специальные вопросы ТВиМС

часть1

распределения, связанные с нормальным

лекция первая

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН

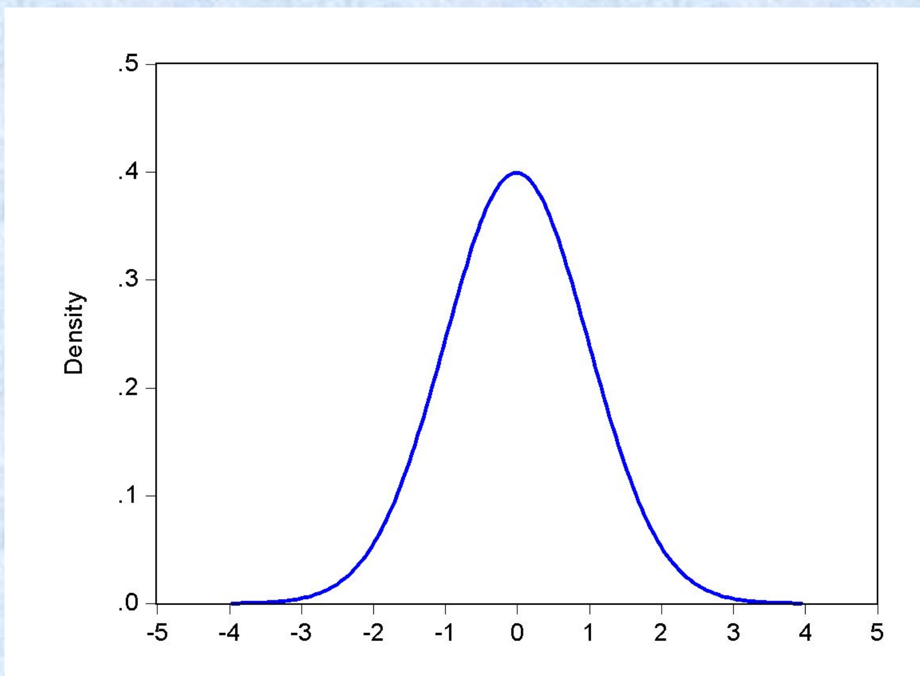
<u>**Def**</u>

$$\xi \sim N\left(\mu;\sigma^2\right) \Leftrightarrow \varphi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathrm{E}\xi = \mu, \quad \mathrm{D}\xi = \sigma^2, \quad As\xi = 0, \quad Ex\xi = 0$$

μ - параметр сдвига, σ - параметр масштаба

ξ~N(0;1) – стандартный нормальный закон



ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Свойства нормального распределения:

1. $\square\sim N(\mu;\square^2)$, $a, b\square\square$ => $a\square+b\sim N(a\mu+b;a^2\square^2)$

устойчивость относительно линейного преобразования.

Так же этим свойством обладают распределения:

- ✔ $\square\sim U[m_1;m_2]$ => $a\square+b\sim U[am_1+b;am_2+b]$ - равномерное
- ✔ $\square\sim Exp(\lambda,\square)$ => $a\square+b\sim$ $Exp(a\lambda;$ $a\square+b)$ - экспоненциальное
- ✔ $\square\sim L(\lambda,\square)$ => $a\square+b\sim L(a\lambda;$ $a\square+b)$ - Лапласа
- ✔ $\square\sim\Lambda(\mu;\square)$ => $a\square+b\sim\Lambda(a\mu+b;a\square)$ - логистическое
- ✔ $\square\sim C(\mu;\square)$ => $a\square+b\sim C(a\mu+b;a\square)$ - Коши

Найдите формулы плотностей и докажите, что свойство линейности выполняется, в т.ч. и для $N(\mu;\square^2)$

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Свойства нормального распределения:

Пример

□~Exp(λ,□) => a□+b~ Exp(aλ; a□+b) - экспоненциальное

λ - характеризует время ожидания некоторого события

□ - характеризует момент времени, с которого мы ожидаем проявление события

aλ - изменение масштаба времени

a□+b – сдвиг момента времени (в новом масштабе), с которого будем ожидать появление события

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

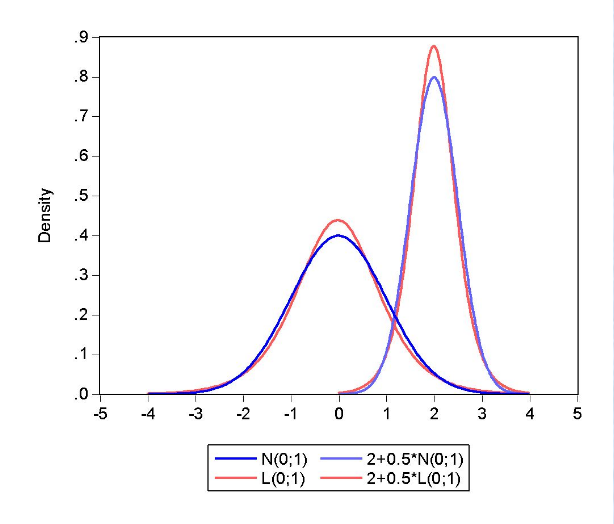
Свойства нормального распределения:

1. устойчивость относительно линейного преобразования

<u>Пример</u> *логистическое* распределение:

$$\xi \sim \Lambda(\mu;\sigma): \quad \lambda_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\left(1+e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2}; \quad \Lambda_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}{1+e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}$$

$$\lambda_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{a}\cdot\lambda_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) == \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{e^{\frac{x-(a\mu+b)}{a\sigma}}}{\left(1+e^{\frac{x-(a\mu+b)}{a\sigma}}\right)^2}$$



$$a\xi + b \sim \Lambda(a\mu + b; a\sigma)$$

Докажите симметричность
Найдите мат.ожидание

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Свойства нормального распределения:

1. устойчивость относительно умножения на константу.

- ✔ $\square \sim P(k;\theta) \Rightarrow a\square \sim P(ak;\theta)$ - Парето
- ✔ $\square \sim W(k;\lambda) \Rightarrow a\square \sim W(k;a\lambda)$ - Вейбула
- ✔ $\square \sim \Gamma(k;\theta) \Rightarrow a\square \sim \Gamma(k;a\theta)$ – гамма-распределение

Найдите формулы плотностей и докажите, что это свойство выполняется

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Свойства нормального распределения:

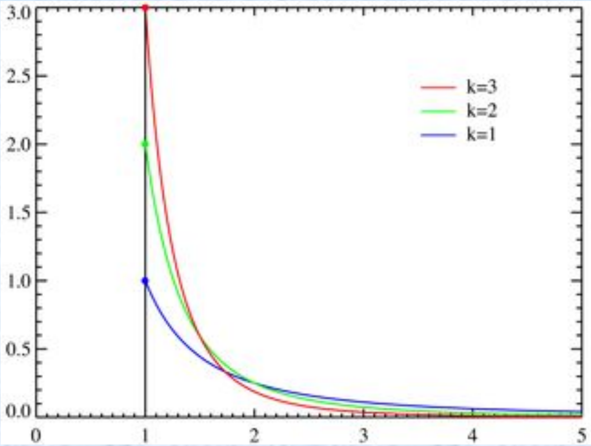
Пример

□~ P(k;θ) => a□~ P(ak;θ) - распределение доходов

k – характеризует минимальный доход (единица измерения)

□ - параметр формы

ak – изменение единицы измерения



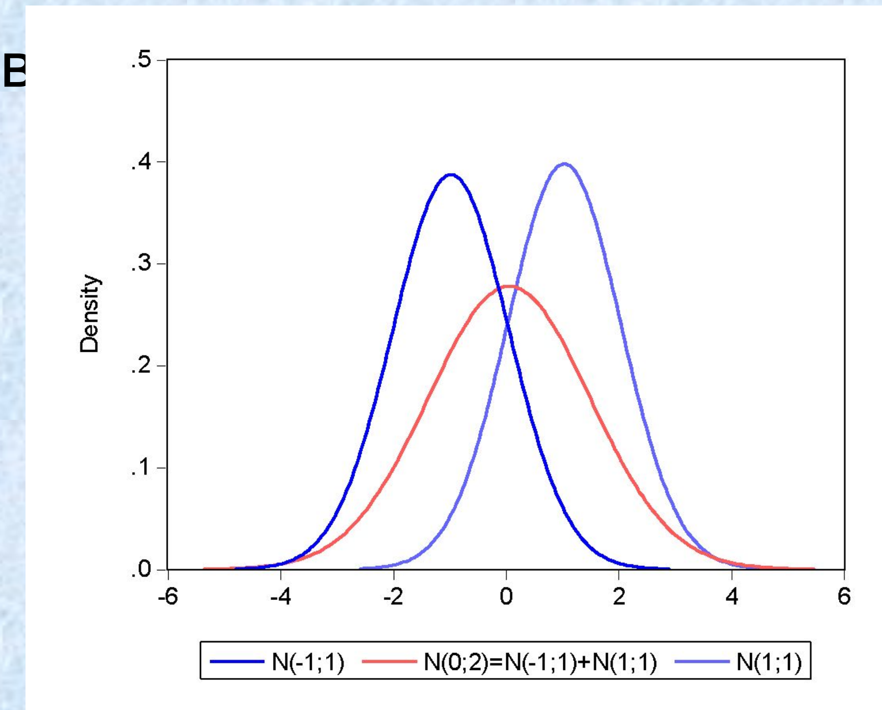
$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{k} \cdot \left(\frac{k}{x}\right)^{\theta+1}, & x \geq k \\ 0, & x < k \end{cases}$$

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО СЛОЖЕНИЮ

Свойства нормального распределения:

2. $\square_i \sim N(\mu_i;\square_i^2)$ - *независимы* => $\square_1+\square_2 \sim N(\mu_1+\mu_2;\square_1^2+\square_1^2)$:

устойчив



УСТОЙЧИВОСТЬ ПО СЛОЖЕНИЮ

Свойства нормального распределения:

2. Устойчивостью по сложению независимых с.в. обладают также:

   $\square_i \sim B(n_i;p) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim B(\Sigma n_i;p)$ - биномиальное

✔ $\square_i \sim Poiss(\lambda_i) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim Pois(\Sigma\lambda_i)$ - пуассоновское

✔ $\square_i \sim \Gamma(k_i;\theta) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim \Gamma(\Sigma k_i;\theta)$ – гамма распределение

✔ $\square_i \sim \square^2(k_i) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim \square^2(\Sigma k_i)$ – Хи-квадрат

Докажите это свойство для пуассоновского распределения

$\square_i \sim Exp(\lambda;0) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim \Gamma(k;\lambda)$ – экспоненциальное *сворачивается* в гамма-распределение при суммировании

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО СЛОЖЕНИЮ

Свойства нормального распределения:

Примеры

$\square_i \sim B(n_i;p) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim B(\Sigma n_i;p)$ - биномиальное

p – вероятность успеха

n – длина сери испытаний

$E\Sigma\square_i = p\Sigma n_i$ – ожидаемое число успехов не зависит от числа серий

$\square_i \sim Poiss(\lambda_i) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim Pois(\Sigma\lambda_i)$ - пуассоновское

λ - характеризует интенсивность потока событий

$E\Sigma\square_i = \Sigma\lambda_i$ – суммарная интенсивность нескольких потоков

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Свойства нормального распределения:

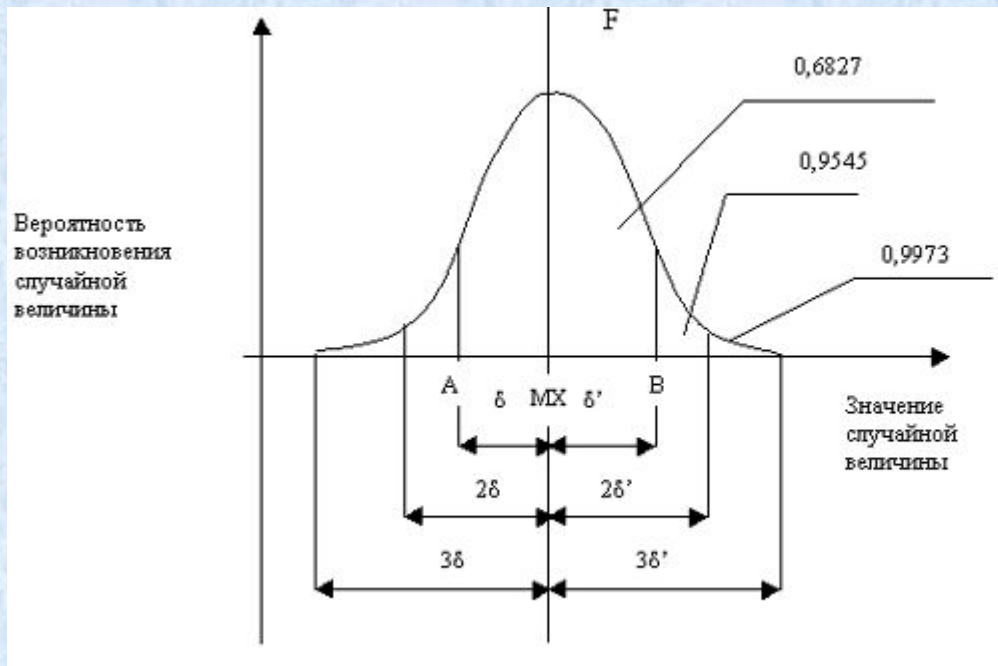
3. □~N(μ;□^{2})

Правило нескольких сигм:

P(|□-μ|<□)≈68.3% x=μ+/-□ - точка перегиба гауссианы

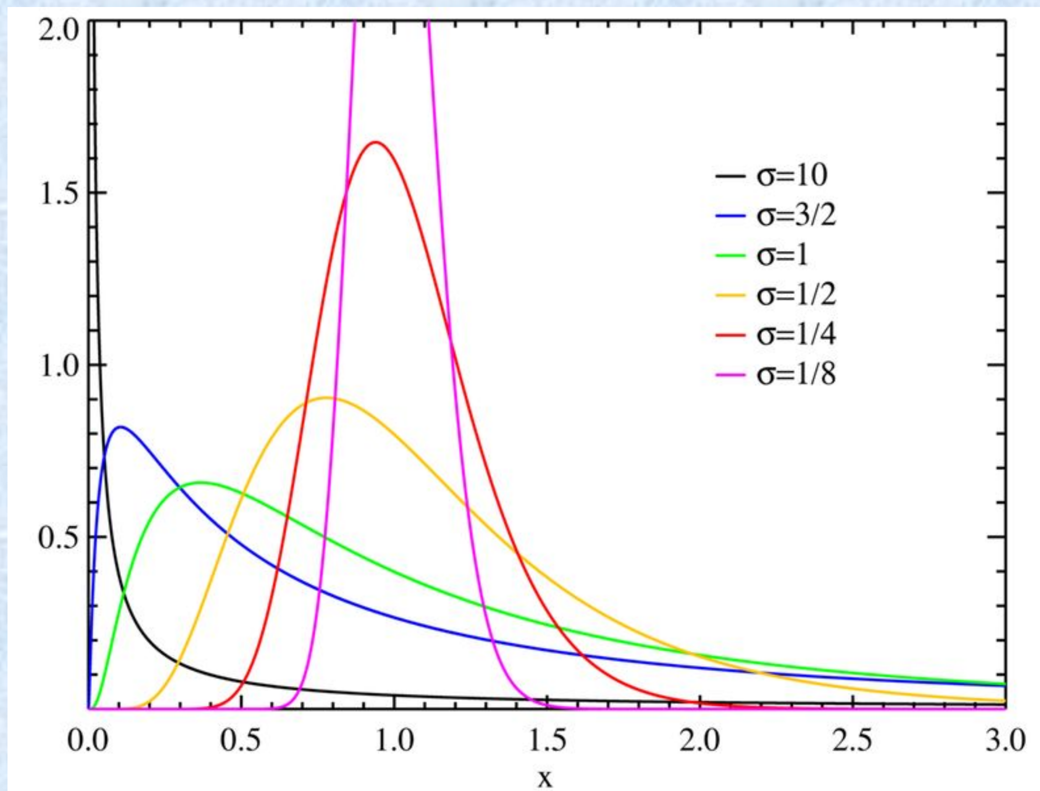
P(|□-μ|<2□)≈95.5%

P(|□-μ|<3□)≈99.7%



ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

<u>Def</u> □~LN(μ;□^{2}) – *логнормальное* распределение с параметром сдвига μ и параметром масштаба □, если □=ln□~N(μ;□^{2})



ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

Плотность логнормального распределения

Рассмотрим ξ~LN(0;1) <=> η~N(0;1)

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(e^\eta < x) = P(\eta < \ln x) = \Phi_\eta(\ln x)$$

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \Phi'_\eta(\ln x) = \varphi_\eta(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{\ln^2 x}{2}\right]\cdot\frac{1}{x}$$

ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

Плотность логнормального распределения

ξ~LN(0;1) <=> η~N(0;1)

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \Phi'_\eta(\ln x) = \varphi_\eta(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]\cdot\frac{1}{x}$$

ξ~LN(μ;σ^2) <=> η~N(μ;σ^2)

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\exp\left[\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]\cdot\frac{1}{x}$$

Докажите, используя линейность нормального закона

ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

Свойства логнормального распределения

$$\xi \sim LN\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$1.\ \mathrm{E}\xi = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] \qquad 2.\ \mathrm{Me}\,\xi = e^{\mu}$$

$$3.\ \mathrm{Mo}\,\xi = \exp\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right] \qquad 4.\ \mathrm{D}\xi = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) \cdot e^{2\mu + \sigma^2}$$

$$5.\ \xi \sim LN\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow \xi^{a} \sim LN\left(a\mu, a^2\sigma^2\right)$$

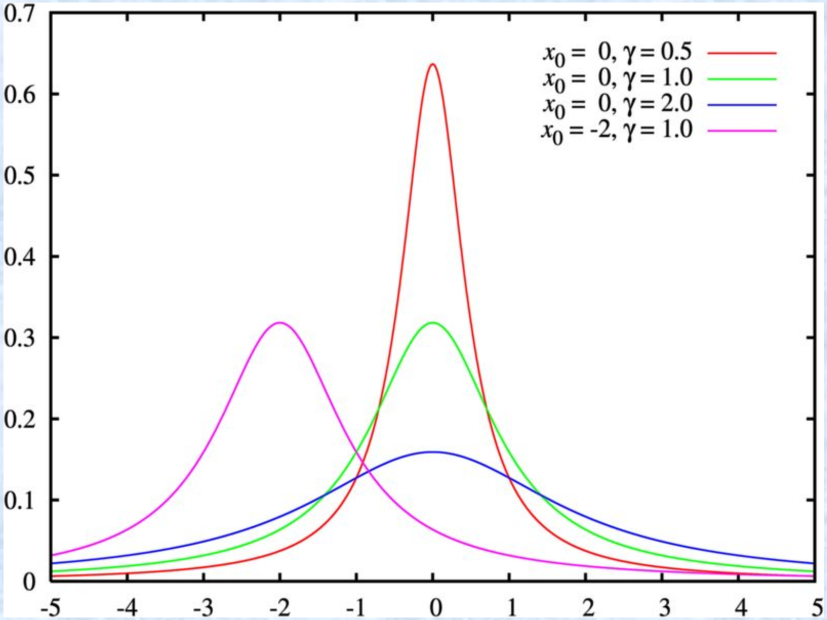
Докажите свойства (начните со случая ξ~LN(0;1))

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Коши, C

Def $\square_1$, $\square_2$ ~N(0;1) => $\square=\square_1/\square_2$~C(0;1) – стандартное распределение *Коши*

Def □~C(μ;□) – распределение *Коши* с параметром сдвига μ и параметром масштаба □, если *d.d.f.* □:

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi \cdot \left[1+\left(\frac{x-\mu}{\gamma}\right)^2\right]}$$



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Коши, C

Свойства распределения Коши:

□~C(μ;□)

1. Mo□=Me□=μ
2. Не существует ни одного момента!

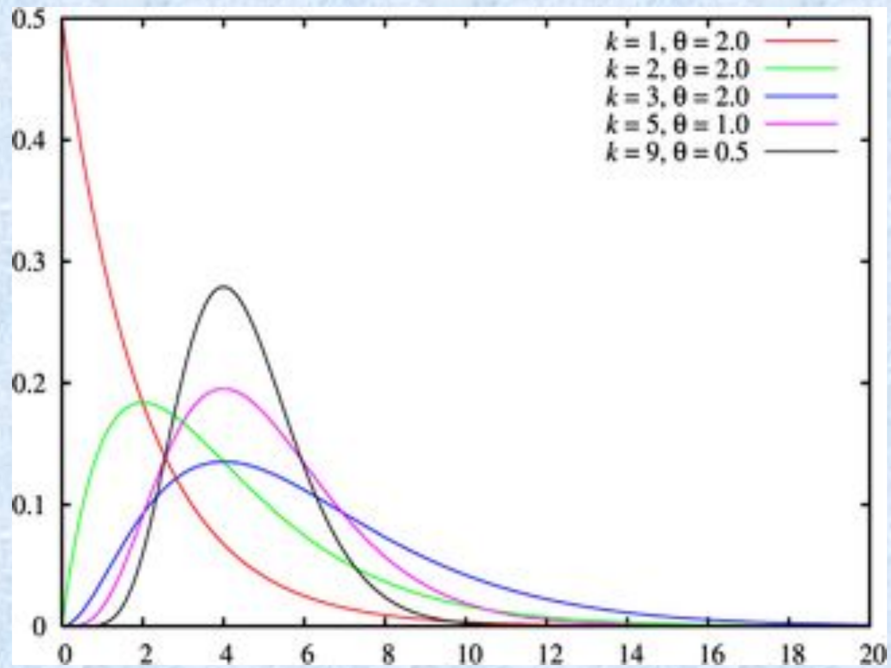
   (в т.ч. E□, D□, As□, Ex□ - не определены)
3. □ ~C(μ;□) => a□+b~C(aμ+b;a□)
4. $□_i$~C(0;1) *i.i.d.* => (Σ$□_i$)/n ~ C(0;1)

Докажите свойства 1. *и* 3.

ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, Г

<u>Def</u> $\xi \sim \Gamma(k;\theta)$ – *Гамма*-распределение с параметром формы k и параметром масштаба θ, если *d.d.f* ξ:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{k-1} \cdot \dfrac{e^{-x/\theta}}{\theta \cdot \Gamma(k)}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, Г

Свойства Гамма-распределения:

$x \sim \mathrm{G}(k;q)$

1. $\mathrm{E}x = k \times q$ 2. $\mathrm{D}x = k \times q^2$

3. $\mathrm{Mo}\,x = (k - 1) \times q, \; (k \text{ з } 1)$ 4. $\mathrm{As}\,x = \dfrac{2}{\sqrt{k}}$

5. $\mathrm{Ex}\,x = \dfrac{6}{k}$ 6. $\mathrm{G}(1;q) = \mathrm{Exp}(q;0)\,(\text{ò.ê. } \boldsymbol{\Gamma}(1) = 1)$

7. $x_1 \sim \mathrm{G}(k_1;q); \quad x_2 \sim \tilde{\mathrm{A}}(k_2;q) \quad \text{Þ} \quad x_1 + x_1 \sim \mathrm{G}(k_1 + k_2;q)$

$(\text{ñâî éñòâî 7. - òî ëüêî äëÿ í åçàâèñèì û õ } x_1;x_2\,!)$

8. $x \sim \mathrm{G}(k;q) \quad \text{Þ} \quad a \times x \sim \mathrm{G}(k;a \times q)$

Докажите свойства 1.-3. ,6. и 8.

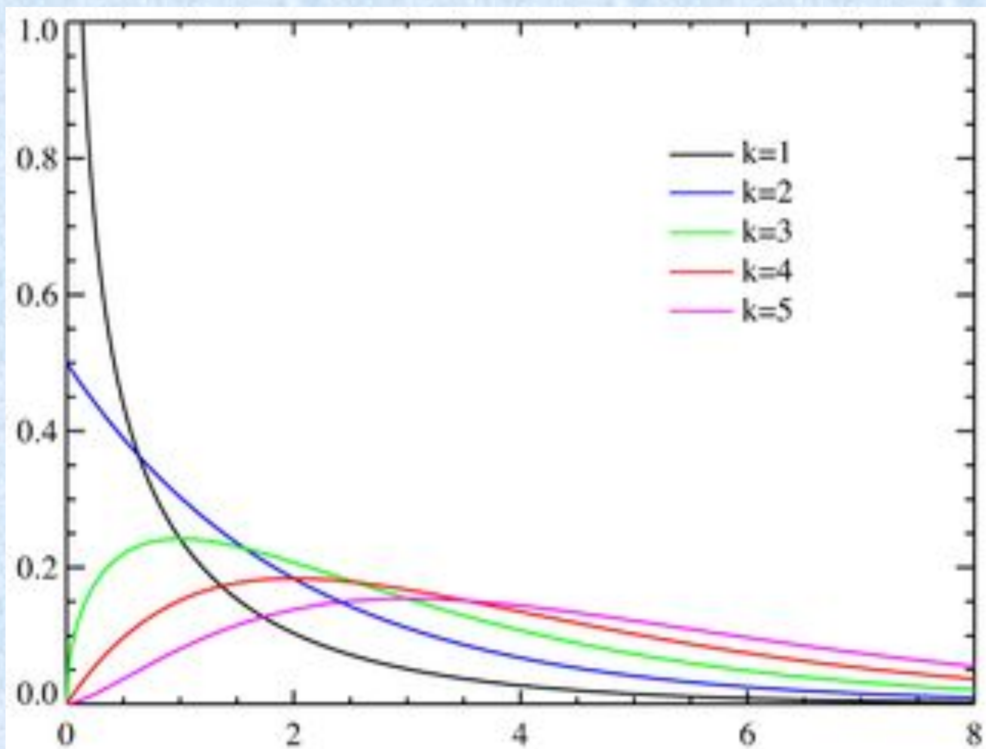
(для 1. и 2. *используйте индукцию и свойство 7.*)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Def $\quad \eta_i \sim i.i.d.\ N(0;1) \quad \Rightarrow \quad \chi_k = \sum_{i=1}^{k} \eta_i^2 \sim \chi^2(k)$

распределение *Пирсона*,

d.f.=k – число степеней свободы (параметр формы)



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Плотность распределения $\chi^2(1)$

Рассмотрим $\eta \sim N(0;1)$ <=> $\xi = \eta^2 \sim \chi^2(1)$

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\eta^2 < x) = P(\eta < \sqrt{x}) = \Phi_\eta(\sqrt{x})$$

$$f_\xi(x) = F_\xi'(x) = \Phi_\eta'(\sqrt{x}) = \varphi_\eta(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} =$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Плотность распределения $\chi^2(1)$

Рассмотрим η~N(0;1) <=> $\xi=\eta^2\sim\chi^2(1)$

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P\left(\eta < \sqrt{x}\right) = \Phi_\eta\left(\sqrt{x}\right)$$

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \Phi'_\eta\left(\sqrt{x}\right) = \varphi_\eta\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[-\frac{\sqrt{x}^{\,2}}{2}\right]\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} =$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Плотность распределения $\chi^2(1)$

Рассмотрим $\eta \sim N(0;1)$ <=> $\xi = \eta^2 \sim \chi^2(1)$

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\eta < \sqrt{x}) = \Phi_\eta(\sqrt{x})$$

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \Phi'_\eta(\sqrt{x}) = \varphi_\eta(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left[\frac{\sqrt{x}^2}{2}\right]\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\cdot e^{-x/2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2-1}\cdot\frac{e^{-x/2}}{2\cdot\Gamma(1/2)} = \Gamma\left(\frac{1}{2};2\right)$$

$$\left(\text{т.к. } \Gamma(1/2) = \sqrt{4\pi}\right)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, □^{2}

Свойства распределения □^{2}(k)

$$0.\ \xi_k \sim \chi^2(k) = \Gamma\left(\frac{k}{2}; 2\right)$$

$$1.\ \mathrm{E}\,\xi_k = k \qquad\qquad 2.\ \mathrm{D}\,\xi_k = 2 \cdot k$$

$$3.\ \mathrm{Mo}\,\xi_k = (k - 2),\ (k \geq 2) \qquad 4.\ \mathrm{As}\,\xi_k = \sqrt{\frac{8}{k}}$$

$$5.\ \mathrm{Ex}\,\xi_k = \frac{12}{k} \qquad\qquad 6.\ \chi^2(2) = \mathrm{Exp}(2; 0)$$

$$7.\ \xi_1 \sim \chi^2(k_1);\quad \xi_2 \sim \chi^2(k_2) \quad \Rightarrow \quad \xi_1 + \xi_1 \sim \chi^2(k_1 + k_2)$$

(ñâî éñòâî 7. - òî ëüêî äëÿ í åçàâèñèì û õ $\xi_1; \xi_2$!)

$$8.\ \frac{\xi_k}{k} \xrightarrow{P} 1$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Свойства распределения χ^2(k)

Все свойства (кроме 8.) – вытекают из двух:

$$a.\ \xi_1 \sim \chi^2(1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$b.\ \xi_1 \sim \Gamma(k_1; \theta);\quad \xi_2 \sim \Gamma(k_2; \theta) \quad \Rightarrow \quad \xi_1 + \xi_1 \sim \Gamma(k_1 + k_2; \theta)$$

$$(\xi_1; \xi_2 - \text{независимы!})$$

$$0.\ \xi_k \sim \Gamma\left(\frac{k}{2}; 2\right)$$

$$\xi_k \sim \chi^2(k),\quad \xi_k = \sum_{i=1}^{k} \eta_i^2,\quad \eta_i - i.i.d.\ N(0;1)$$

$$\eta_i^2 \sim \chi^2(1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}; 2\right),\quad \xi_k = \sum_{i=1}^{k} \eta_i^2 \sim \Gamma\left(\frac{k}{2}; 2\right)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Свойства распределения $\chi^2(k)$

Прямое доказательство:

$$1.\ \mathrm{E}\xi_k = m$$

$$\xi_k \sim \chi^2(k), \quad \xi_k = \sum_{i=1}^{k} \eta_i^2, \quad \eta_i - i.i.d.\ N(0;1)$$

$$\mathrm{E}\eta_i^2 = \mathrm{D}\eta_i^2 - (\mathrm{E}\eta_i)^2 = 1 - 0 = 1$$

$$\mathrm{E}\xi_k = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k} \eta_i^2\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}\eta_i^2 = k \cdot 1$$

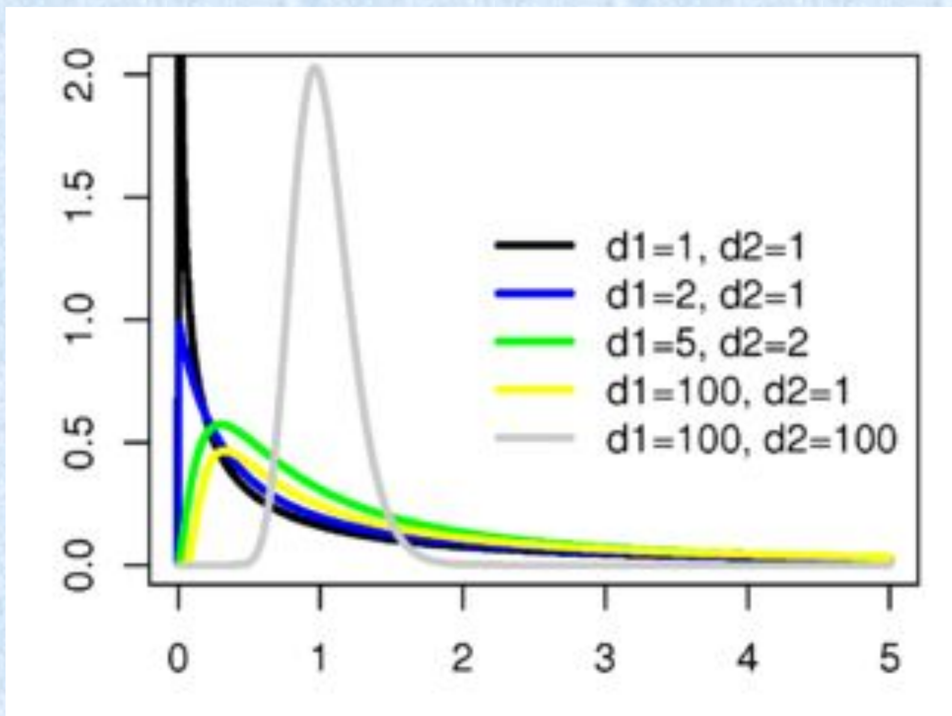
Докажите напрямую свойства 2., 3., 6.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Снедекора-Фишера, F

Def F-распределение (Снедекора-Фишера),

$$x_{k_1} \sim c^2(k_1),\ x_{k_2} \sim c^2(k_2) \quad \text{í åçàâèñèì û} \quad Þ \quad h = \frac{x_{k_1}/k_1}{x_{k_2}/k_2} \sim F(k_1;k_2)$$

d.f.=(k_1;k_2) – число степеней свободы



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Снедекора-Фишера, F

<u>Свойства</u> F-распределения (Снедекора-Фишера)

$\eta \sim F(k_1; k_2)$

$1.\ \mathrm{E}\eta = \dfrac{k_2}{k_2 - 2},\ k_2 > 2 \qquad 2.\ \mathrm{Mo}\,\eta = \dfrac{k_1 - 2}{k_1} \cdot \dfrac{k_2}{k_2 + 2},\ k_1 > 2$

$3.\ \eta_{k_1;k_2} \xrightarrow[k_1 \to \infty;\, k_2 \to \infty]{d} 1 \qquad 4.\ k_1 \cdot \eta_{k_1;k_2} \xrightarrow[k_1 \to \infty;\, k_2 \to \infty]{d} \xi \sim \chi^2(k_1)$

$5.\ \eta \sim F(k_1; k_2) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\eta} \sim F(k_2; k_1)$

Докажите свойства 3.-5.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

<u>Def</u> распределение Стьюдента с *d.f.*=k (параметр формы):

$$z, \eta_i - \ i.i.d.\ N(0;1) \quad \Rightarrow \quad \xi_k = \frac{z}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} \eta_i^2}{k}}} \sim St(k)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

Def распределение Стьюдента с *d.f.*=k (параметр формы):

$$z, \eta_i - i.i.d.\ N(0;1) \Rightarrow \tau_k = \frac{z}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} \eta_i^2}{k}}} \sim St(k)$$

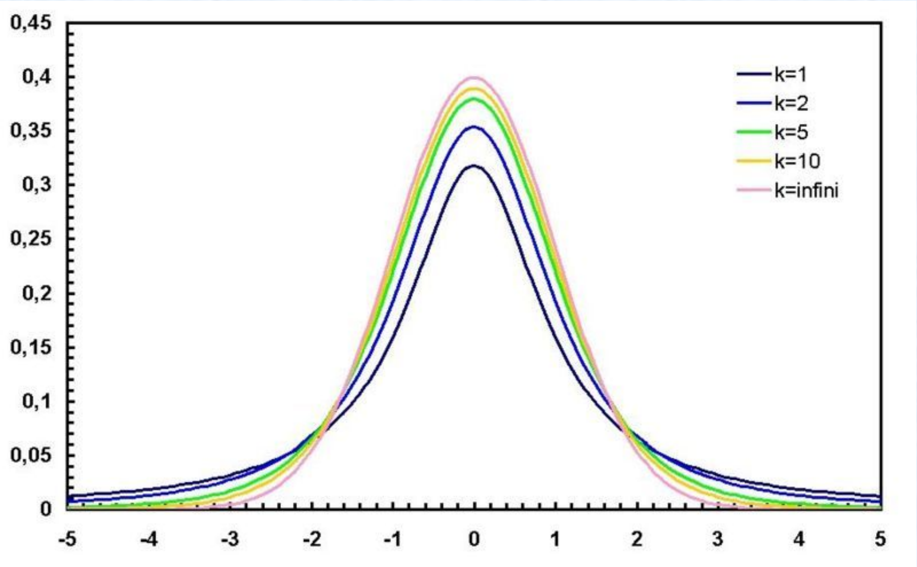
$$z \sim N(0;1), \xi_k \sim \chi^2(k) - \text{независимы} \Rightarrow \tau_k = \frac{z}{\sqrt{\frac{\xi_k}{k}}} \sim St(k)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

Плотность распределения Стьюдента

$$x_k \sim St(k)$$

$$t_{x_k}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}$$



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

Свойства распределения St(k)

$$\xi_k \sim St(k)$$

$$1.\ \mathrm{E}\xi = \mathrm{Mo}\,\xi = \mathrm{Me}\,\xi = \mathrm{As}\,\xi = 0$$

$$2.\ \mathrm{D}\xi = \frac{n}{n-2}\ (n > 2) \qquad 3.\ \mathrm{Ex}\,\xi = \frac{6}{n-4}\ (n > 4)$$

$$4.\ St(1) = C(0;1) \qquad 5.\ St(k) \xrightarrow{P} N(0;1)$$

$$6.\ \eta = \xi_k^2 \sim F(1;k) \qquad 7.\ \eta = \frac{1}{\xi_k} \sim F(k;1)$$

Докажите свойства 4.-7.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ