

# **специальные вопросы ТВиМС**

## **часть1**

**распределения,  
связанные с нормальным**

**лекция первая**

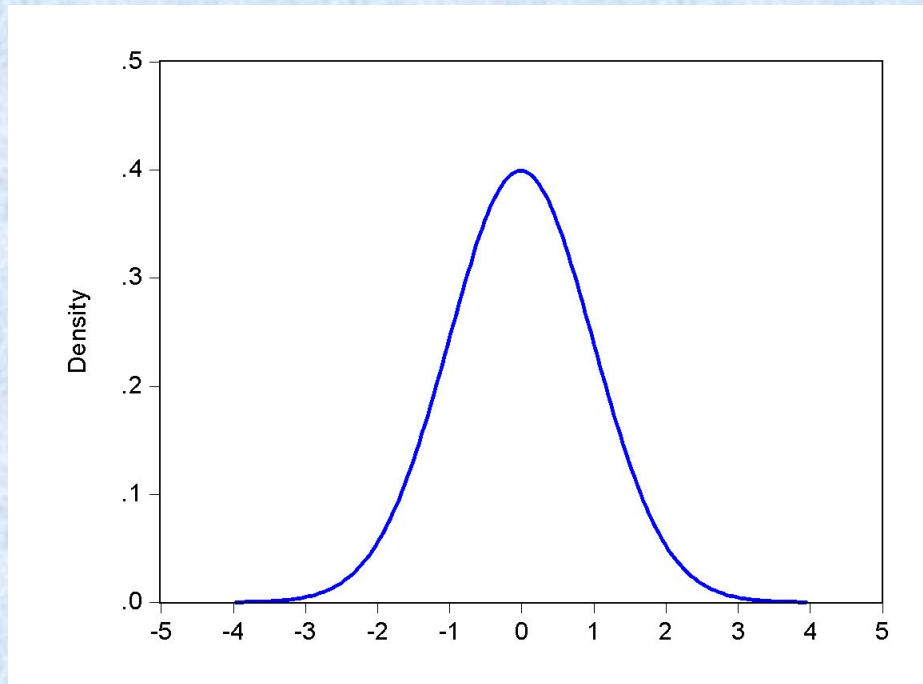
# НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН

**Def**  $\xi \sim N(\mu; \sigma^2) \Leftrightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$E\xi = \mu, \quad D\xi = \sigma^2, \quad As\xi = 0, \quad Ex\xi = 0$$

$\mu$  - параметр сдвига,  $\sigma$  - параметр масштаба

$\xi \sim N(0; 1)$  – стандартный нормальный закон



# ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

**Свойства** нормального распределения:

1.  $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b; a^2\sigma^2)$

устойчивость относительно линейного преобразования.

Так же этим свойством обладают распределения:

✓  $X \sim U[m_1; m_2] \Rightarrow aX + b \sim U[am_1 + b; am_2 + b]$  - равномерное

✓  $X \sim \text{Exp}(\lambda, \sigma) \Rightarrow aX + b \sim \text{Exp}(a\lambda; a\sigma + b)$  -  
экспоненциальное

✓  $X \sim L(\lambda, \sigma) \Rightarrow aX + b \sim L(a\lambda; a\sigma + b)$  - Лапласа

✓  $X \sim \Lambda(\mu; \sigma) \Rightarrow aX + b \sim \Lambda(a\mu + b; a\sigma)$  - логистическое

✓  $X \sim C(\mu; \sigma) \Rightarrow aX + b \sim C(a\mu + b; a\sigma)$  - Коши

*Найдите формулы плотностей и докажите, что свойство линейности выполняется, в т.ч. и для  $N(\mu; \sigma^2)$*

# ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

**Свойства** нормального распределения:

**Пример**

$X \sim \text{Exp}(\lambda, a)$   $\Rightarrow$   $aX + b \sim \text{Exp}(a\lambda; aX + b)$  -  
экспоненциальное

$\lambda$  - характеризует время ожидания некоторого события

$a$  - характеризует момент времени, с которого мы  
ожидаем проявление события

$a\lambda$  - изменение масштаба времени

$aX + b$  – сдвиг момента времени (в новом масштабе), с  
которого будем ожидать появление события

# ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

**Свойства** нормального распределения:

1. устойчивость относительно линейного преобразования

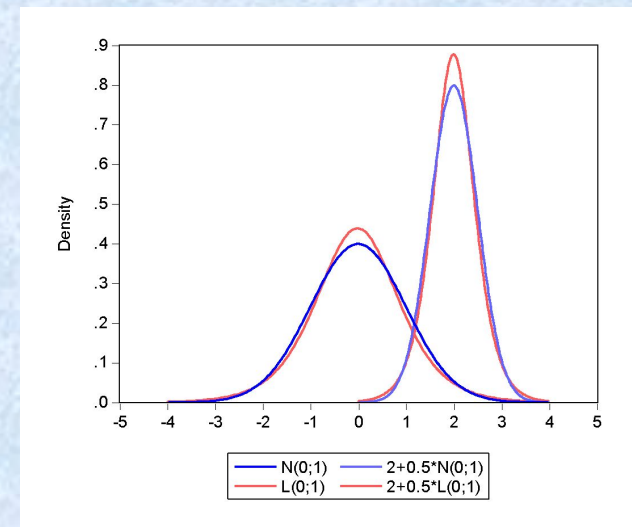
**Пример** логистическое распределение:

$$\xi \sim \Lambda(\mu; \sigma): \quad \lambda_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2}; \quad \Lambda_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}$$

$$\lambda_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{a} \cdot \lambda_{\xi}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{e^{-\frac{x-(a\mu+b)}{a\sigma}}}{\left(1 + e^{-\frac{x-(a\mu+b)}{a\sigma}}\right)^2}$$

$$a\xi + b \sim \Lambda(a\mu + b; a\sigma)$$

*Докажите симметричность*  
*Найдите мат.ожидание*



# ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

**Свойства** нормального распределения:

1. устойчивость относительно умножения на константу.

✓  $X \sim P(k; \theta) \Rightarrow aX \sim P(ak; \theta)$  - Парето

✓  $X \sim W(k; \lambda) \Rightarrow aX \sim W(k; a\lambda)$  - Вейбула

✓  $X \sim \Gamma(k; \theta) \Rightarrow aX \sim \Gamma(k; a\theta)$  – гамма-распределение

*Найдите формулы плотностей и докажите, что это свойство выполняется*

# ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

**Свойства** нормального распределения:

**Пример**

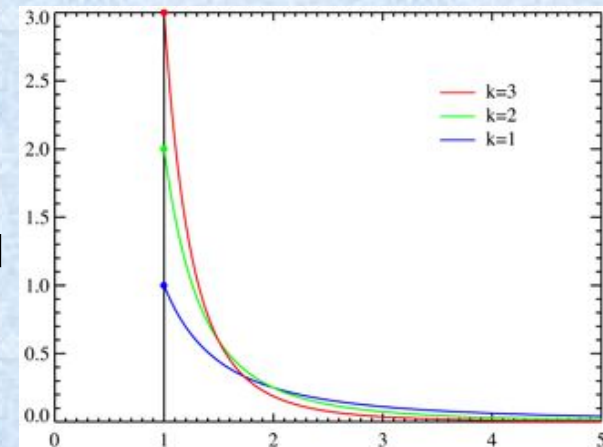
$x \sim P(k; \theta) \Rightarrow ax \sim P(ak; \theta)$  - распределение доходов

$k$  – характеризует минимальный доход (единица измерения)

$\theta$  - параметр формы

$ak$  – изменение единицы измерения

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{q}{k} \left( \frac{x-k}{\theta} \right)^{q-1} e^{-\frac{x-k}{\theta}}, & x \geq k \\ 0, & x < k \end{cases}$$

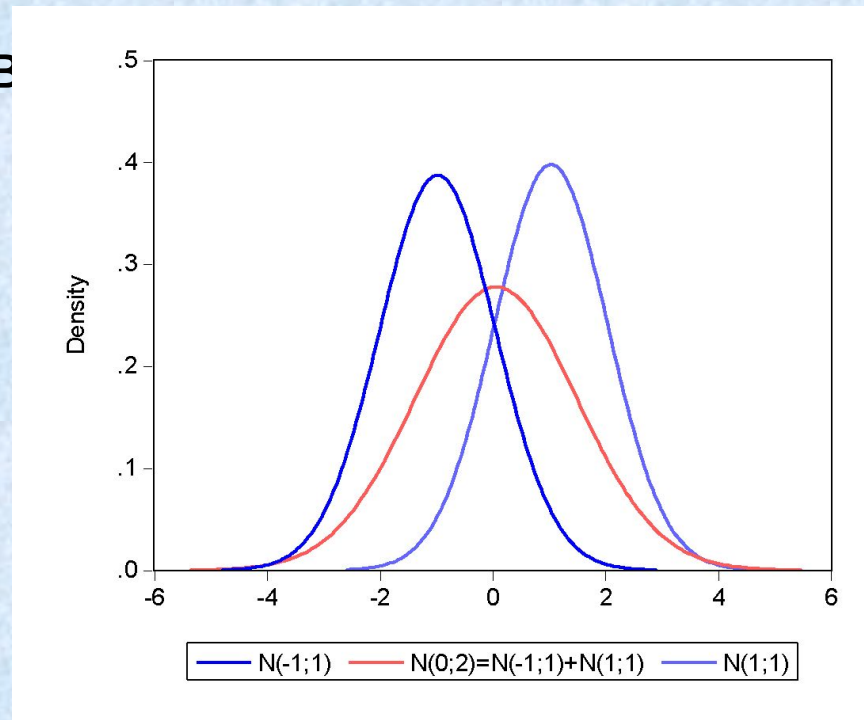


# УСТОЙЧИВОСТЬ ПО СЛОЖЕНИЮ

**Свойства** нормального распределения:

2.  $X_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$  - *независимы*  $\Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ :

УСТОЙЧИВО





# УСТОЙЧИВОСТЬ ПО СЛОЖЕНИЮ

**Свойства** нормального распределения:

2. Устойчивостью по сложению независимых с.в. обладают также:

$X_i \sim B(n_i; p) \Rightarrow \sum X_i \sim B(\sum n_i; p)$  - биномиальное

✓  $X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i) \Rightarrow \sum X_i \sim \text{Pois}(\sum \lambda_i)$  - пуассоновское

✓  $X_i \sim \Gamma(k_i; \theta) \Rightarrow \sum X_i \sim \Gamma(\sum k_i; \theta)$  – гамма распределение

✓  $X_i \sim \chi^2(k_i) \Rightarrow \sum X_i \sim \chi^2(\sum k_i)$  – Хи-квадрат

*Докажите это свойство для пуассоновского распределения*

$X_i \sim \text{Exp}(\lambda; 0) \Rightarrow \sum X_i \sim \Gamma(k; \lambda)$  – экспоненциальное сворачивается в гамма-распределение при суммировании

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПО СЛОЖЕНИЮ

**Свойства** нормального распределения:

## Примеры

$X_i \sim B(n_i; p) \Rightarrow \sum X_i \sim B(\sum n_i; p)$  - биномиальное

$p$  – вероятность успеха

$n$  – длина сери испытаний

$E \sum X_i = p \sum n_i$  – ожидаемое число успехов не зависит от числа серий

$X_i \sim \text{Pois}(\lambda_i) \Rightarrow \sum X_i \sim \text{Pois}(\sum \lambda_i)$  - пуассоновское

$\lambda$  - характеризует интенсивность потока событий

$E \sum X_i = \sum \lambda_i$  – суммарная интенсивность нескольких потоков

# ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

**Свойства** нормального распределения:

3.  $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

Правило нескольких сигм:

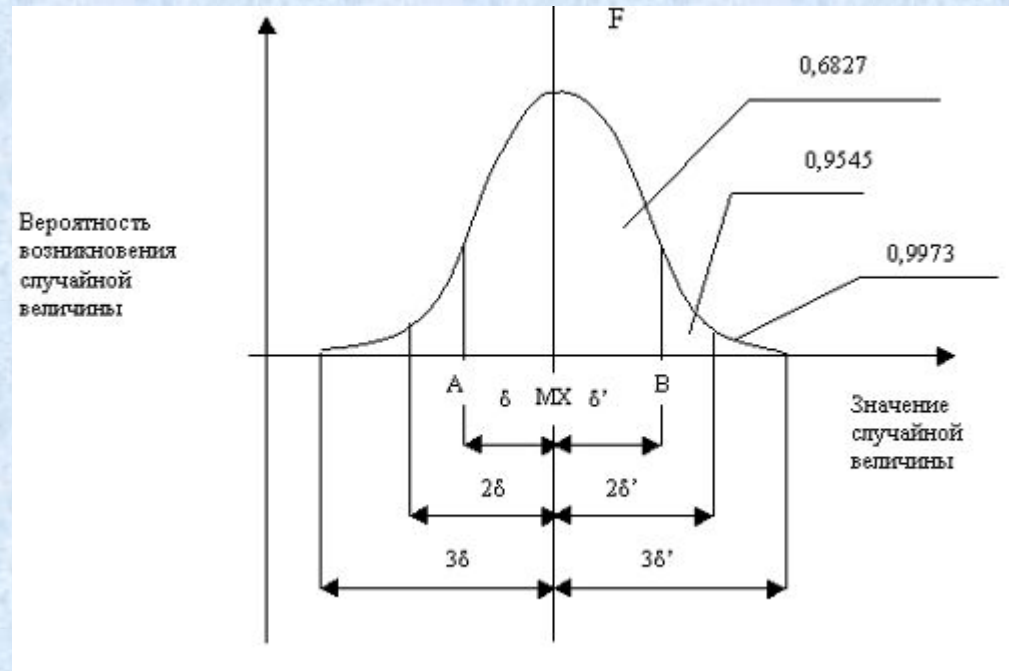
$$P(|X - \mu| < \sigma) \approx 68.3\%$$

$x = \mu \pm \sigma$  - точка перегиба

гауссианы

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) \approx 95.5\%$$

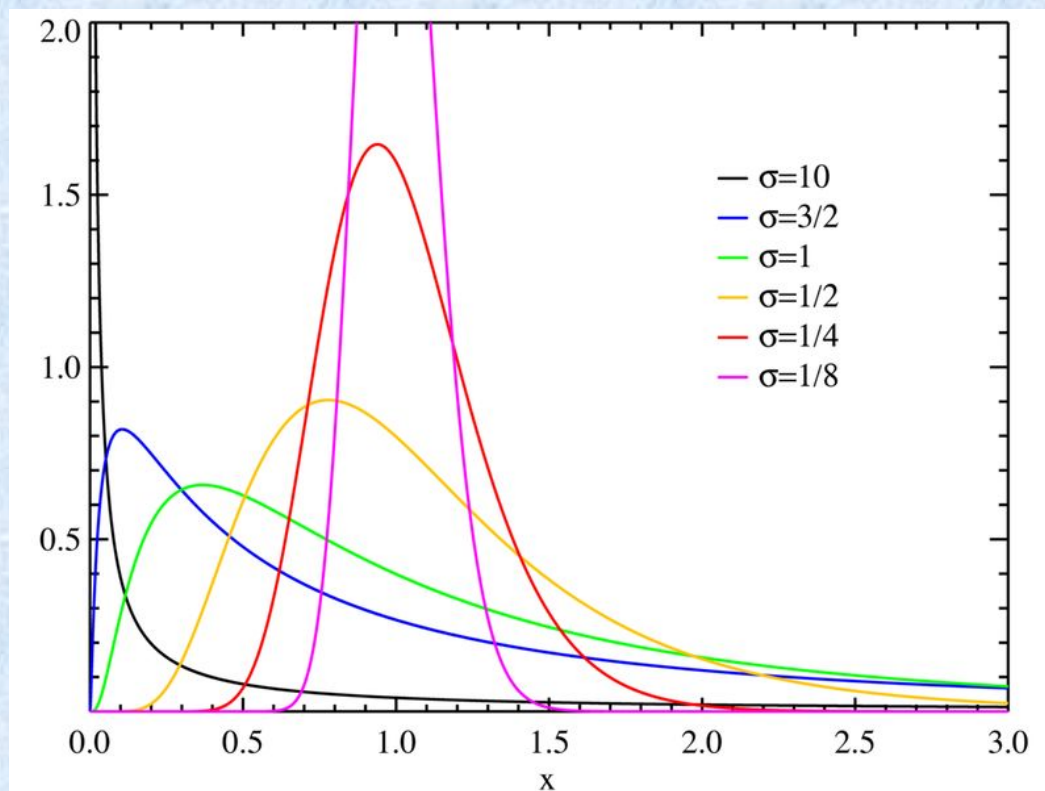
$$P(|X - \mu| < 3\sigma) \approx 99.7\%$$



# ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

**Def**  $X \sim \text{LN}(\mu; \sigma^2)$  – логнормальное распределение с параметром сдвига  $\mu$  и параметром масштаба  $\sigma$ , если

$$\ln X \sim N(\mu; \sigma^2)$$



# ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

**Плотность** логнормального распределения

Рассмотрим  $\square \sim \text{LN}(0;1) \Leftrightarrow \square \sim \text{N}(0;1)$

$$F_x(x) = P(x < x) = P(e^h < x) = P(h < \ln x) = F_h(\ln x)$$

$$f_x(x) = F_x'(x) = F_h'(\ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left\{-\frac{\ln^2 x}{2}\right\} \times \frac{1}{x}$$

# ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

**Плотность логнормального распределения**

$$\square \sim \text{LN}(0;1) \Leftrightarrow \square \sim \text{N}(0;1)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x)^2}{2}\right\} \frac{1}{x}$$

$$\square \sim \text{LN}(\mu; \sigma^2) \Leftrightarrow \square \sim \text{N}(\mu; \sigma^2)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{x}$$

*Докажите, используя линейность нормального закона*

# ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

## Свойства логнормального распределения

$$x \sim LN(m, s^2)$$

$$1. E x = \exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right) \quad 2. M e x = e^m$$

$$3. M o x = \exp\left(m - \frac{s^2}{2}\right) \quad 4. D x = \left(e^{s^2} - 1\right) x e^{2m + s^2}$$

$$5. x \sim LN(m, s^2) \quad \text{и} \quad x^a \sim LN(am, a^2 s^2)$$

Докажите свойства (начните со случая  $x \sim LN(0;1)$  )

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Коши, С

**Def**  $\xi_1, \xi_2 \sim N(0;1) \Rightarrow \xi = \xi_1 / \xi_2 \sim C(0;1)$  –

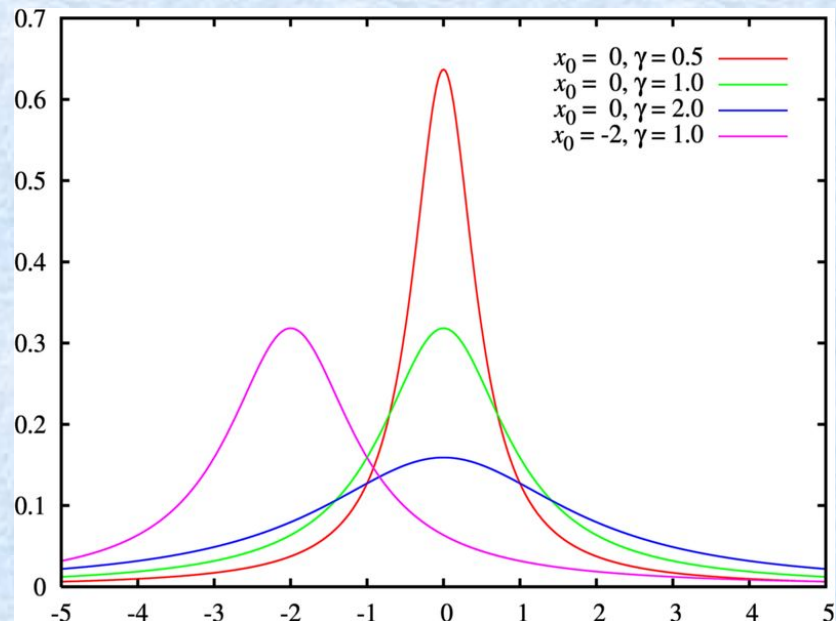
стандартное распределение *Коши*

**Def**  $\xi \sim C(\mu; \sigma)$  – распределение *Коши* с

параметром сдвига  $\mu$  и параметром масштаба  $\sigma$ , если

*d.d.f.*  $\xi$ :

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi \left[ \sigma^2 + \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2} \right]}$$





# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Коши, С

**Свойства** распределения Коши:

$$X \sim C(\mu; \sigma)$$

1.  $M_0 X = M_e X = \mu$

2. Не существует ни одного момента!

( в т.ч.  $E X$ ,  $D X$ ,  $A s X$ ,  $E x X$  - не определены)

3.  $X \sim C(\mu; \sigma) \Rightarrow aX + b \sim C(a\mu + b; a\sigma)$

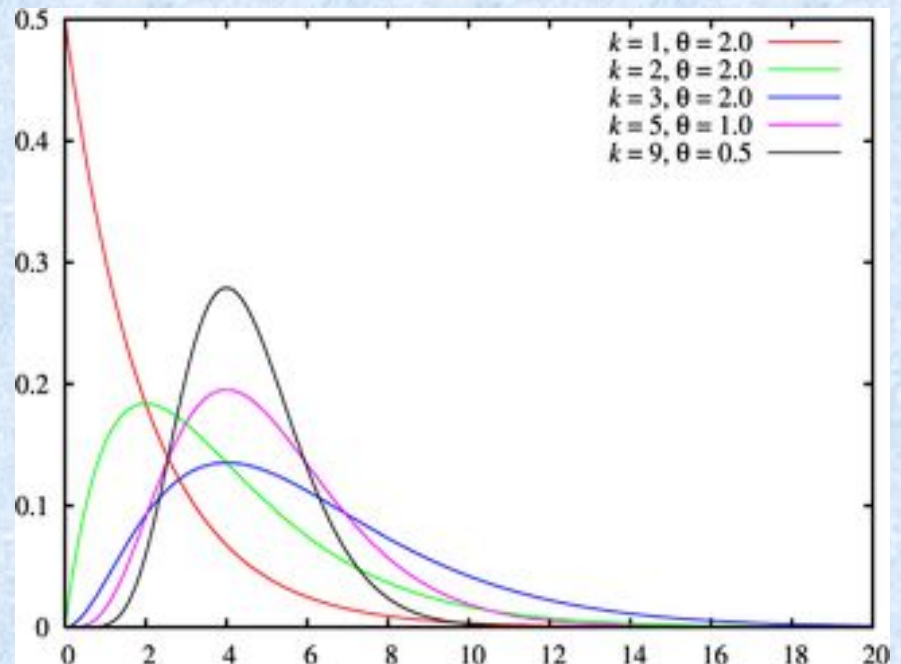
4.  $X_i \sim C(0; 1) \text{ i.i.d.} \Rightarrow (\sum X_i)/n \sim C(0; 1)$

*Докажите свойства 1. и 3.*

# ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, Г

**Def**  $X \sim \Gamma(k; \theta)$  – Гамма-распределение с параметром формы  $k$  и параметром масштаба  $\theta$ , если  $d.d.f$   $X$ :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\theta \Gamma(k)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



# ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, Г

**Свойства** Гамма-распределения:

$$x \sim G(k; q)$$

$$1. E x = k \times q$$

$$2. D x = k \times q^2$$

$$3. M_0 x = (k - 1) \times q, (k \geq 1) \quad 4. A s x = \frac{2}{\sqrt{k}}$$

$$5. E x x = \frac{6}{k}$$

$$6. G(1; q) = \text{Exp}(q; 0) \quad (\text{ò.ê. } \Gamma(1) = 1)$$

$$7. x_1 \sim G(k_1; q); \quad x_2 \sim \tilde{A}(k_2; q) \quad \text{P} \quad x_1 + x_2 \sim G(k_1 + k_2; q)$$

(ñâî éñòâî 7. - òî ëüëî äëÿ í åçàâèñèì ù ð  $x_1; x_2$ !)

$$8. x \sim G(k; q) \quad \text{P} \quad a x \sim G(k; a \times q)$$

*Докажите свойства 1.-3. ,6. и 8.*

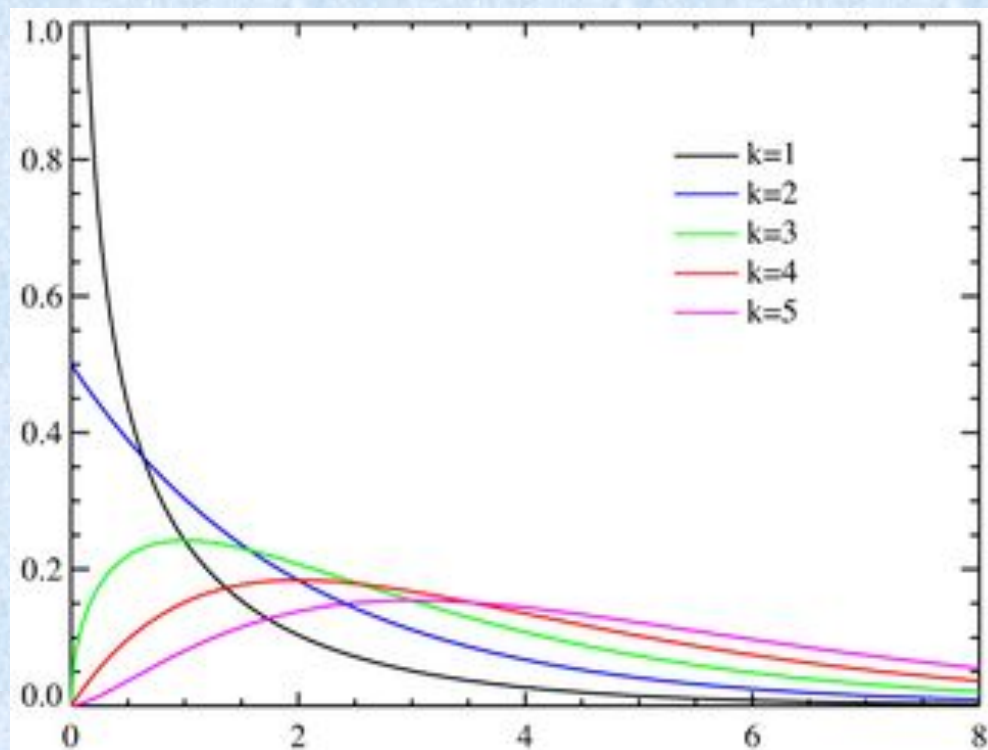
*(для 1. и 2. используйте индукцию и свойство 7.)*

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, $\chi^2$

**Def**  $h_i$  - *i.i.d.*  $N(0;1)$   $\Rightarrow x_k = \sum_{i=1}^k h_i^2 \sim c^2(k)$

распределение *Пирсона*,

*d.f.*= $k$  – число степеней свободы (параметр формы)



# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, $\chi^2$

**Плотность** распределения  $\chi^2(1)$

Рассмотрим  $\chi \sim N(0;1) \Leftrightarrow \chi^2 = \chi^2 \sim \chi^2(1)$

$$F_x(x) = P(\chi < \sqrt{x}) = P(h^2 < x) = P(h < \sqrt{x}) = F_h(\sqrt{x})$$

$$f_x(x) = F_x'(x) = F_h'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, $\chi^2$

**Плотность** распределения  $\chi^2(1)$

Рассмотрим  $\chi \sim N(0;1) \Leftrightarrow \chi^2 = \chi^2 \sim \chi^2(1)$

$$F_x(x) = P(\chi < x) = P(h < \sqrt{x}) = F_h(\sqrt{x})$$

$$f_x(x) = F_x'(x) = F_h'(\sqrt{x}) = j_h(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2 \times \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left\{-\frac{\sqrt{x}^2}{2}\right\} \times \frac{1}{2 \times \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-x/2} \times \frac{1}{2} \times x^{-1/2} =$$

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, $\chi^2$

**Плотность** распределения  $\chi^2(1)$

Рассмотрим  $\chi \sim N(0;1) \Leftrightarrow \chi^2 = \chi^2 \sim \chi^2(1)$

$$F_x(x) = P(\chi < x) = P(h < \sqrt{x}) = F_h(\sqrt{x})$$

$$f_x(x) = F_x'(x) = F_h'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2 \times \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{\sqrt{x}^2}{2}\right) \times \frac{1}{2 \times \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-x/2} \times \frac{1}{2} \times x^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \times e^{-x/2} \times \frac{1}{2} \times x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \times \frac{e^{-x/2}}{2 \times \Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \times \frac{1}{\Gamma(1/2)}$$

$$\left(\text{т.е. } \Gamma(1/2) = \sqrt{4\pi}\right)$$

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, $\chi^2$

## Свойства распределения $\chi^2(k)$

$$0. X_k \sim \chi^2(k) = \text{Gamma}\left(\frac{k}{2}; \frac{2}{k}\right)$$

$$1. EX_k = k$$

$$2. DX_k = 2k$$

$$3. \text{Mo} X_k = (k - 2), (k \geq 2) \quad 4. \text{As} X_k = \sqrt{\frac{8}{k}}$$

$$5. \text{E} X_k^2 = \frac{12}{k}$$

$$6. \chi^2(2) = \text{Exp}(2; 0)$$

$$7. X_1 \sim \chi^2(k_1); X_2 \sim \chi^2(k_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi^2(k_1 + k_2)$$

( $\hat{n}\hat{a}\hat{i} \hat{e}\hat{n}\hat{o}\hat{a}\hat{i}$  7. -  $\hat{o}\hat{i} \hat{e}\hat{u}\hat{e}\hat{i}$  äëÿ í âçàâèñèì û õ  $X_1; X_2$  !)

$$8. \frac{X_k}{k} \xrightarrow{P} 1$$



# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, $\chi^2$

## Свойства распределения $\chi^2(k)$

Все свойства (кроме 8.) – вытекают из двух:

$$a. x_1 \sim \chi^2(1) = G\left(\frac{1}{2}; 2\frac{\sigma^2}{\theta}\right)$$

$$b. x_1 \sim G(k_1; q); \quad x_2 \sim \tilde{A}(k_2; q) \quad \text{и} \quad x_1 + x_2 \sim G(k_1 + k_2; q)$$

( $x_1, x_2$  – независимы!)

$$0. x_k \sim G\left(\frac{k}{2}; 2\frac{\sigma^2}{\theta}\right)$$

$$x_k \sim \chi^2(k), \quad x_k = \sum_{i=1}^k h_i^2, \quad h_i - i.i.d. N(0; 1)$$

$$h_i^2 \sim \chi^2(1) = G\left(\frac{1}{2}; 2\frac{\sigma^2}{\theta}\right) \quad x_k = \sum_{i=1}^k h_i^2 \sim G\left(\frac{k}{2}; 2\frac{\sigma^2}{\theta}\right)$$

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, $\chi^2$

## Свойства распределения $\chi^2(k)$

Прямое доказательство:

$$1. E x_k = m$$

$$x_k \sim \chi^2(k), \quad x_k = \sum_{i=1}^k h_i^2, \quad h_i - i.i.d. N(0;1)$$

$$E h_i^2 = D h_i^2 - (E h_i)^2 = 1 - 0 = 1$$

$$E x_k = E \sum_{i=1}^k h_i^2 = \sum_{i=1}^k E h_i^2 = k \times 1$$

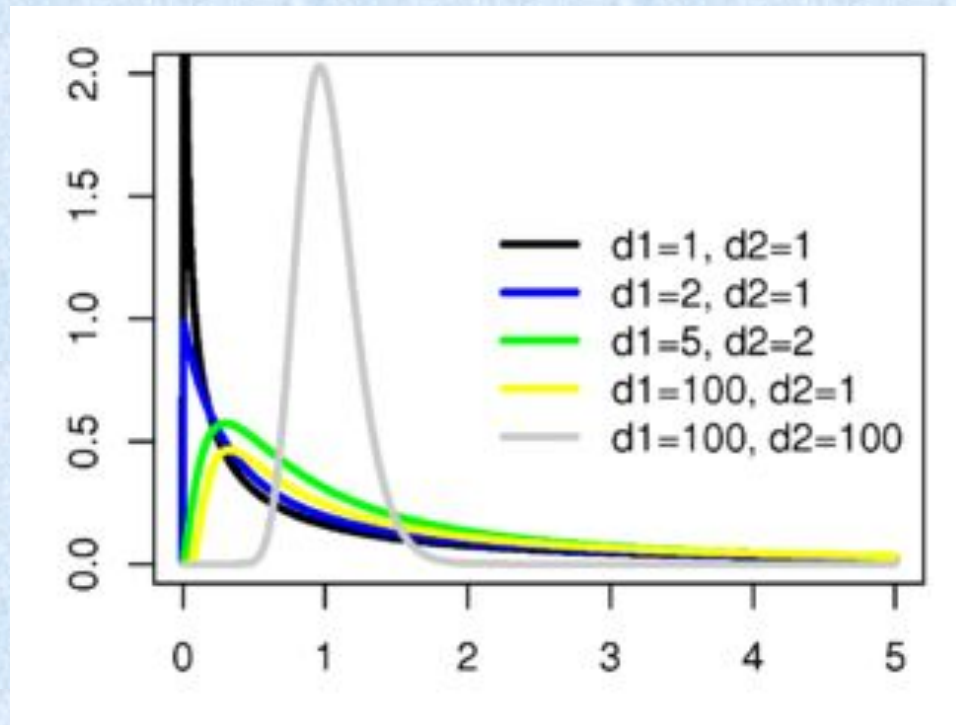
*Докажите напрямую свойства 2., 3., 6.*

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Снедекора-Фишера, F

**Def** F-распределение (Снедекора-Фишера),

$$x_{k_1} \sim c^2(k_1), x_{k_2} \sim c^2(k_2) \text{ и } h = \frac{x_{k_1}/k_1}{x_{k_2}/k_2} \sim F(k_1; k_2)$$

$d.f. = (k_1; k_2)$  – число степеней свободы



# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Снедекора-Фишера, F

## Свойства F-распределения (Снедекора-Фишера)

$$h \sim F(k_1; k_2)$$

$$1. E h = \frac{k_2}{k_2 - 2}, k_2 > 2 \quad 2. M o h = \frac{k_1 - 2}{k_1} \times \frac{k_2}{k_2 + 2}, k_1 > 2$$

$$3. h_{k_1; k_2} \stackrel{3/4}{k_1} \stackrel{3/4}{\otimes} \stackrel{3/4}{\neq} \stackrel{3/4}{k_2} \stackrel{3/4}{\otimes} \stackrel{3/4}{\neq} 1 \quad 4. k_1 \times h_{k_1; k_2} \stackrel{3/4}{k_1} \stackrel{3/4}{\otimes} \stackrel{3/4}{\neq} \stackrel{3/4}{k_2} \stackrel{3/4}{\otimes} \stackrel{3/4}{\neq} \chi \sim c^2(k_1)$$

$$5. h \sim F(k_1; k_2) \quad \text{и} \quad \frac{1}{h} \sim F(k_2; k_1)$$

*Докажите свойства 3.-5.*

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

**Def** распределение Стьюдента с  $d.f.=k$   
(параметр формы):

$$z, h_i - i.i.d. N(0;1) \quad \text{и} \quad x_k = \frac{z}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k h_i^2}{k}}} \sim St(k)$$

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

**Def** распределение Стьюдента с  $d.f.=k$   
(параметр формы):

$$z, h_i - i.i.d. N(0;1) \quad \text{и} \quad m_k = \frac{z}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k h_i^2}{k}}} \sim St(k)$$

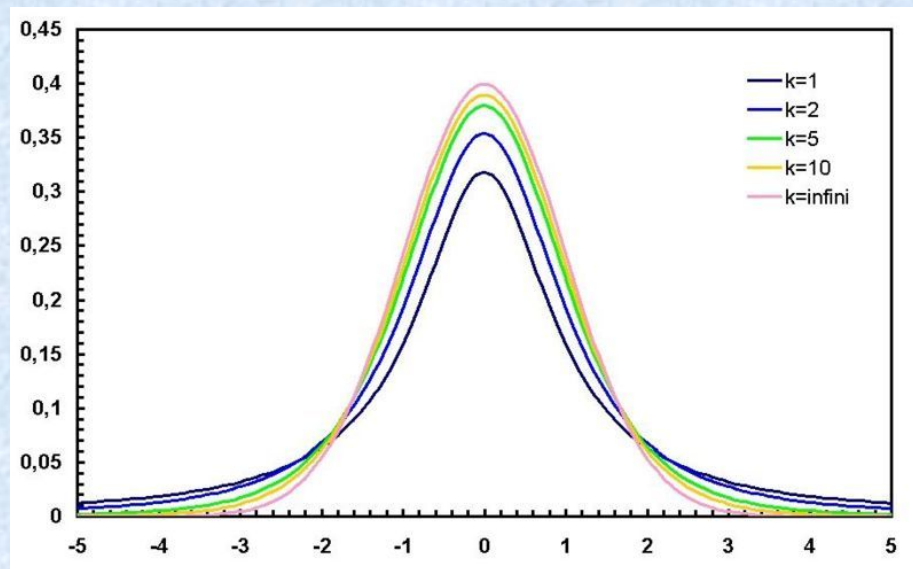
$$z \sim N(0;1), x_k \sim \chi^2(k) \quad \text{и} \quad m_k = \frac{z}{\sqrt{\frac{x_k}{k}}} \sim St(k)$$

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

## Плотность распределения Стьюдента

$$x_k \sim St(k)$$

$$t_{x_k}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{pk} \times \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$



# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

## Свойства распределения St(k)

$$x_k \sim St(k)$$

$$1. Ex = Mox = Mex = Asx = 0$$

$$2. Dx = \frac{n}{n-2} (n > 2)$$

$$3. Exx = \frac{6}{n-4} (n > 4)$$

$$4. St(1) = C(0;1)$$

$$5. St(k) \stackrel{3/4}{\approx} N(0;1)$$

$$6. h = x_k^2 \sim F(1; k)$$

$$7. h = \frac{1}{x_k} \sim F(k; 1)$$

*Докажите свойства 4.-7.*



**КОНЕЦ ЛЕКЦИИ**