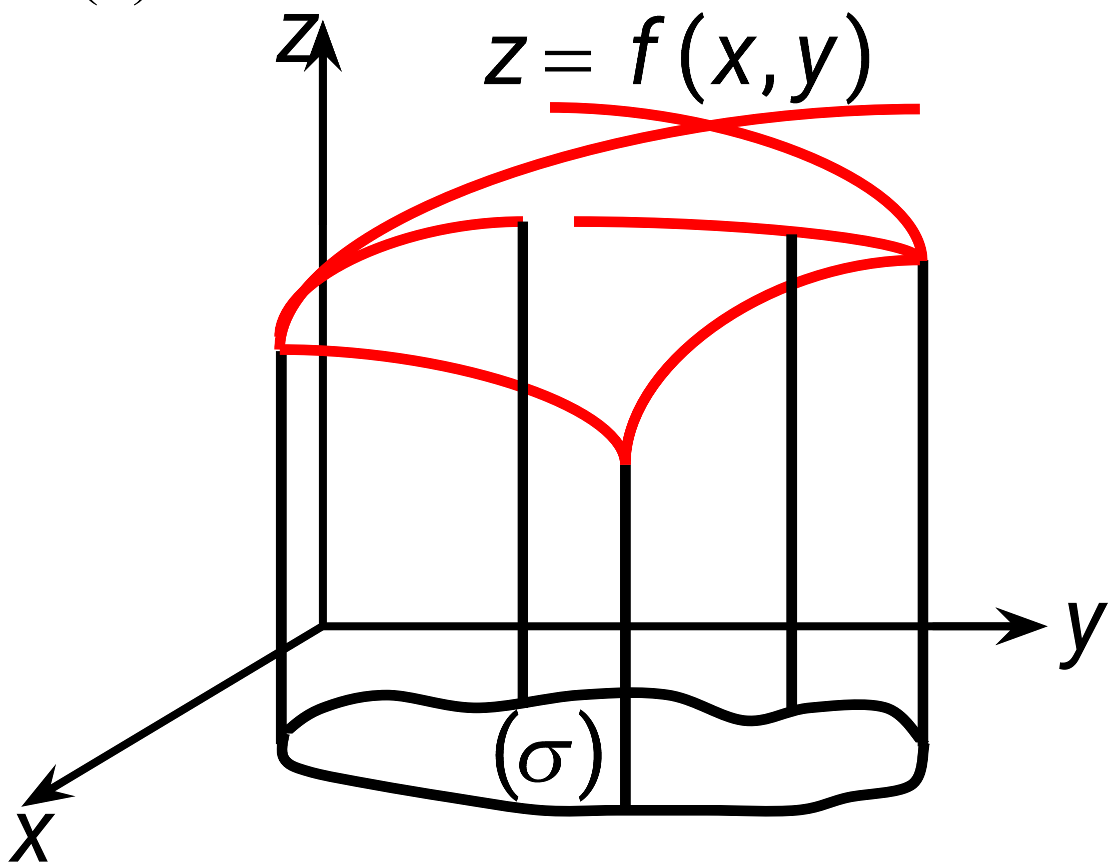
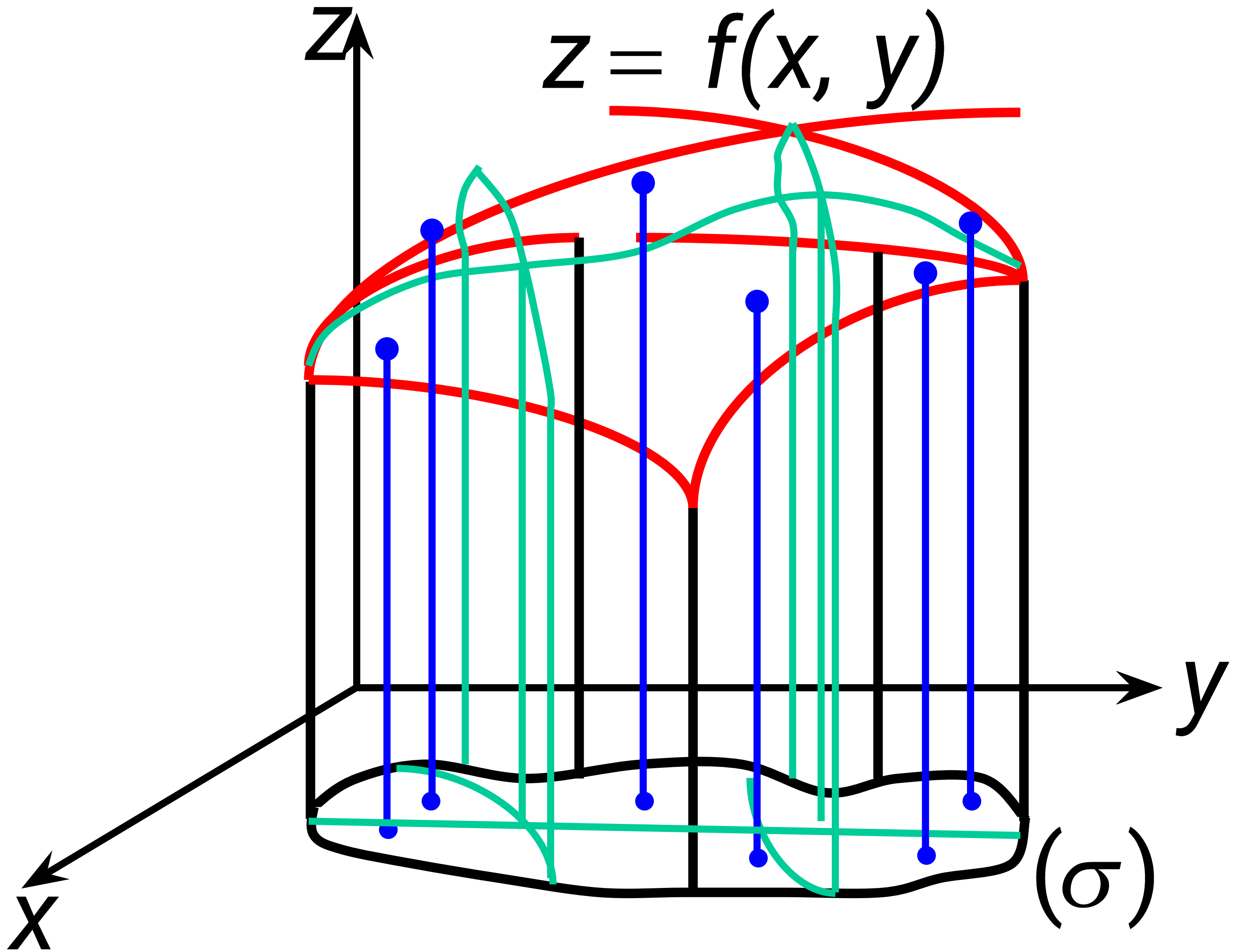
Глава 2. Кратные криволинейные и поверхностные интегралы

§1. Двойной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

***Цилиндрическим телом с основанием* (σ)** называют область в пространстве, ограниченную областью (σ), лежащей в плоскости xOy, поверхностью $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью $z = \varphi(x,y)$, направляющей которой является граница области (σ).




z
z = f(x, y)
y
x
(σ)

2. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть (σ) – квадрируемая (т.е. имеющая площадь) область в плоскости xOy, и в области (σ) задана функция $z = f(x,y)$.

1. Разобьем область (σ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

   $(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \ldots, (\Delta\sigma_n)$.

2. В каждой области $(\Delta\sigma_i)$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь области $(\Delta\sigma_i)$.

Сумму

$$I_n(\Delta\sigma_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y)$ по области (σ) (соответствующей данному разбиению области (σ) и данному выбору точек P_i).

Диаметром множества G будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками множества G.

Пусть d_i – диаметр $(\Delta\sigma_i)$, $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число* I *называется* ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения области* (σ) *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$\left| I_n(\Delta\sigma_i, P_i) - I \right| < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***двойным интегралом*** *от функции* $f(x,y)$ *по области* (σ).

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие существования двойного интеграла). *Если функция* $f(x,y)$ *интегрируема в области* (σ), *то она ограничена в этой области.*

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия существования двойного интеграла). *Если*

1) *область* (σ) – *квадрируемая,*

2) *функция* $f(x,y)$ *ограничена в области* (σ) *и непрерывна всюду за исключением некоторого множества точек площади нуль,*

то $f(x,y)$ *интегрируема в области* (σ) .

СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Если функция $f(x,y)$ – неотрицательна и интегрируема в области (σ), то $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy$ равен объему цилиндрического тела с основанием (σ) и ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$ (геометрический смысл двойного интеграла).

2. $\iint\limits_{(\sigma)} dxdy=\sigma$, где σ – площадь области (σ).

3. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} c\cdot f(x,y)dxdy=c\cdot\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy.$$

4. Двойной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)}[f_1(x,y)+f_2(x,y)]dxdy=\iint\limits_{(\sigma)}f_1(x,y)dxdy+\iint\limits_{(\sigma)}f_2(x,y)dxdy.$$

5. Если область интегрирования (σ) разбита на две части (σ_1) и (σ_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(\sigma_1)}f(x,y)dxdy+\iint\limits_{(\sigma_2)}f(x,y)dxdy$$

(свойство аддитивности двойного интеграла).

6. Если всюду в области (σ) функция $f(x,y)>0$ ($f(x,y)\geq 0$), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \geq 0.$$

7. Если всюду в области (σ) $f(x,y)<\varphi(x,y)$ ($f(x,y)\leq\varphi(x,y)$), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_{(\sigma)}\varphi(x,y)dxdy.$$

8. (следствие свойств 7 и 2) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области (σ), то

$$m\cdot\sigma \leq \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy \leq M\cdot\sigma,$$

где σ – площадь области (σ).

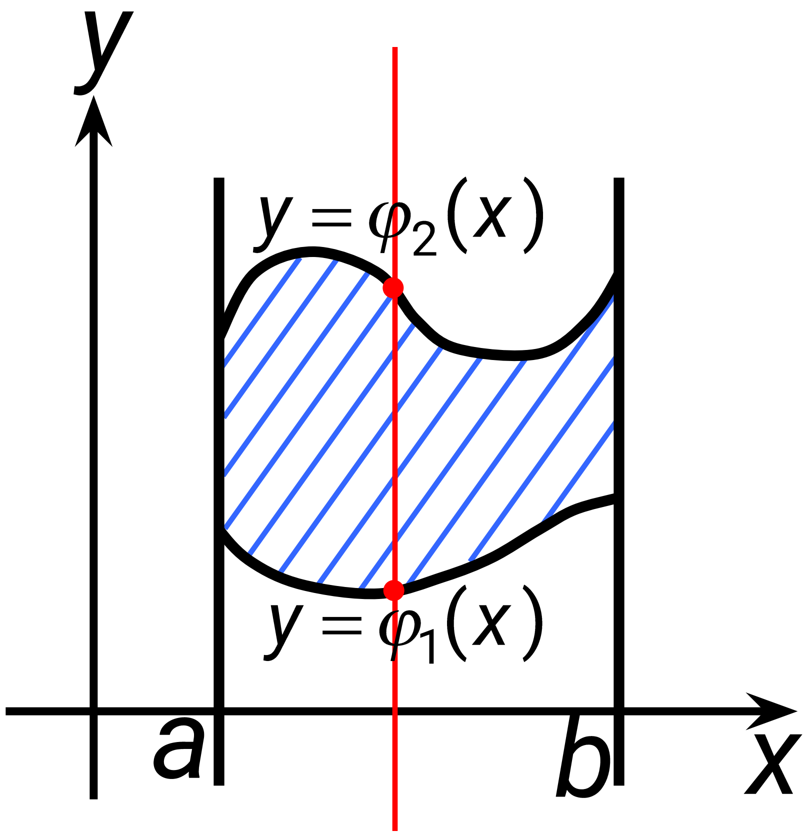
9. (теорема о среднем для двойного интеграла) Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области (σ), то найдется такая точка $P_0(x_0;y_0)\in(\sigma)$, что справедливо равенство

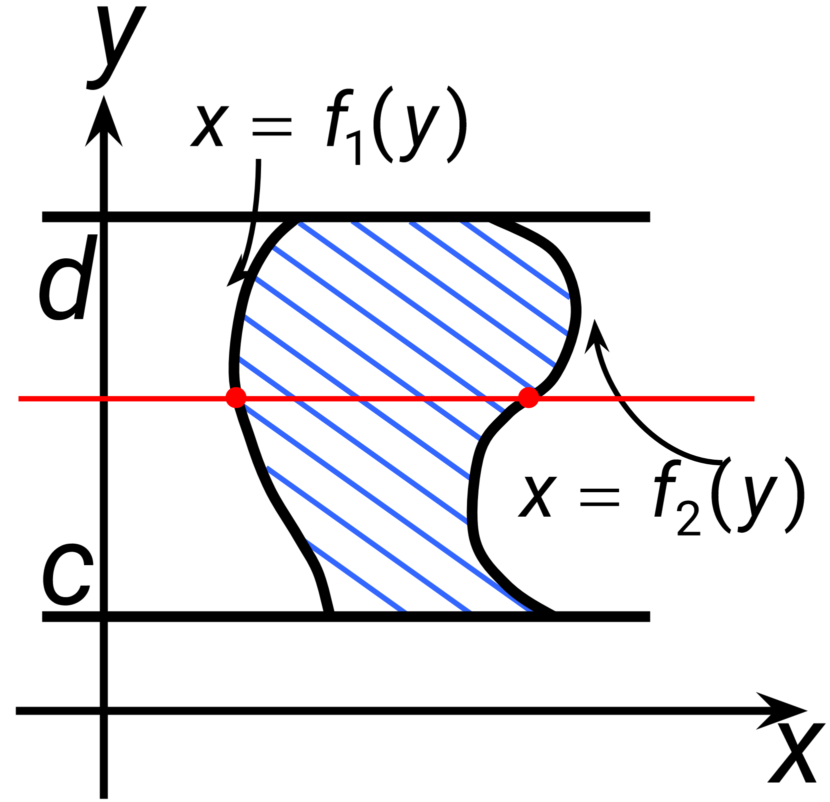
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = f(x_0;y_0)\cdot\sigma,$$

где σ – площадь области (σ).

3. Вычисление двойного интеграла

Назовем область (σ) ***правильной в направлении оси*** Ox (Oy), если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (σ) параллельно оси Ox (Oy) пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.


y
y = φ₂(x)
y = φ₁(x)
a
b
x


y
x = f₁(y)
d
c
x = f₂(y)
x

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $f(x,y)$ *интегрируема в области* (σ).

1) *Если область* (σ) *– правильная в направлении оси* Oy,

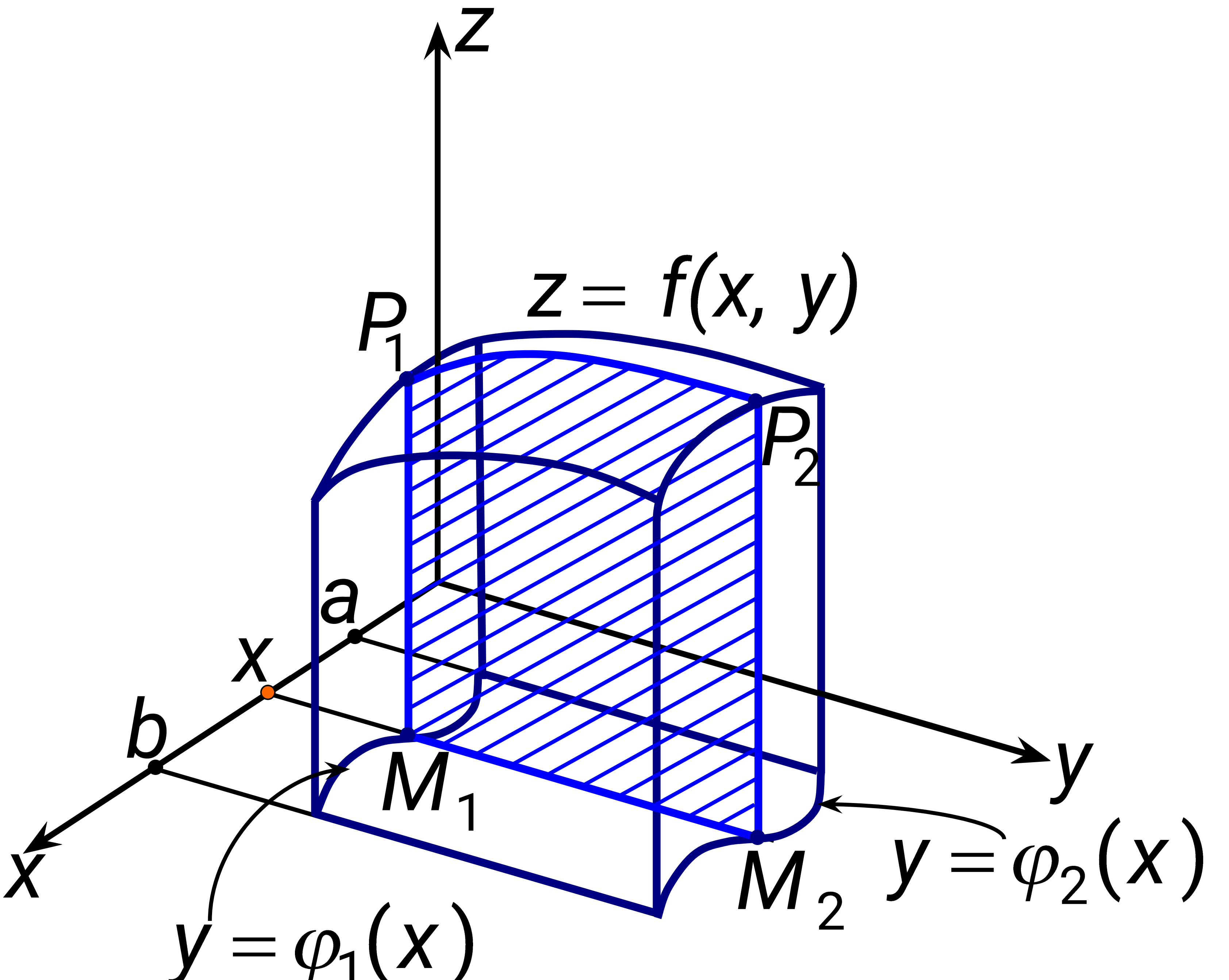
то
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx,$$

где $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ *– уравнения кривых, ограничивающих область* (σ) *снизу и сверху соответственно,* $[a;b]$ *– проекция области* (σ) *на ось* Ox.

2) *Если область* (σ) *– правильная в направлении оси* Ox,

то
$$\iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dx \right) dy,$$

где $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ *– уравнения кривых, ограничивающих область* (σ) *слева и справа соответственно,* $[c;d]$ *– проекция области* (σ) *на ось* Oy.


z
z = f(x, y)
P1
P2
a
x
b
y
x
M1
M2
y = φ2(x)
y = φ1(x)