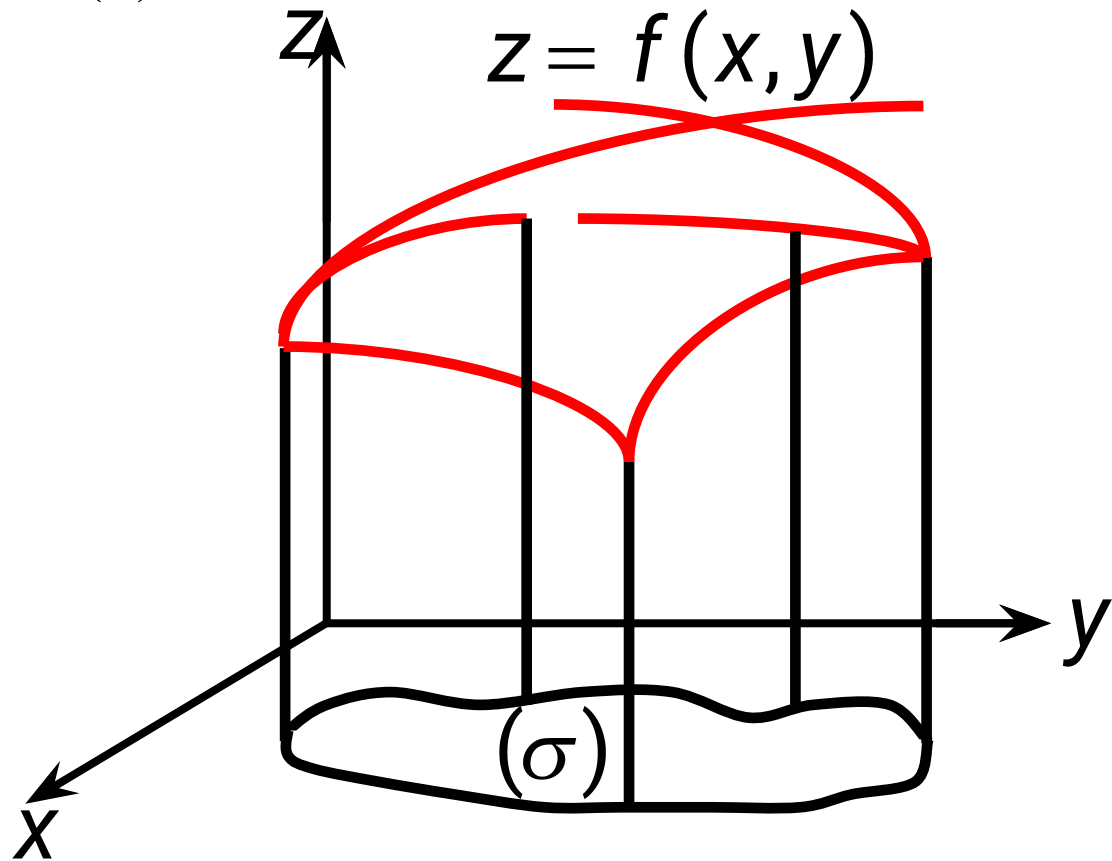


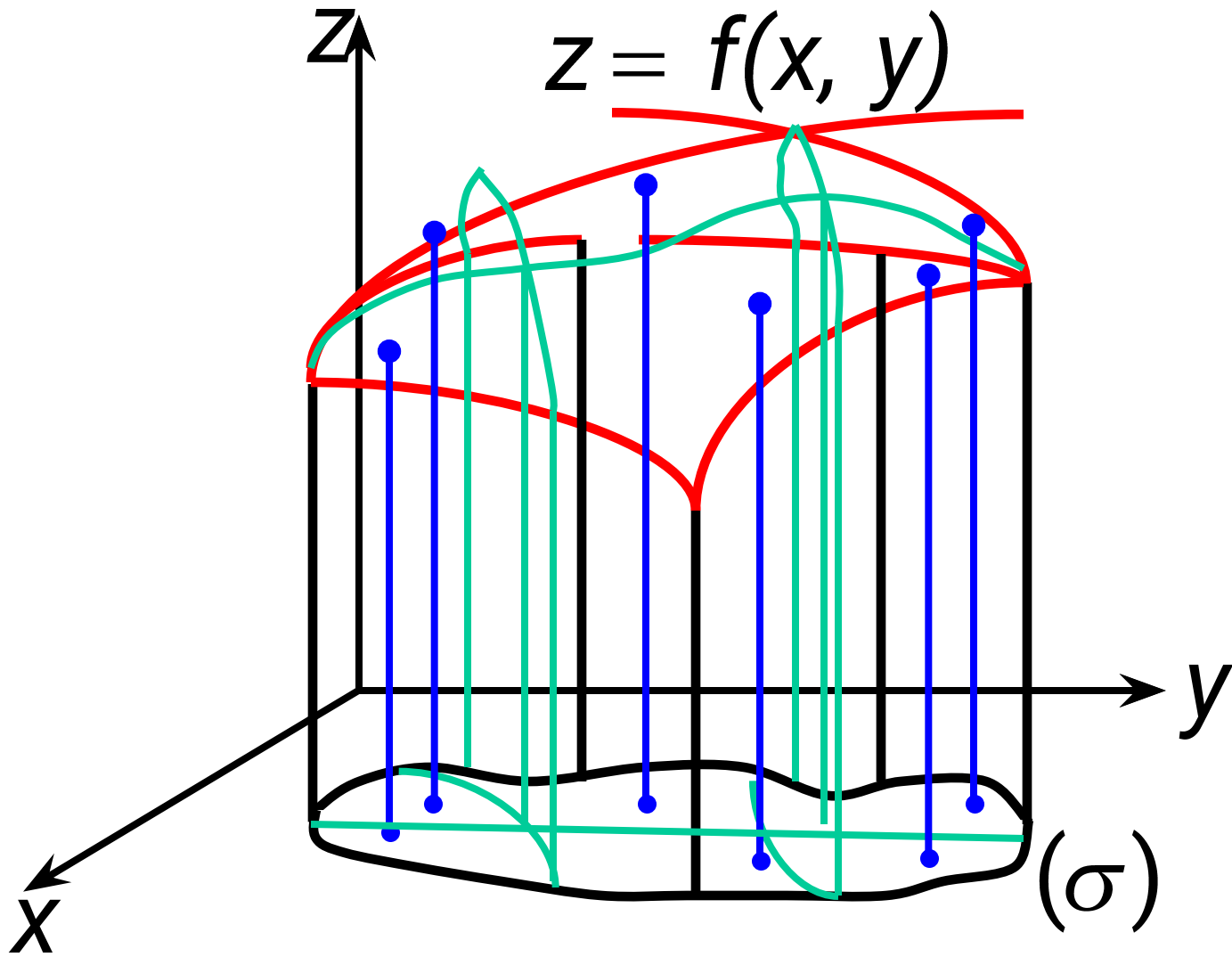
Глава 2. Кратные криволинейные и поверхностные интегралы

§1. Двойной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

Цилиндрическим телом с основанием (σ) называют область в пространстве, ограниченную областью (σ) , лежащей в плоскости xOy , поверхностью $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью $z = \varphi(x,y)$, направляющей которой является граница области (σ) .





2. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть (σ) – квадратуемая (т.е. имеющая площадь) область в плоскости xOy , и в области (σ) задана функция $z = f(x, y)$.

1. Разобьем область (σ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \dots, (\Delta\sigma_n).$$

2. В каждой области $(\Delta\sigma_i)$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь области $(\Delta\sigma_i)$.

Сумму

$$I_n(\Delta\sigma_i, P_i) = \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

назовем **интегральной суммой** для функции $f(x, y)$ по области (σ) (соответствующей данному разбиению области (σ) и данному выбору точек P_i).

Диаметром множества G будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками множества G .

Пусть d_i – диаметр $(\Delta\sigma_i)$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число I называется **пределом интегральных сумм** $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения области (σ) у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек P_i выполняется неравенство

$$|I_n(\Delta\sigma_i, P_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ при $\lambda \rightarrow 0$, то его называют **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области (σ) .

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие существования двойного интеграла). *Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области (σ) , то она ограничена в этой области.*

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия существования двойного интеграла). *Если*

1) *область (σ) – квадратуемая,*

2) *функция $f(x,y)$ ограничена в области (σ) и непрерывна всюду за исключением некоторого множества точек площади нуль,*

то $f(x,y)$ интегрируема в области (σ) .

СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Если функция $f(x, y)$ – неотрицательна и интегрируема в области (σ) , то $\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy$ равен объему цилиндрического тела с основанием (σ) и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ (геометрический смысл двойного интеграла).

2. $\iint_{(\sigma)} dx dy = \sigma$, где σ – площадь области (σ) .

3. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.

$$\iint_{(\sigma)} c \cdot f(x, y) dx dy = c \cdot \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy.$$

4. Двойной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iint_{(\sigma)} [f_1(x, y) + f_2(x, y)] dx dy = \iint_{(\sigma)} f_1(x, y) dx dy + \iint_{(\sigma)} f_2(x, y) dx dy.$$

5. Если область интегрирования (σ) разбита на две части (σ_1) и (σ_2) , не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\sigma_1)} f(x, y) dx dy + \iint_{(\sigma_2)} f(x, y) dx dy$$

(свойство аддитивности двойного интеграла).

6. Если всюду в области (σ) функция $f(x, y) > 0$
($f(x, y) \geq 0$), то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy \geq 0.$$

7. Если всюду в области (σ) $f(x, y) < \varphi(x, y)$
($f(x, y) \leq \varphi(x, y)$), то

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy \leq \iint_{(\sigma)} \varphi(x, y) dx dy.$$

8. (следствие свойств 7 и 2) Если m и M – соответственно
наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в
области (σ) , то

$$m \cdot \sigma \leq \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy \leq M \cdot \sigma,$$

где σ – площадь области (σ) .

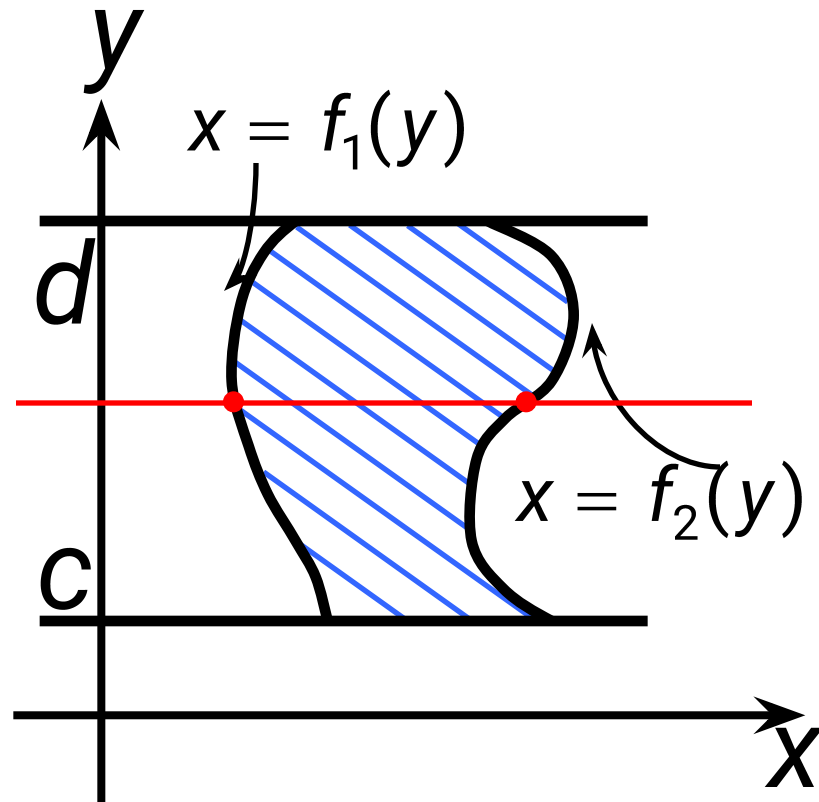
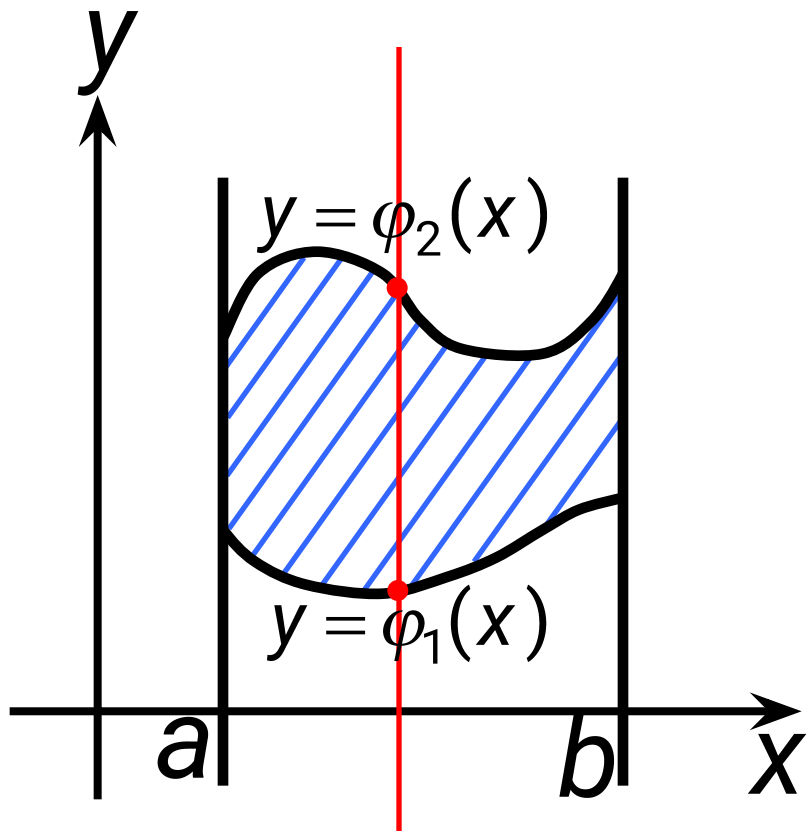
9. (теорема о среднем для двойного интеграла) Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области (σ) , то найдется такая точка $P_0(x_0; y_0) \in (\sigma)$, что справедливо равенство

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = f(x_0; y_0) \cdot \sigma,$$

где σ – площадь области (σ) .

3. Вычисление двойного интеграла

Назовем область (σ) ***правильной в направлении оси Ox (Oy)***, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (σ) параллельно оси Ox (Oy) пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.



ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x, y)$ интегрируема в области (σ) .

1) Если область (σ) – правильная в направлении оси Oy ,

$$\text{то} \quad \iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

где $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ – уравнения кривых, ограничивающих область (σ) снизу и сверху соответственно,

$[a; b]$ – проекция области (σ) на ось Ox .

2) Если область (σ) – правильная в направлении оси Ox ,

$$\text{то} \quad \iint_{(\sigma_2)} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

где $x = f_1(y)$, $x = f_2(y)$ – уравнения кривых, ограничивающих область (σ) слева и справа соответственно,

$[c; d]$ – проекция области (σ) на ось Oy .

