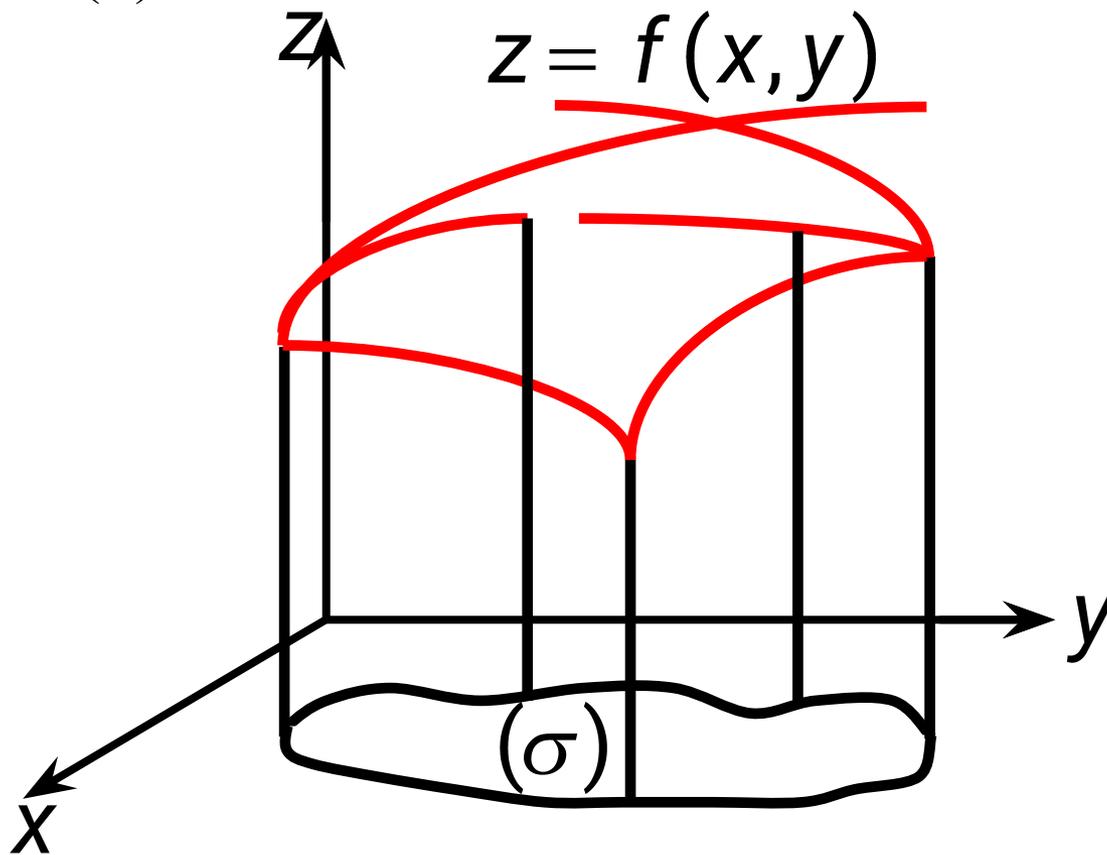


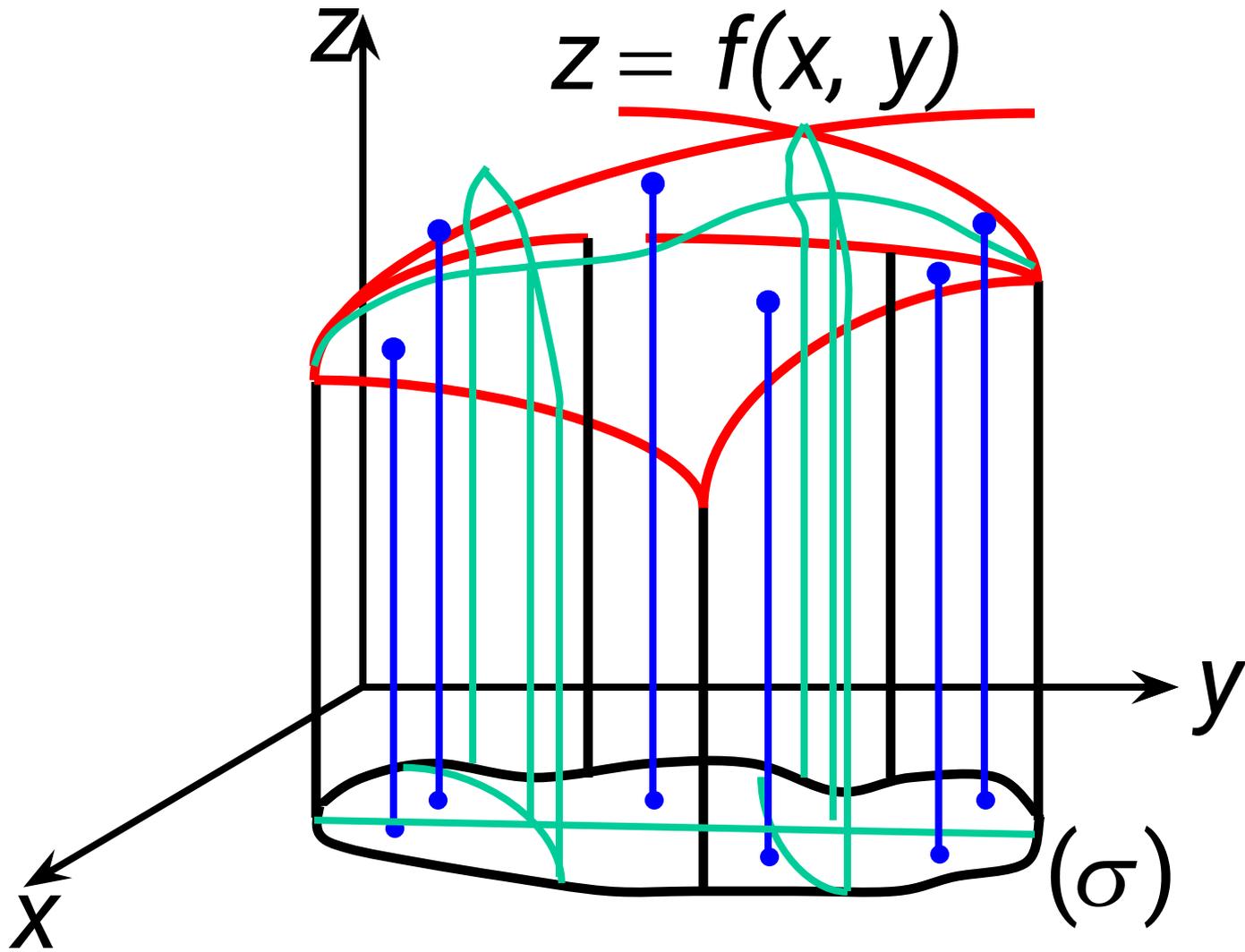
# Глава 2. Кратные криволинейные и поверхностные интегралы

## §1. Двойной интеграл

### 1. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

**Цилиндрическим телом с основанием  $(\sigma)$**  называют область в пространстве, ограниченную областью  $(\sigma)$ , лежащей в плоскости  $xOy$ , поверхностью  $z = f(x,y)$  и цилиндрической поверхностью  $z = \varphi(x,y)$ , направляющей которой является граница области  $(\sigma)$ .





## 2. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть  $(\sigma)$  – квадратуемая (т.е. имеющая площадь) область в плоскости  $xOy$ , и в области  $(\sigma)$  задана функция  $z = f(x, y)$ .

1. Разобьем область  $(\sigma)$  произвольным образом на  $n$  частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \dots, (\Delta\sigma_n).$$

2. В каждой области  $(\Delta\sigma_i)$  выберем произвольную точку  $P_i(\xi_i; \eta_i)$  и вычислим произведение  $f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$ , где  $\Delta\sigma_i$  – площадь области  $(\Delta\sigma_i)$ .

Сумму

$$I_n(\Delta\sigma_i, P_i) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

назовем **интегральной суммой** для функции  $f(x, y)$  по области  $(\sigma)$  (соответствующей данному разбиению области  $(\sigma)$  и данному выбору точек  $P_i$ ).

**Диаметром** множества  $G$  будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками множества  $G$ .

Пусть  $d_i$  – диаметр  $(\Delta\sigma_i)$ ,  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число  $I$  называется **пределом интегральных сумм**  $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого разбиения области  $(\sigma)$  у которого  $\lambda < \delta$ , при любом выборе точек  $P_i$  выполняется неравенство

$$|I_n(\Delta\sigma_i, P_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм  $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , то его называют **двойным интегралом** от функции  $f(x, y)$  по области  $(\sigma)$ .

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие существования двойного интеграла). *Если функция  $f(x,y)$  интегрируема в области  $(\sigma)$ , то она ограничена в этой области.*

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия существования двойного интеграла). *Если*

1) *область  $(\sigma)$  – квадратуемая,*

2) *функция  $f(x,y)$  ограничена в области  $(\sigma)$  и непрерывна всюду за исключением некоторого множества точек площади нуль,*

*то  $f(x,y)$  интегрируема в области  $(\sigma)$ .*

## СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Если функция  $f(x, y)$  – неотрицательна и интегрируема в области  $(\sigma)$ , то  $\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy$  равен объему цилиндрического тела с основанием  $(\sigma)$  и ограниченного сверху поверхностью  $z = f(x, y)$  (геометрический смысл двойного интеграла).

2.  $\iint_{(\sigma)} dx dy = \sigma$ , где  $\sigma$  – площадь области  $(\sigma)$ .

3. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.

$$\iint_{(\sigma)} c \cdot f(x, y) dx dy = c \cdot \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy.$$

4. Двойной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iint_{(\sigma)} [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_{(\sigma)} f_1(x, y) dx dy + \iint_{(\sigma)} f_2(x, y) dx dy.$$

5. Если область интегрирования  $(\sigma)$  разбита на две части  $(\sigma_1)$  и  $(\sigma_2)$ , не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) dx dy + \iint_{(\sigma_2)} f(x, y) dx dy$$

(свойство аддитивности двойного интеграла).

6. Если всюду в области  $(\sigma)$  функция  $f(x, y) > 0$  ( $f(x, y) \geq 0$ ), то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy \geq 0.$$

7. Если всюду в области  $(\sigma)$   $f(x, y) < \varphi(x, y)$  ( $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$ ), то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy \leq \iint_{(\sigma)} \varphi(x, y) dx dy.$$

8. (следствие свойств 7 и 2) Если  $m$  и  $M$  – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x, y)$  в области  $(\sigma)$ , то

$$m \cdot \sigma \leq \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy \leq M \cdot \sigma,$$

где  $\sigma$  – площадь области  $(\sigma)$ .

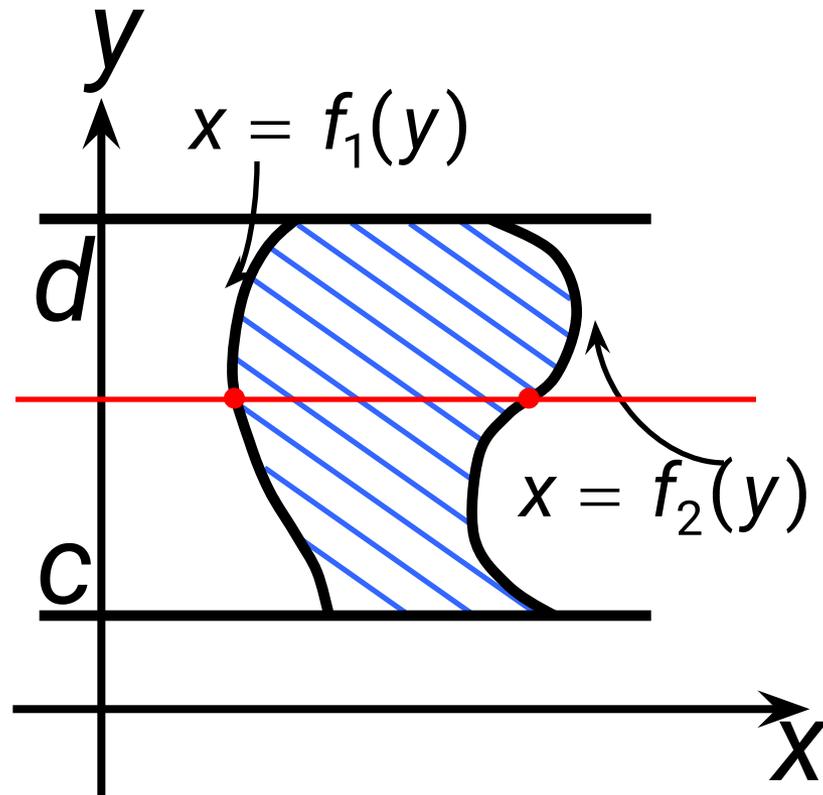
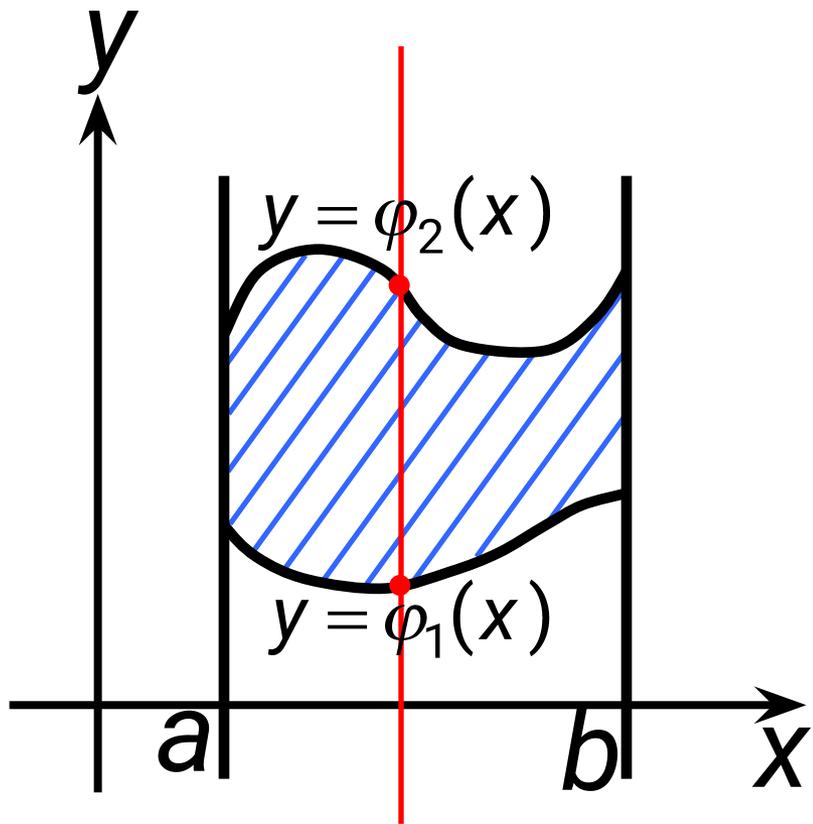
9. (теорема о среднем для двойного интеграла) Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в области  $(\sigma)$ , то найдется такая точка  $P_0(x_0; y_0) \in (\sigma)$ , что справедливо равенство

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = f(x_0; y_0) \cdot \sigma,$$

где  $\sigma$  – площадь области  $(\sigma)$ .

### 3. Вычисление двойного интеграла

Назовем область  $(\sigma)$  ***правильной в направлении оси  $Ox$  ( $Oy$ )***, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области  $(\sigma)$  параллельно оси  $Ox$  ( $Oy$ ) пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.



ТЕОРЕМА 3. Пусть  $f(x, y)$  интегрируема в области  $(\sigma)$ .

1) Если область  $(\sigma)$  – правильная в направлении оси  $Oy$ ,

$$\text{то} \quad \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

где  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  – уравнения кривых, ограничивающих область  $(\sigma)$  снизу и сверху соответственно,

$[a; b]$  – проекция области  $(\sigma)$  на ось  $Ox$ .

2) Если область  $(\sigma)$  – правильная в направлении оси  $Ox$ ,

$$\text{то} \quad \iint_{(\sigma_2)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

где  $x = f_1(y)$ ,  $x = f_2(y)$  – уравнения кривых, ограничивающих область  $(\sigma)$  слева и справа соответственно,

$[c; d]$  – проекция области  $(\sigma)$  на ось  $Oy$ .

