

с постоянной отдачей от масштаба :

$$Y_t = e^{z_t} K_t^\alpha (A_t N_t H_t)^{1-\alpha}, \text{ где}$$

$$z_t = \rho z_{t-1} + \varepsilon_t - \text{технологический шок,}$$

$$\varepsilon_t \sim \text{iin}(0, \sigma_\varepsilon)$$

$$A_t = (1 + g)^t - \text{технический прогресс по Харроду;}$$

$H_t$  – число отработанных часов.

$$N_t = (1 + n)^t - \text{население.}$$

Предпосылки модели (3) – потребление

$$U_t^e = E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} (1+n)^t \beta^t [\ln c_t + \psi \ln(1-h_t)] \right], \text{ где}$$

$U_t^e$  – ожидаемая полезность в период  $t$ ;

$E_t$  – оператор ожидания;

$n$  – темп роста населения;

$\beta$  – коэффициент дисконтирования;

$c_t$  – потребление;

$h_t$  – доля времени, уделяемого работе;

$\psi$  – вес досуга в функции полезности.

## Предпосылки модели (4) - бюджетное ограничение

$$(1+n)a_{t+1} = w_t h_t + (1+r_t)a_t - c_t, \text{ где}$$

$a_t$  – богатство;

$r_t$  – ставка процента.

Кроме того предполагается отсутствие игры Понци :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t \delta_t \geq 0, \text{ где}$$

$$\delta_t = \frac{\delta_{t-1}}{1+r_t}; \delta_0 = 1; \delta - \text{коэффициент дисконтирования.}$$

# Предпосылки модели (5) – накопление капитала

Все активы семьи являются капиталом. Однако, как и ранее, для нас важна капиталовооруженность эффективной (а не настоящей) единицы труда. Тогда динамика накопления капитала будет выглядеть следующим образом:

$$(1+n)k^*_{t+1} = (1-\delta)k_t + e^{z_t} k_t^\alpha \left[ (1+g)^t h_t \right]^{1-\alpha} y_t - c_t$$

# Предпосылки модели (6): RBC мы Ramsay

| Модель                    | Ramsay   | RBC  |
|---------------------------|--|--|
| Количество благ           | 1  | 1  |
| Количество факторов       | 2 (K,L)  | 2 (K,L)  |
| Производственная функция  | С постоянной отдачей от масштаба                                     |  |
| Технический прогресс      | Детерминированный  | Имеется стохастическая компонента ( $z_t$ )                                      |
| Рынок труда               | Совершенная конкуренция, предложение экзогенно                       | Совершенная конкуренция, домохозяйства определяют продолжительность рабочего дня |
| Рынок капитала            | Совершенная конкуренция, предложение эндогенно                       |  |
| Накопление капитала       | Постоянные темпы износа, нет лага между инвестициями и производством |  |
| Экономические агенты      | Репрезентативные бесконечно живущие семьи                            |  |
| Потребительское поведение | Явная оптимизация при бюджетном ограничении                          |  |
| Время                     | Непрерывное  | Дискретное   |

## Решение модели (попытка, 1)

*Запишем задачу домохозяйства в зависимости от состояния экономики :*

$$V(z_t, k_t) = \max_{c_t, h_t, k_{t+1}} \left( \ln c_t + \psi \ln[1 - h_t] + \beta E_t [V(z_{t+1}, k_{t+1})] \right)$$

$$s.t. \quad c_t + i_t = e^{z_t} k_t^\alpha \left[ (1+g)^t h_t \right]^{1-\alpha};$$

$$(1+g)(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t;$$

$$z_{t+1} = \rho z_t + \varepsilon_t.$$

## Решение модели (попытка, 2)

Находим FOCs :

$$\text{по } c_t \left| \frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[ \frac{\partial V}{\partial k_{t+1}} (z_{t+1}, k_{t+1}) \right] \right.$$

$$\text{по } h_t \left| \frac{\psi}{1-h_t} = \beta E_t \left[ \frac{\partial V}{\partial k_{t+1}} (z_{t+1}, k_{t+1}) \right] (1-\alpha) \frac{y_t}{h_t} \right.$$

Теперь найдем производную по  $k_t$

$$\frac{\partial V}{\partial k_t} = \beta E_t \left[ \frac{\partial V}{\partial k_{t+1}} (z_{t+1}, k_{t+1}) R_t \right], \text{ где}$$

$$R_t \equiv \alpha \frac{y_t}{k_t} + 1 - \delta.$$



## Решение модели (попытка, 3)

*Подставим FOCs в последнее уравнение :*

$$\frac{\partial V}{\partial k_t}(z_t, k_t) = \frac{1}{c_t} R_t$$

$$\frac{\partial V}{\partial k_t}(z_t, k_t) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{\psi}{1-h_t} \frac{h_t}{y_t} R_t$$

*Построим то же самое для следующего*

*периода с учетом ожиданий :*

$$E_t \left[ \frac{\partial V}{\partial k_{t+1}}(z_t, k_{t+1}) \right] = E_t \left[ \frac{1}{c_{t+1}} R_{t+1} \right]$$

$$E_t \left[ \frac{\partial V}{\partial k_{t+1}}(z_t, k_{t+1}) \right] = E_t \left[ \frac{1}{1-\alpha} \frac{\psi}{1-h_{t+1}} \frac{h_{t+1}}{y_{t+1}} R_{t+1} \right]$$

## Решение модели (попытка, 4)

Теперь подставим это в FOC-1:

$$\beta E_t \left[ \frac{c_t}{c_{t+1}} \left( \alpha \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right] = 1$$

и из частного FOCs получим:

$$\frac{1-h_t}{h_t} = \frac{\psi}{1-\alpha} \frac{c_t}{y_t}$$

Увы, построенная модель не имеет аналитического решения. Можно либо упростить ее, либо решить численными методами.

Чтобы не потерять полезные свойства, пойдём вторым путем. При этом используем метод калибровки (который очень полюбился работающим с РДЦ)

# Идея калибровки

В модели РДЦ используются параметры, например, темпы роста населения, темпы технического прогресса, параметры технологических шоков, коэффициенты дисконтирования и износа капитала. Можно воспользоваться проведенными заранее измерениями таких параметров, вставить их в модель и понаблюдать за динамикой экономики с такими параметрами.

Далее рассмотрим калибровку для экономики США, проведенную Кули и Прескоттом:

Cooley T.F., Prescott E. Economic Growth and Business Cycles / In Frontiers of Business Cycles Research (ed. Cooley T.F.), Princeton University Press, Princeton, 1995., pp. 1-37.

# Калибровка (1)

- $\alpha$ : поскольку в модели используется производственная функция Кобба-Дугласа с суммой коэффициентов равной единице, это **доля дохода на капитал в факторных доходах**.
- Примем для США:  $\alpha = 0,4$ .
- Это выше, чем стандартные цифры (обычно  $1/3$  или  $0,36$ ), потому что Кули и Прескотт включают в капитал также потребительские блага длительного пользования и государственные инвестиции.
- Для России,  $\alpha$ , вероятно, еще выше.

## Калибровка (2)

- $g$  – **средние темпы роста производительности труда**. Для США этот показатель равен 1,56% в год.
- Поскольку обычно в модели используются квартальные данные,  $g = (1,0156)^{1/4} - 1 = 0,0039$ .
- Для России этот показатель составил за период 2001-2004 год 0,0147 в квартал, но неясно, насколько эта цифра устойчива.
- $\rho$  – **показатель автокоррелированности шоков производительности**. Оценка для США (при квартальных данных) 0,95 с достаточно большим разбросом;
- $\varepsilon$  – **среднеквадратичное отклонение неавтокоррелированной компоненты шока**: 0,007.
- $n$  – **темпы роста населения**. Для США – 1,2% в год, то есть  $n = 0,003$ .

## Калибровка (3)

Используем формулу накопления капитала :

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + y_t - c_t.$$

В стационарном состоянии капитал растет тем

же темпами что и производительность труда :

$$k_{t+1} = (1+g)k_t.$$

Из основного макроэкономического тождества (без выделения государства) :

$$y_t - c_t = i_t$$

Получаем :

$$(1+n)(1+g)k_t = (1-\delta)k_t + i_t.$$

Делим обе части на  $k_t$  :

$$(1+n)(1+g) = (1-\delta) + i_t / k_t.$$

$$\delta = 1 + i_t / k_t - (1+n)(1+g).$$

Учитывая, что в США годовые инвестиции

составляют в среднем 7,6% запаса капитала, имеем :

$$\delta = 1 + (1 + 0,076)^{1/4} - 1 - 1,003 \cdot 1,0039 = 0,012.$$

Иными словами, износ капитала составляет 1,2% в квартал или 4,8% в год.

## Калибровка (4)

Используем полученную выше формулу :

$$\beta E_t \left[ \frac{c_t}{c_{t+1}} \left( \alpha \frac{y_{t+1}}{k_{t+1}} + 1 - \delta \right) \right] = 1.$$

Темп роста потребления в стационарном состоянии

равен темпу роста производительности труда

а капиталоемкость выпуска неизменна. Поэтому :

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = (1 + g) = \beta \left( \alpha \frac{y}{k} + 1 - \delta \right).$$

Капиталовооруженность выпуска оценивается в 3,32. Отсюда получим :

$$\beta = \left[ \frac{1,0156}{0,4 \cdot \frac{1}{3,32} + 1 - 0,048} \right]^{1/4} = 0,986.$$



## Калибровка (5)

Используем полученную выше формулу :

$$\frac{1-h_t}{h_t} = \frac{\psi}{1-\alpha} \frac{c_t}{y_t}.$$

Кули и Прескотт используют оценку доли свободного времени (зз вычетом времени, необходимого для сна и других физиологических потребностей)  $h_t = 0,31$ .

Долю потребления в выпуске они оценивают в 0,75.

Отсюда получаем :

$$\psi = \frac{1-0,31}{0,31} \cdot \frac{1-0,4}{0,75} = 1,78.$$