Применение скалярного произведения к решению задач

Найти угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Решение

Пусть $\overrightarrow{CA_1} = \vec{a},\ \overrightarrow{CB_1} = \vec{b},\ CA_1 = CB_1 = a.$

Тогда $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CA_1} - \overrightarrow{CA} = \vec{a} - 2\vec{b},\ \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CB} = \vec{b} - 2\vec{a}.$

Поэтому

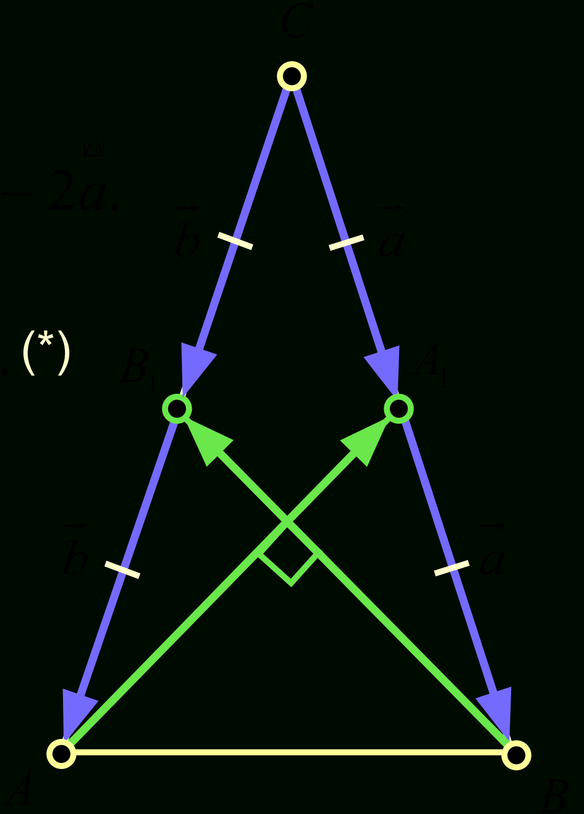
$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b} - 2\vec{a}\right) = 5\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{b}\cdot\vec{b}. \quad (*)$$

По условию $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BB_1}$, следовательно $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0.$

Далее, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a^2\cos C,\ \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{b} = a^2.$

Подставив в (*), находим $0 = 5a^2\cos C - 4a^2.$

Отсюда получаем $\cos C = \frac{4}{5},\ \angle C \approx 36°52'.$

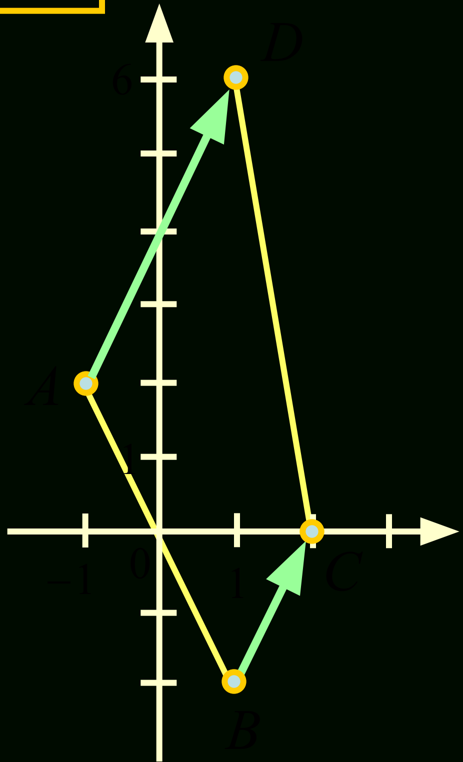


Применение скалярного произведения к решению задач

Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин:

$$A\,(-1;\,2),\ \ B\,(1;\,-2),\ \ C\,(2;\,0),\ \ D\,(1;\,6).$$

Докажите, что $ABCD$ — трапеция и найдите ее площадь.



Решение

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AD}\{2;\,4\}$ è $\overrightarrow{BC}\{1;\,2\}$.

Эти векторы коллинеарны, т.к. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}.$

Поскольку $AD \parallel BC$ и $AD \neq BC$, $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC.

Теперь найдем S – площадь $ABCD$.

Применение скалярного произведения к решению задач

Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин:

$$A\,(-1;\,2),\;\; B\,(1;\,-2),\;\; C\,(2;\,0),\;\; D\,(1;\,6).$$

Докажите, что $ABCD$ — трапеция и найдите ее площадь.

<ins>*Решение*</ins>

По формуле для площади четырехугольника,

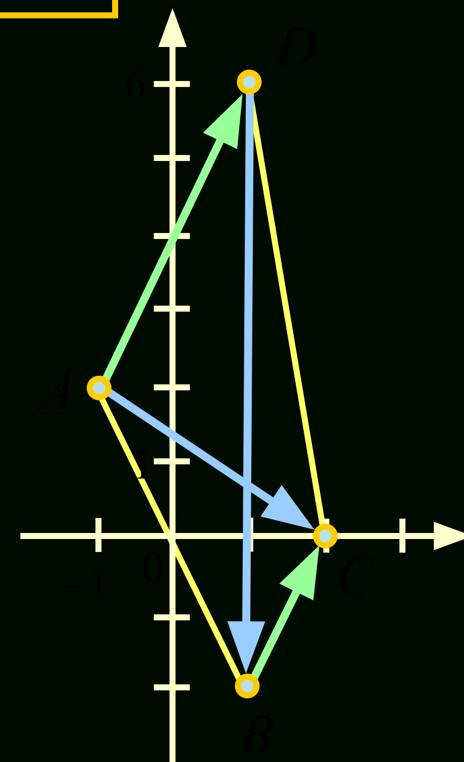
$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}})$$

Так как $\overrightarrow{AC}\,\{3;\,-2\}$ и $\overrightarrow{BD}\,\{0;\,8\}$, то

$$AC=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13},\;\; BD=8,$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}})=\frac{3\cdot 0-16}{\sqrt{13}\cdot 8}=-\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Отсюда $\sin(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}})=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ и $S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 8\cdot\dfrac{3}{\sqrt{13}}=12.$



<ins>Задача 1055</ins> **Задача 1073**