

Применение скалярного произведения к решению задач

Найти угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Решение

Пусть $CA_1 = a$, $CB_1 = b$, $CA_1 = CB_1 = a$.

Тогда $AA_1 = CA_1 - CA = a - 2b$, $BB_1 = CB_1 - CB = b - 2a$.

Поэтому

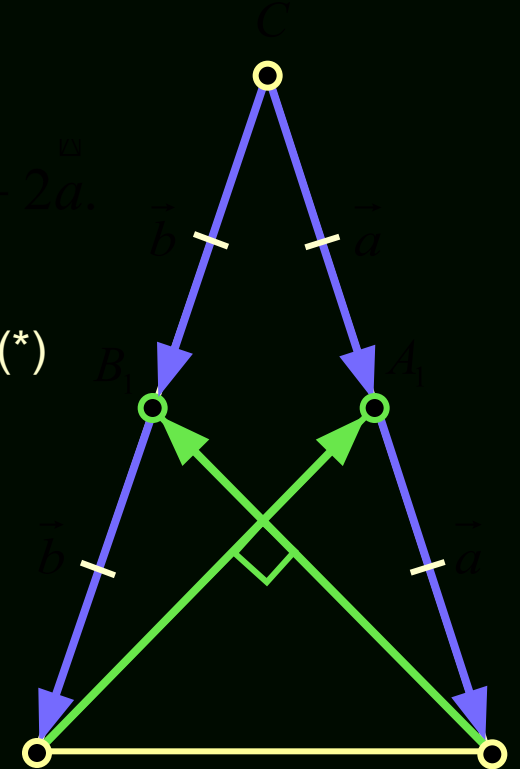
$$AA_1 \cdot BB_1 = (a - 2b) \cdot (b - 2a) = 5a^2 - b^2 - 2a \cdot b - 2b \cdot a = 5a^2 - b^2 - 4ab \quad (*)$$

По условию $AA_1 \perp BB_1$, следовательно $AA_1 \cdot BB_1 = 0$.

Далее, $a \cdot b = a \cdot \cos C$, $a - a = b \cdot b = a^2$.

Подставив в (*), находим $0 = 5a^2 \cos C - 4a^2$.

Отсюда получаем $\cos C = \frac{4}{5}$, $\angle C \approx 36^\circ 52'$.



Применение скалярного произведения к решению задач

Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин:

$$A(1; 2), B(4; -2), C(2; 0), D(0; 4)$$

Докажите, что $ABCD$ — трапеция и найдите ее площадь.

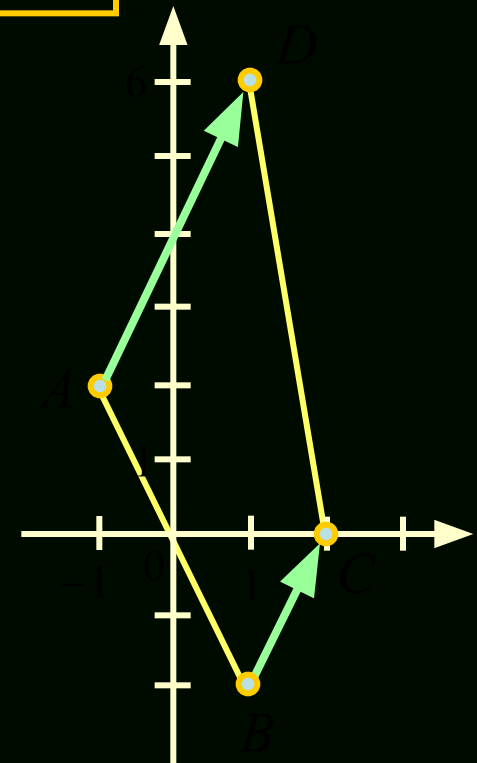
Решение

Найдем координаты векторов $\vec{AD}(0; 2)$ и $\vec{BC}(2; 2)$.

Эти векторы коллинеарны, т.к. $\vec{AD} = 0,5\vec{BC}$.

Поскольку $AD \parallel BC$ и $AD \neq BC$, $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC .

Теперь найдем S — площадь $ABCD$.



Применение скалярного произведения к решению задач

Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин:

$$A(-1, 2), B(1, -2), C(2, 0), D(1, 6)$$

Докажите, что $ABCD$ — трапеция и найдите ее площадь.

Решение

По формуле для площади четырехугольника,

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin(\angle CBD)$$

Так как $AC(3, -2)$ и $BD(0, 8)$, то

$$AC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}, \quad BD = 8$$

$$\cos(\angle CBD) = \frac{3 \cdot 0 + (-2) \cdot 8}{\sqrt{13} \cdot 8} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Отсюда } \sin(\angle CBD) = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{и} \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{13} \cdot 8 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 12.$$

