Применение скалярного произведения к решению задач

Найти угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Решение

Пусть $\vec{CA_1}=\vec{a},\ \vec{CB_1}=\vec{b},\ CA_1=CB_1=a.$

Тогда $\vec{AA_1}=\vec{CA_1}-\vec{CA}=\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{BB_1}=\vec{CB_1}-\vec{CB}=\vec{b}-2\vec{a}.$

Поэтому

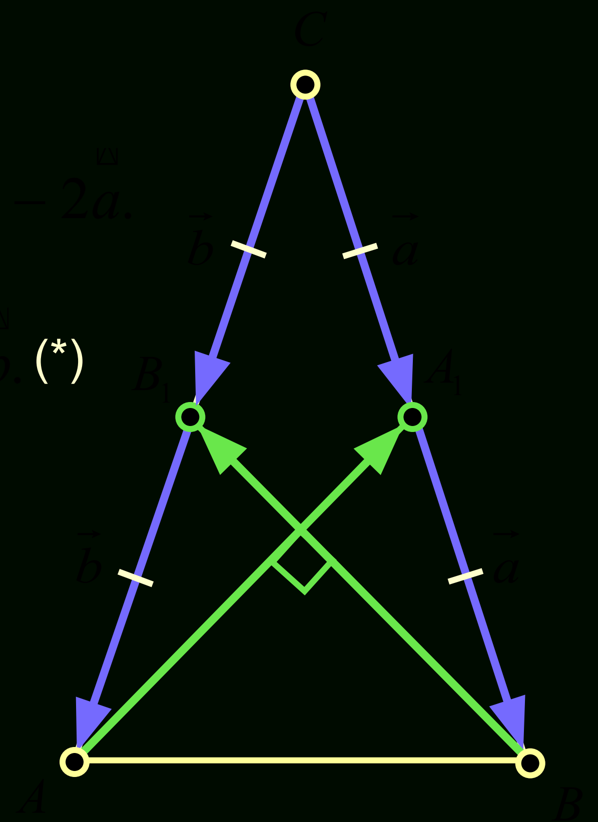
$$\vec{AA_1}\cdot\vec{BB_1}=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)=5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}. \quad (*)$$

По условию $\vec{AA_1}\perp\vec{BB_1}$, следовательно $\vec{AA_1}\cdot\vec{BB_1}=0.$

Далее, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2\cos C,\ \vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}=a^2.$

Подставив в (*), находим $0=5a^2\cos C-4a^2.$

Отсюда получаем $\cos C=\dfrac{4}{5},\ \angle C\approx 36°52'.$



Задача 1055

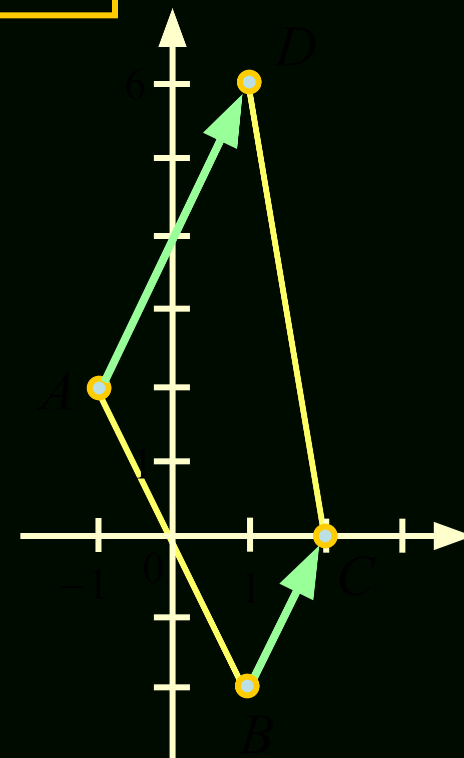
Задача 1073

Применение скалярного произведения к решению задач

Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин:

$$A\,(-1;\,2),\;\; B\,(1;\,-2),\;\; C\,(2;\,0),\;\; D\,(1;\,6).$$

Докажите, что $ABCD$ — трапеция и найдите ее площадь.



Решение

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AD}\{2;\,4\}$ è $\overrightarrow{BC}\{1;\,2\}$.

Эти векторы коллинеарны, т.к. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.

Поскольку $AD \parallel BC$ и $AD \neq BC$, $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC.

Теперь найдем S – площадь $ABCD$.

Применение скалярного произведения к решению задач

Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин:

$$A\,(-1;\,2),\;\; B\,(1;\,-2),\;\; C\,(2;\,0),\;\; D\,(1;\,6).$$

Докажите, что $ABCD$ — трапеция и найдите ее площадь.

<u>*Решение*</u>

По формуле для площади четырехугольника,

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}})$$

Так как $\overrightarrow{AC}\,\{3;\,-2\}$ и $\overrightarrow{BD}\,\{0;\,8\}$, то

$$AC=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13},\;\; BD=8,$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}})=\frac{3\cdot 0-16}{\sqrt{13}\cdot 8}=-\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Отсюда $\sin(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}})=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ и $S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot 8\cdot\dfrac{3}{\sqrt{13}}=12.$