специальные вопросы ТВиМС

<u>часть1</u>

распределения,
связанные с нормальным

лекция первая

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН

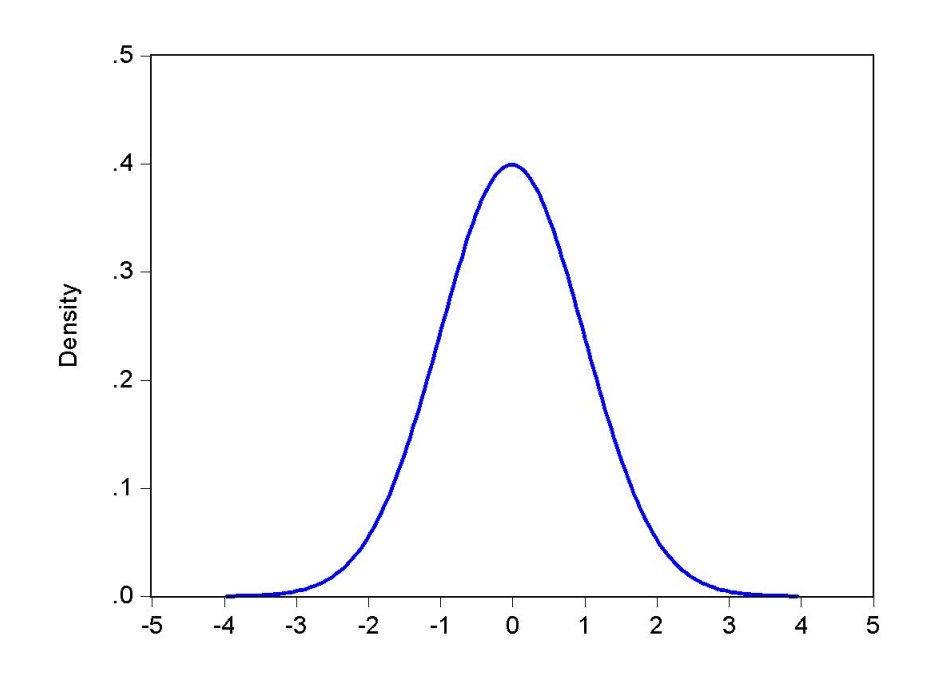
Def

$$\xi \sim N\left(\mu;\sigma^2\right) \Leftrightarrow \varphi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathrm{E}\xi = \mu, \quad \mathrm{D}\xi = \sigma^2, \quad As\xi = 0, \quad Ex\xi = 0$$

μ - параметр сдвига, □ - параметр масштаба

□~N(0;1) – стандартный нормальный закон



ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Свойства нормального распределения:

1. $\square \sim N(\mu;\square^2)$, $a, b \square\square \Rightarrow a\square+b \sim N(a\mu+b;a^2\square^2)$

устойчивость относительно линейного преобразования.

Так же этим свойством обладают распределения:

- ✔ $\square \sim U[m_1;m_2] \Rightarrow a\square+b \sim U[am_1+b;am_2+b]$ - равномерное
- ✔ $\square \sim Exp(\lambda,\square) \Rightarrow a\square+b \sim Exp(a\lambda; a\square+b)$ - экспоненциальное
- ✔ $\square \sim L(\lambda,\square) \Rightarrow a\square+b \sim L(a\lambda; a\square+b)$ - Лапласа
- ✔ $\square \sim \Lambda(\mu;\square) \Rightarrow a\square+b \sim \Lambda(a\mu+b;a\square)$ - логистическое
- ✔ $\square \sim C(\mu;\square) \Rightarrow a\square+b \sim C(a\mu+b;a\square)$ - Коши

Найдите формулы плотностей и докажите, что свойство линейности выполняется, в т.ч. и для $N(\mu;\square^2)$

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Свойства нормального распределения:

Пример

□~Exp(λ,□) => a□+b~ Exp(aλ; a□+b) - экспоненциальное

λ - характеризует время ожидания некоторого события

□ - характеризует момент времени, с которого мы ожидаем проявление события

aλ - изменение масштаба времени

a□+b – сдвиг момента времени (в новом масштабе), с которого будем ожидать появление события

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Свойства нормального распределения:

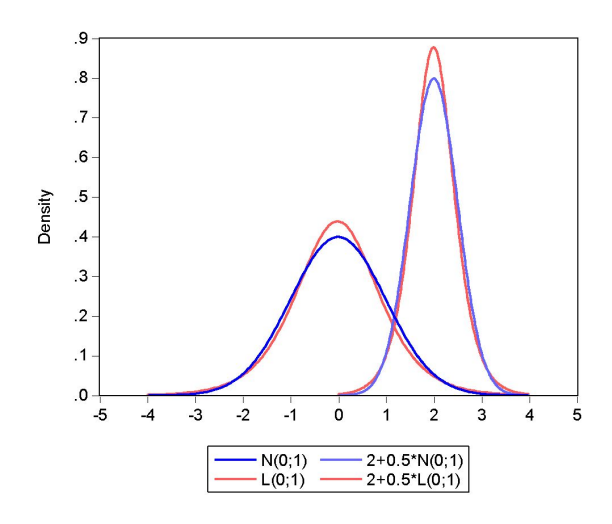
1. устойчивость относительно линейного преобразования

<u>Пример</u> *логистическое* распределение:

$$\xi \sim \Lambda(\mu;\sigma): \quad \lambda_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\left(1+e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2}; \quad \Lambda_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}{1+e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}$$

$$\lambda_{a\xi+b}(x) = \frac{1}{a}\cdot\lambda_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) == \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{e^{\frac{x-(a\mu+b)}{a\sigma}}}{\left(1+e^{\frac{x-(a\mu+b)}{a\sigma}}\right)^2}$$

$$a\xi+b \sim \Lambda(a\mu+b;a\sigma)$$



Докажите симметричность

Найдите мат.ожидание

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Свойства нормального распределения:

1. устойчивость относительно умножения на константу.

✔ □~ P(k;θ) => a□~ P(ak;θ) - Парето

✔ □~ W(k;λ) => a□~ W(k;aλ) - Вейбула

✔ □~Г(k;θ) => a□~Г(k;aθ) – гамма-распределение

Найдите формулы плотностей и докажите, что это свойство выполняется

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Свойства нормального распределения:

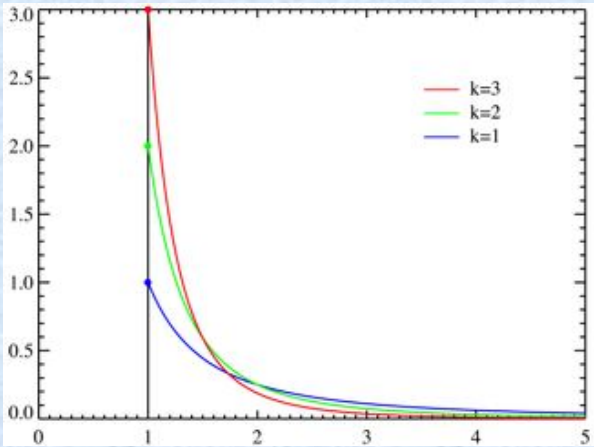
Пример

□~ P(k;θ) => a□~ P(ak;θ) - распределение доходов

k – характеризует минимальный доход (единица измерения)

□ - параметр формы

ak – изменение единицы измерения



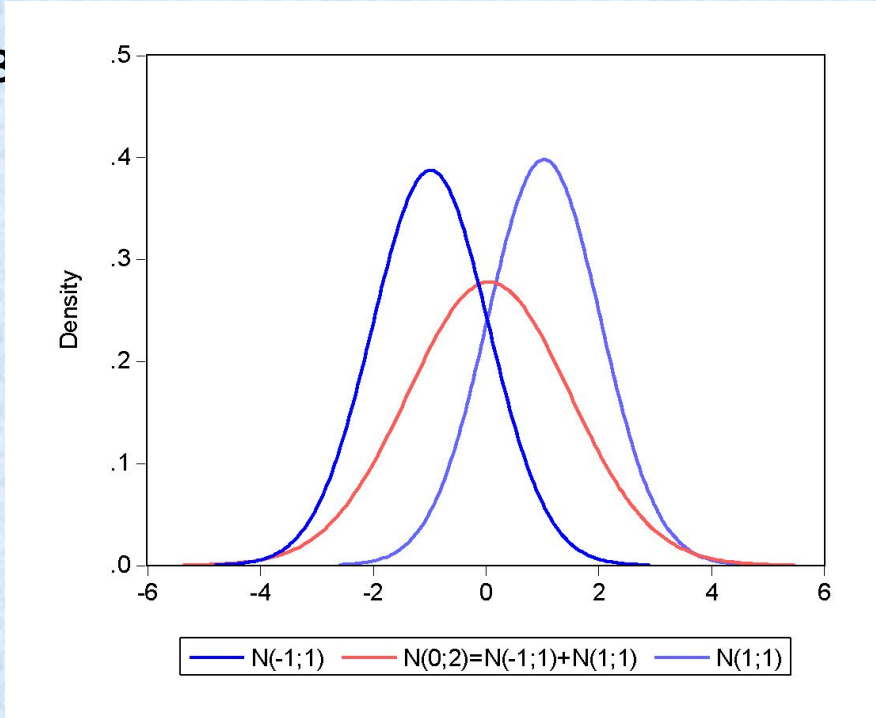
$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{q}{k} \times \left(\frac{x}{k}\right)^{q+1}, & x \geq k \\ 0, & x < k \end{cases}$$

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО СЛОЖЕНИЮ

Свойства нормального распределения:

2. $\square_i \sim N(\mu_i; \square_i^2)$ - *независимы* => $\square_1 + \square_2 \sim N(\mu_1+\mu_2; \square_1^2 + \square_1^2)$:

устойчив



УСТОЙЧИВОСТЬ ПО СЛОЖЕНИЮ

Свойства нормального распределения:

2. Устойчивостью по сложению независимых с.в. обладают также:

$\square_i \sim B(n_i;p) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim B(\Sigma n_i;p)$ - биномиальное

✔ $\square_i \sim Poiss(\lambda_i) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim Pois(\Sigma\lambda_i)$ - пуассоновское

✔ $\square_i \sim \Gamma(k_i;\theta) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim \Gamma(\Sigma k_i;\theta)$ – гамма распределение

✔ $\square_i \sim \square^2(k_i) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim \square^2(\Sigma k_i)$ – Хи-квадрат

Докажите это свойство для пуассоновского распределения

$\square_i \sim Exp(\lambda;0) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim \Gamma(k;\lambda)$ – экспоненциальное *сворачивается* в гамма-распределение при суммировании

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО СЛОЖЕНИЮ

Свойства нормального распределения:

Примеры

$\square_i \sim B(n_i;p) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim B(\Sigma n_i;p)$ - биномиальное

p – вероятность успеха

n – длина сери испытаний

$E\Sigma\square_i = p\Sigma n_i$ – ожидаемое число успехов не зависит от числа серий

$\square_i \sim Poiss(\lambda_i) \Rightarrow \Sigma\square_i \sim Pois(\Sigma\lambda_i)$ - пуассоновское

λ - характеризует интенсивность потока событий

$E\Sigma\square_i = \Sigma\lambda_i$ – суммарная интенсивность нескольких потоков

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Свойства нормального распределения:

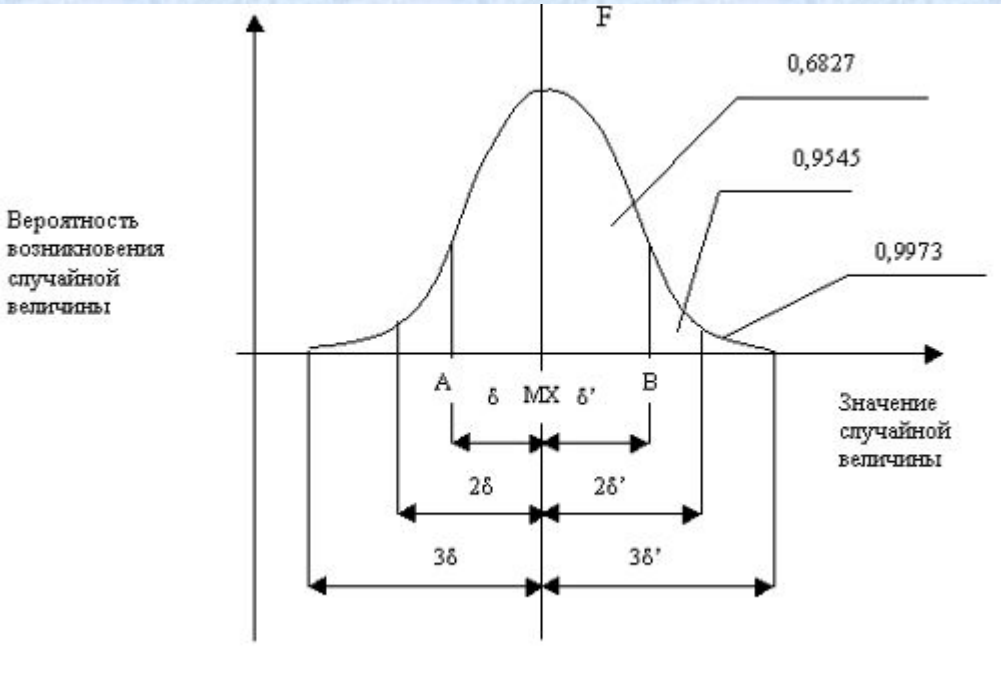
3. □~N(μ;□^{2})

Правило нескольких сигм:

P(|□-μ|<□)≈68.3% x=μ+/-□ - точка перегиба гауссианы

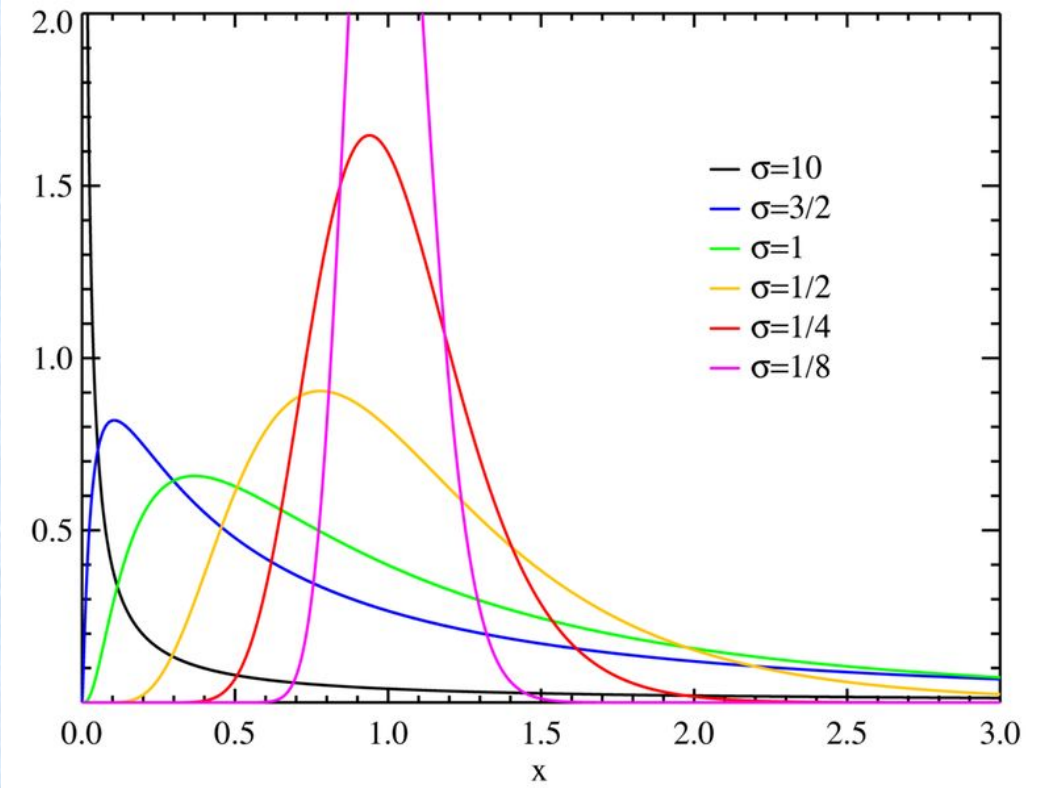
P(|□-μ|<2□)≈95.5%

P(|□-μ|<3□)≈99.7%



ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

<u>Def</u> □~LN(μ;□^{2}) – *логнормальное* распределение с параметром сдвига μ и параметром масштаба □, если □=ln□~N(μ;□^{2})



ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

Плотность логнормального распределения

Рассмотрим □~LN(0;1) <=> □~N(0;1)

$$F_x(x) = P(x < x) = P(e^h < x) = P(h < \ln x) = F_h(\ln x)$$

$$f_x(x) = F_x'(x) = F_h'(\ln x) = j_h(\ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \times \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{2}\right) \times \frac{1}{x}$$

ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

Плотность логнормального распределения

□~LN(0;1) <=> □~N(0;1)

$$f_x(x) = F_x'(x) = F_h'(\ln x) = j_h(\ln x)\times\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2p}}\times\exp\left(-\frac{\ln^2 x}{2}\right)\times\frac{1}{x}$$

□~LN(μ;□²) <=> □~N(μ;□²)

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2ps}}\times\exp\left(-\frac{(\ln x - m)^2}{2s^2}\right)\times\frac{1}{x}$$

Докажите, используя линейность нормального закона

ЛОГНОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, LN

Свойства логнормального распределения

$$x \sim LN\left(m, s^2\right)$$

1. $\mathrm{E}x = \exp\left(m + \frac{s^2}{2}\right)$ 2. $\mathrm{Me}x = e^m$

3. $\mathrm{Mo}x = \exp\left(m - \frac{s^2}{2}\right)$ 4. $\mathrm{D}x = \left(e^{s^2} - 1\right) \times e^{2m + s^2}$

5. $x \sim LN\left(m, s^2\right) \Rightarrow x^a \sim LN\left(am, a^2 s^2\right)$

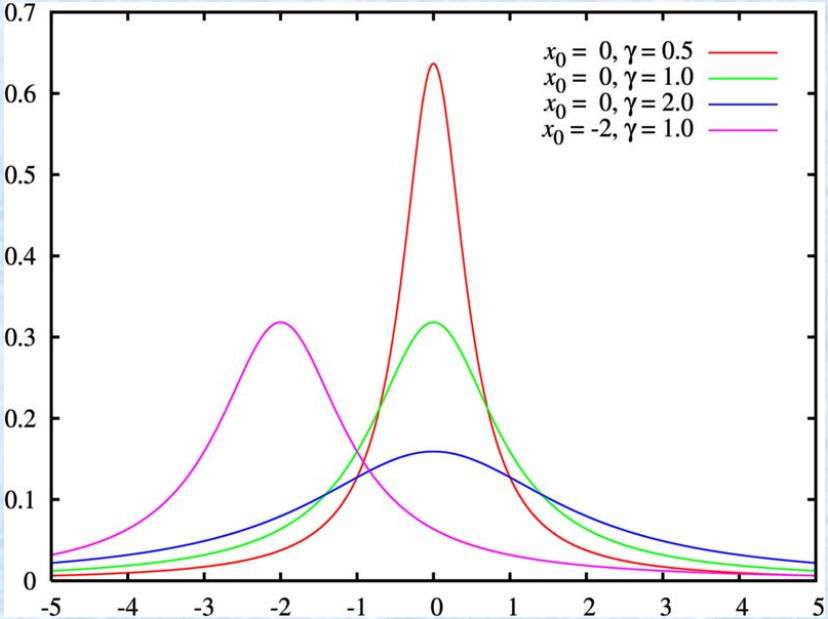
Докажите свойства (*начните со случая* □~LN(0;1))

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Коши, C

<u>Def</u> ξ_1, ξ_2 ~N(0;1) => $\xi=\xi_1/\xi_2$~C(0;1) – стандартное распределение *Коши*

<u>Def</u> ξ~C(μ;γ) – распределение *Коши* с параметром сдвига μ и параметром масштаба γ, если *d.d.f.* ξ:

$$f_h(x) = \frac{1}{p \times \left(1 + \left(\frac{x - m}{g}\right)^2\right)}$$



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Коши, C

Свойства распределения Коши:

$\square \sim C(\mu;\square)$

1. $Mo\square = Me\square = \mu$
2. Не существует ни одного момента!

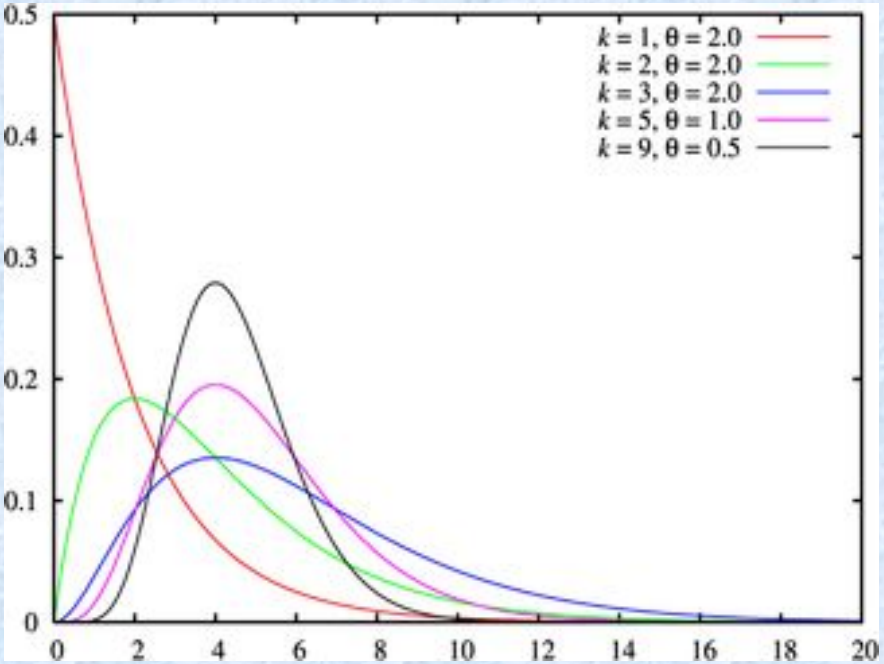
   (в т.ч. $E\square$, $D\square$, $As\square$, $Ex\square$ - не определены)
3. $\square \sim C(\mu;\square) \Rightarrow a\square + b \sim C(a\mu + b; a\square)$
4. $\square_i \sim C(0;1)$ *i.i.d.* $\Rightarrow (\Sigma\square_i)/n \sim C(0;1)$

Докажите свойства 1. *и* 3.

ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, Г

<u>Def</u> □~Г(k;□) – *Гамма*-распределение с параметром формы k и параметром масштаба □, если *d.d.f* □:

$$f_x(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{q}\right)^{k-1} \times \frac{e^{-x/q}}{q \times \Gamma(k)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, Г

Свойства Гамма-распределения:

$x \sim G(k;q)$

1. $Ex = k \times q$ 2. $Dx = k \times q^2$

3. $Mo\,x = (k - 1) \times q, (k \geq 1)$ 4. $As\,x = \dfrac{2}{\sqrt{k}}$

5. $Ex\,x = \dfrac{6}{k}$ 6. $G(1;q) = Exp(q;0)$ (т.е. $\Gamma(1) = 1$)

7. $x_1 \sim G(k_1;q)$; $x_2 \sim \tilde{A}(k_2;q)$ Þ $x_1 + x_1 \sim G(k_1 + k_2;q)$

(ñâî éñòâî 7. - òî ëüêî äëÿ í åçàâèñèì û õ $x_1;x_2$!)

8. $x \sim G(k;q)$ Þ $a \times x \sim G(k;a \times q)$

Докажите свойства 1.-3. ,6. и 8.

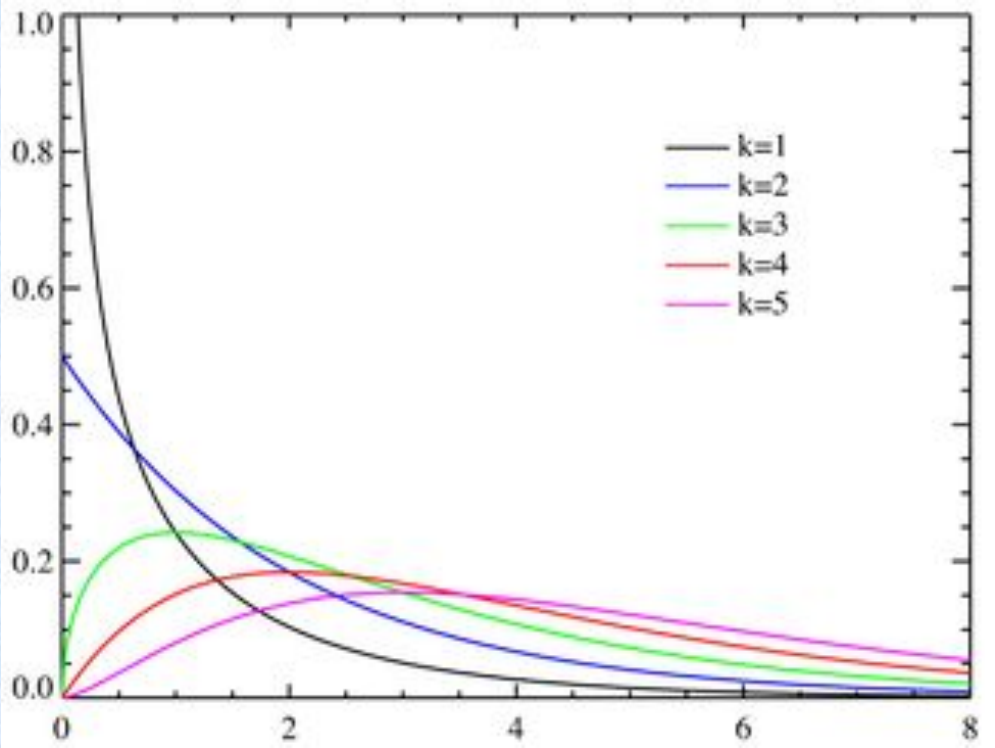
(для 1. и 2. *используйте индукцию и свойство 7.*)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Def h_i - $i.i.d.\ N(0;1)$ Þ $x_k = \sum_{i=1}^{k} h_i^2 \sim \chi^2(k)$

распределение *Пирсона*,

d.f.=k – число степеней свободы (параметр формы)



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Плотность распределения $\chi^2(1)$

Рассмотрим $\eta \sim N(0;1) \Leftrightarrow \xi = \eta^2 \sim \chi^2(1)$

$$F_x(x) = P(x < x) = P(h^2 < x) = P(h < \sqrt{x}) = F_h(\sqrt{x})$$

$$f_x(x) = F_x'(x) = F_h'(\sqrt{x}) = j_h(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2 \times \sqrt{x}} =$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Плотность распределения $\chi^2(1)$

Рассмотрим $\xi \sim N(0;1) \Leftrightarrow \eta = \xi^2 \sim \chi^2(1)$

$$F_x(x) = P(x < x) = P\left(h < \sqrt{x}\right) = F_h\left(\sqrt{x}\right)$$

$$f_x(x) = F_x'(x) = F_h'\left(\sqrt{x}\right) = j_h\left(\sqrt{x}\right) \times \frac{1}{2 \times \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2p}} \times \exp\left[-\frac{\sqrt{x}^2}{2}\right] \times \frac{1}{2 \times \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \times e^{-x/2} \times \frac{1}{2} \times x^{-1/2} =$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Плотность распределения $\chi^2(1)$

Рассмотрим $\xi \sim N(0;1) \Leftrightarrow \eta = \xi^2 \sim \chi^2(1)$

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\left(\xi < \sqrt{x}\right) = F_\xi\left(\sqrt{x}\right)$$

$$f_\eta(x) = F_\eta'(x) = F_\xi'\left(\sqrt{x}\right) = \varphi_\xi\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{\sqrt{x}^2}{2}\right] \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot e^{-x/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2} = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2-1} \cdot \frac{e^{-x/2}}{2 \cdot \Gamma(1/2)} = G\left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$\left(\text{т.к. } \Gamma(1/2) = \sqrt{4\pi}\right)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Свойства распределения $\chi^2(k)$

0. $x_k \sim c^2(k) = G\left(\frac{k}{2}; 2\right)$

1. $\mathrm{E}x_k = k$

2. $\mathrm{D}x_k = 2 \times k$

3. $\mathrm{Mo}x_k = (k - 2), (k \geq 2)$

4. $\mathrm{As}x_k = \sqrt{\frac{8}{k}}$

5. $\mathrm{Ex}x_k = \frac{12}{k}$

6. $c^2(2) = \mathrm{Exp}(2;0)$

7. $x_1 \sim c^2(k_1);\quad x_2 \sim c^2(k_2) \Rightarrow x_1 + x_1 \sim c^2(k_1 + k_2)$

(ñâî éñòâî 7. - òî ëüêî äëÿ í åçàâèñèì ûõ $x_1; x_2$!)

8. $\frac{x_k}{k} \xrightarrow{P} 1$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Свойства распределения $\chi^2(k)$

Все свойства (кроме 8.) – вытекают из двух:

$$a.\ x_1 \sim c^2(1) = G\left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$b.\ x_1 \sim G(k_1; q); \quad x_2 \sim \tilde{A}(k_2; q) \quad Þ \quad x_1 + x_1 \sim G(k_1 + k_2; q)$$

$(x_1; x_2$ - í åçàâèñèì û !$)$

$$0.\ x_k \sim G\left(\frac{k}{2}; 2\right)$$

$$x_k \sim c^2(k), \quad x_k = \sum_{i=1}^{k} h_i^2, \quad h_i - \ i.i.d.\ N(0;1)$$

$$h_i^2 \sim c^2(1) = G\left(\frac{1}{2}; 2\right), \quad x_k = \sum_{i=1}^{k} h_i^2 \sim G\left(\frac{k}{2}; 2\right)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Пирсона, χ^2

Свойства распределения $\chi^2(k)$

Прямое доказательство:

1. $\mathrm{E}\,x_k = m$

$$x_k \sim \chi^2(k), \quad x_k = \sum_{i=1}^{k} h_i^2, \quad h_i - \ i.i.d.\ N(0;1)$$

$$\mathrm{E}\,h_i^2 = \mathrm{D}\,h_i^2 - (\mathrm{E}\,h_i)^2 = 1 - 0 = 1$$

$$\mathrm{E}\,x_k = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{k} h_i^2\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}\,h_i^2 = k \times 1$$

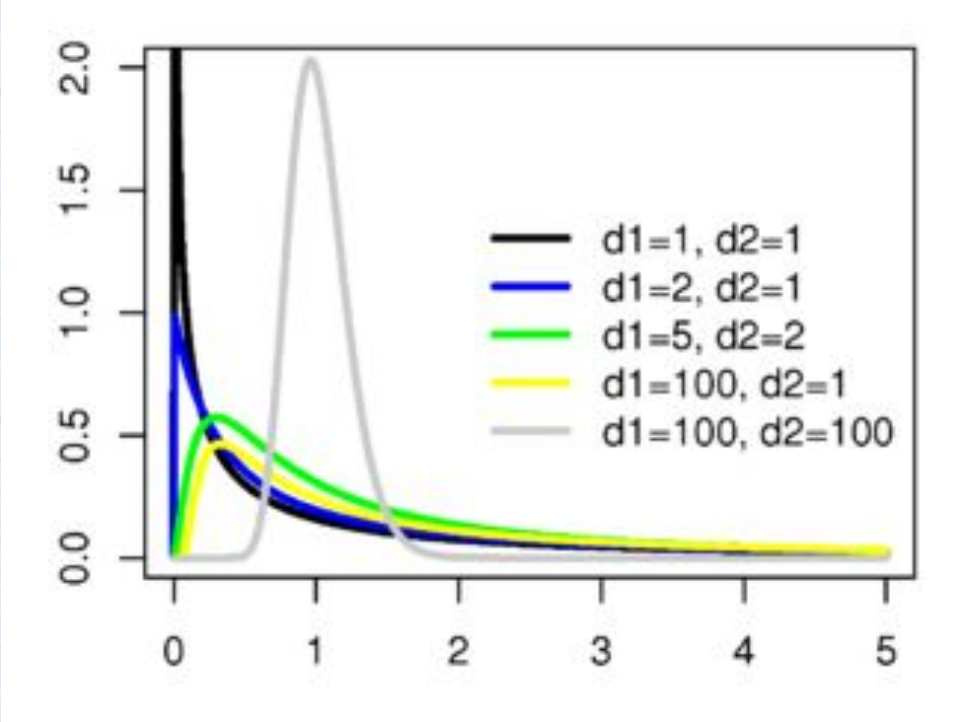
Докажите напрямую свойства 2., 3., 6.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Снедекора-Фишера, F

<u>Def</u> F-распределение (Снедекора-Фишера),

$x_{k_1} \sim c^2(k_1), x_{k_2} \sim c^2(k_2)$ í åçàâèñèì û Þ $h = \dfrac{x_{k_1}/k_1}{x_{k_2}/k_2} \sim F(k_1;k_2)$

d.f.=(k_1;k_2) – число степеней свободы



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Снедекора-Фишера, F

<u>Свойства</u> F-распределения (Снедекора-Фишера)

$$h \sim F(k_1; k_2)$$

1. $\mathrm{E}h = \dfrac{k_2}{k_2 - 2},\ k_2 > 2$

2. $\mathrm{Mo}\,h = \dfrac{k_1 - 2}{k_1} \times \dfrac{k_2}{k_2 + 2},\ k_1 > 2$

3. $h_{k_1;k_2}$ ¾ ¾ ¾ ¾ ¾® 1 (k_1 ® ¥; k_2 ® ¥)

4. $k_1 \times h_{k_1;k_2}$ ¾ ¾ ¾ ¾ ¾® $x \sim c^2(k_1)$ (k_1 ® ¥; k_2 ® ¥)

5. $h \sim F(k_1; k_2)$ Þ $\dfrac{1}{h} \sim F(k_2; k_1)$

Докажите свойства 3.-5.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

<u>Def</u> распределение Стьюдента с *d.f.*=k (параметр формы):

$$z, h_i \text{ - } i.i.d.\ N(0;1) \quad \text{Þ} \quad x_k = \frac{z}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} h_i^2}{k}}} \sim St(k)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

<u>Def</u> распределение Стьюдента с *d.f.*=k (параметр формы):

$$z, h_i \text{ - } i.i.d.\ N(0;1) \quad \text{Þ} \quad m_k = \frac{z}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} h_i^2}{k}}} \sim St(k)$$

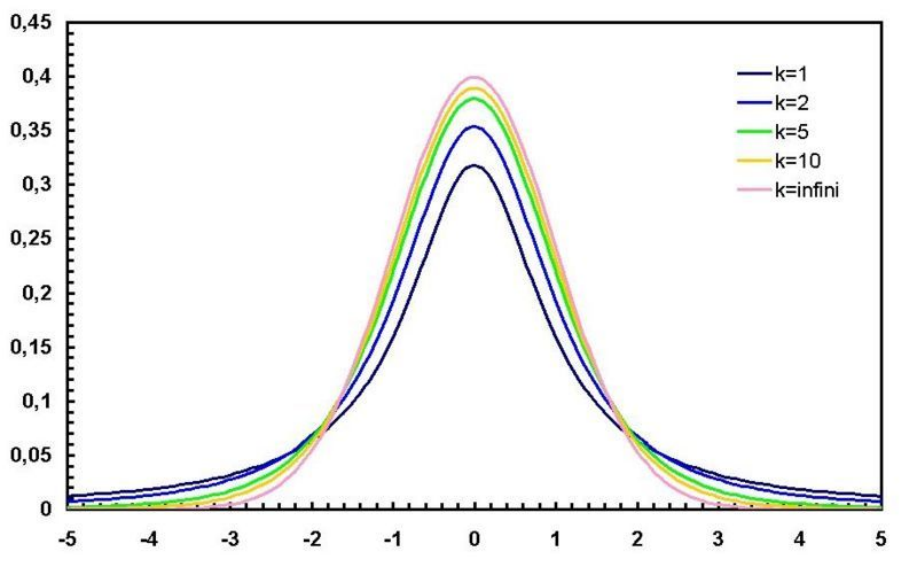
$$z \sim N(0;1),\ x_k \sim c^2(k) \text{ - í åçàâèñèì û} \quad \text{Þ} \quad m_k = \frac{z}{\sqrt{\frac{x_k}{k}}} \sim St(k)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

Плотность распределения Стьюдента

$$x_k \sim St(k)$$

$$t_{x_k}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{pk} \times \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \times \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}$$



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ Стьюдента, St

Свойства распределения St(k)

$$x_k \sim St(k)$$

1. $\mathrm{E}x = \mathrm{Mo}x = \mathrm{Me}x = \mathrm{As}x = 0$

2. $\mathrm{D}x = \dfrac{n}{n-2}\,(n > 2)$

3. $\mathrm{Ex}\,x = \dfrac{6}{n-4}\,(n > 4)$

4. $St(1) = C(0;1)$

5. $St(k) \xrightarrow{P} N(0;1)$

6. $h = x_k^2 \sim F(1;k)$

7. $h = \dfrac{1}{x_k} \sim F(k;1)$

Докажите свойства 4.-7.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ