

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

- Визуализация данных
- Точечные оценки
- Групповые характеристики
- Метод наибольшего правдоподобия
- Метод моментов
- Интервальные оценки
- Алгоритм нахождения доверительных интервалов
- Оценка  $a$  при известной дисперсии
- Оценка  $a$  при неизвестной дисперсии
- Оценка среднего квадратического отклонения
- Оценка вероятности события
- Проверка статистических гипотез

*Генеральной совокупностью* называют совокупность всех объектов, над которыми производят наблюдение.

*Выборочной совокупностью (выборкой)* называют часть отобранных из генеральной совокупности объектов.

*Объёмом совокупности* называют количество объектов в ней.

## Способы отбора

1. Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части:

- а) простой случайный бесповторный отбор,
- б) простой случайный повторный отбор.

2. Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части:

- а) типический,
- б) механический,
- в) серийный.

**Комбинированный отбор.**

Наблюдаемые значения  $x_i$  называют *вариантами*.

Последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке называют *вариационным рядом*.

*Частотой варианты* называют число  $n_i$ , показывающее сколько раз встречается данная варианта.

*Относительной частотой варианты* называют отношение частоты к объёму выборки:  $w_i = n_i / n$ .

*Статистическим распределением выборки* называется перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот.

$$1. \sum_i n_i = n$$

$$2. \sum_i w_i = 1$$

$$3. p(X = x_i) \approx w_i$$

## Визуализация данных

**Полигоном частот** называют ломаную, отрезки которой последовательно соединяют точки  $(x_i, n_i)$ .

**Полигоном относительных частот** называют ломаную, отрезки которой последовательно соединяют точки  $(x_i, w_i)$ .

**Гистограммой частот** называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы, а высоты равны отношению частоты попадания в данный интервал к длине интервала.

Аналогично вводится понятие **гистограммы относительных частот**.

Функция распределения случайной величины  $X$ :

$$F(x) = p(X < x)$$

*Теоретической функцией распределения* называют функцию распределения генеральной совокупности.

Обозначим через  $n_x$  – частоту появления вариантов, меньших  $x$ . Тогда  $n_x/n$  – относительная частота появления вариантов, меньших  $x$ .

*Эмпирической (выборочной) функцией распределения* называют функцию

$$F^*(x) = n_x/n.$$

## Выборочная характеристика

$$\Theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (*)$$

используемая для нахождения приближённого значения неизвестной генеральной характеристики  $\Theta$ , называется её *точечной статистической оценкой*.

$$\Theta \approx \Theta^*$$

1. Несмещённость:  $M(\Theta^*) = \Theta$
2. Эффективность:  $\Theta^*$  имеет наименьшую дисперсию среди других оценок  $\Theta$ .
3. Состоятельность: при увеличении объёма выборки  $\Theta^*$  стремится по вероятности к  $\Theta$ , то есть чем больше объём выборки, тем незначительнее отклонение  $\Theta^*$  от  $\Theta$ .



## Выборочная средняя:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	$\dots$

$$\overline{x}_v = \frac{\sum n_i x_i}{n}$$

1. Если  $u_i = x_i - c$  для всех  $i$ , где  $c$  – некоторое число, то

$$\overline{u}_v = \overline{x}_v - c$$

2. Если  $u_i = hx_i$  для всех  $i$ , где  $h$  – некоторое число, то

$$\overline{u}_v = h \overline{x}_v$$

## Выборочная дисперсия:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	$\dots$

$$D_{\sigma} = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_{\sigma}})^2}{n}$$

$$D_{\sigma} = \overline{x^2_{\sigma}} - (\overline{x_{\sigma}})^2$$

1. Если  $u_i = x_i - c$  для всех  $i$ , где  $c$  – некоторое число, то

$$D_{\sigma}(u) = D_{\sigma}(x)$$

2. Если  $u_i = hx_i$  для всех  $i$ , где  $h$  – некоторое число, то

$$D_{\sigma}(u) = h^2 D_{\sigma}(x)$$

**Исправленная выборочная дисперсия:**

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\varepsilon} = \frac{n}{n-1} \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\varepsilon})^2}{n} = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\varepsilon})^2}{n-1}$$

**Выборочное среднее квадратическое отклонение:**

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{D_{\varepsilon}}$$

**Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:**

$$s = \sqrt{s^2}$$

1-ая группа:  $N_1$  элементов  $\Rightarrow \bar{x}_1, D_1$

2-ая группа:  $N_2$  элементов  $\Rightarrow \bar{x}_2, D_2$

...

$j$ -тая группа:  $N_j$  элементов  $\Rightarrow \bar{x}_j, D_j$

...

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$  – групповые средние

$D_1, D_2, \dots$  – групповые дисперсии

$$\bar{x}_v = \frac{\sum N_j \bar{x}_j}{n} \quad D_v = D_{внгр} + D_{межгр}$$

$$D_{внгр} = \frac{\sum N_j D_j}{n} \quad \text{– внутригрупповая дисперсия}$$

$$D_{межгр} = \frac{\sum N_j (\bar{x}_j - \bar{x}_v)^2}{n} \quad \text{– межгрупповая дисперсия}$$

# Метод максимального (наибольшего) правдоподобия

1. Генеральная совокупность имеет распределение Пуассона

$$p(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \quad - \text{вероятность события } x$$

$$\Theta = \lambda = ?$$

2. Генеральная совокупность имеет нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} \quad - \text{плотность распределения}$$

$$\text{если } \sigma \text{ — известно, } \Theta = a = ?$$

$$\text{если } a \text{ — известно, } \Theta = \sigma = ?$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  — выборка

## I. Дискретное распределение

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta) = p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot \dots \cdot p(x_n)$$

$p(x_1), \dots, p(x_n)$  – вероятности значений  $x_1, \dots, x_n$

*Пример. Распределение Пуассона*

$$p(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \quad L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!}$$

## II. Непрерывное распределение

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \Theta) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n)$$

$f(x)$  – плотность распределения

*Пример. Нормальное распределение,  $\sigma$  – известно*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2 / 2\sigma^2} \quad L(a) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x_i-a)^2 / 2\sigma^2}$$

# Алгоритм исследования на максимум функции правдоподобия

$$1. \ln L(\Theta) = \ln p(x_1) + \dots + \ln p(x_n)$$

$$\ln L(\Theta) = \ln f(x_1) + \dots + \ln f(x_n)$$

$$2. \frac{d \ln L(\Theta)}{d \Theta}$$

$$3. \frac{d \ln L(\Theta^*)}{d \Theta} = 0$$

$$4. \frac{d^2 \ln L(\Theta^*)}{d \Theta^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta^* \text{ — точка максимума}$$

# Метод моментов

## I. Оценка одного параметра

$$M(X) = \overline{x}_e$$

*Пример. Показательное распределение*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \lambda = ?$$
$$M(X) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \overline{x}_e \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\overline{x}_e}$$

## II. Оценка двух параметров

$$M(X) = \overline{x}_e \quad D(X) = D_e$$

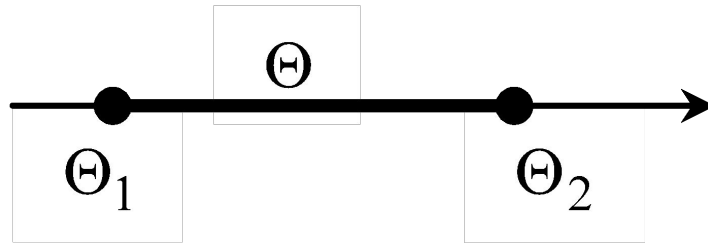
*Пример. Нормальное распределение*

$$a, \sigma = ? \quad M(X) = a \Rightarrow a = \overline{x}_e$$

$$D(X) = \sigma^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{D_e}$$



$\Theta \approx \Theta^*$  – точечная оценка



*Интервальной* называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала:

$$\Theta \in (\Theta_1, \Theta_2)$$

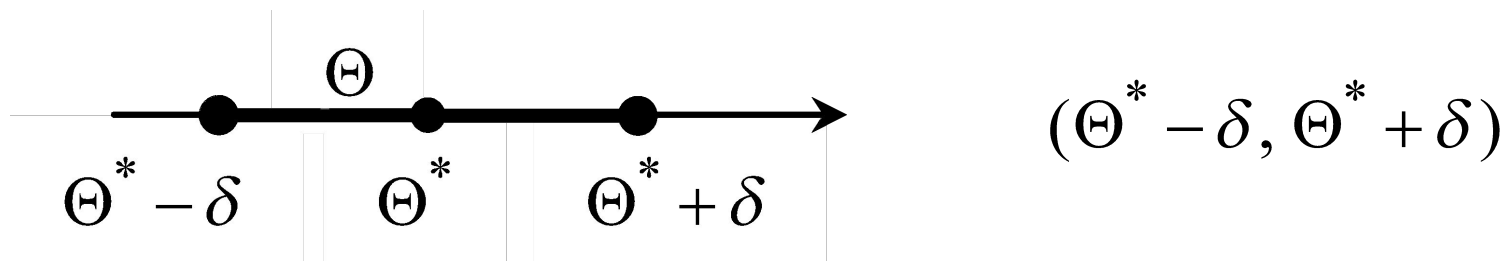
$$\Theta_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \Theta_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

– формулы для нахождения границ интервала по выборочным данным

Интервал  $(\Theta_1, \Theta_2)$  который содержит в себе неизвестный параметр  $\Theta$  с заданной вероятностью  $\gamma$  называют *доверительным интервалом*:

$$p(\Theta_1 < \Theta < \Theta_2) = \gamma$$

При этом вероятность  $\gamma$  называют *доверительной вероятностью* или *надёжностью* оценки.



$$\begin{aligned} p(\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta) &= p(-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta) = \\ &= p(|\Theta - \Theta^*| < \delta) = \gamma \end{aligned}$$

Число  $\delta$  называют *точностью* оценки.

1. Пусть  $X$  – непрерывная случайная величина,  
 $F(x)$  – функция распределения,  
 $f(x)$  – плотность распределения

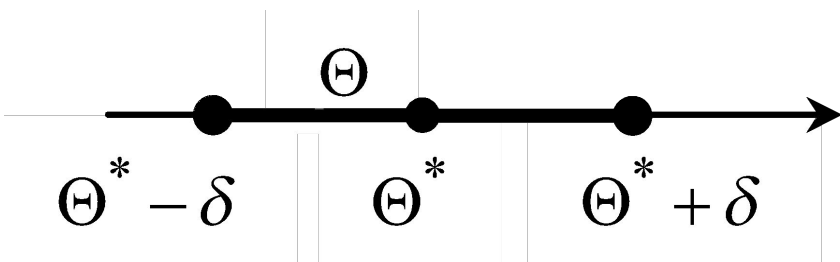
$$p(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (*)$$

2. Пусть плотность распределения  $f(x)$  – чётная функция

$$p(|x| < t) = 2 \int_0^t f(x) dx \quad (**)$$

$$p(|x| > t) = 2(1 - F(t)) \quad (***)$$

# Алгоритм нахождения доверительных интервалов



$$p(\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta) = \gamma$$

$$\Rightarrow p(-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta) = \gamma$$

$\Theta - \Theta^*$  – случайная величина  $\Rightarrow$  из (\*)

$$p(-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta) = F(\delta) - F(-\delta) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx$$

Уравнения для нахождения  $\delta$  :

$$F(\delta) - F(-\delta) = \gamma \quad \text{или} \quad \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = \gamma$$

Вопрос: какой вид имеют функции  $F(x)$  и  $f(x)$  ?

Пусть генеральная совокупность имеет нормальное распределение

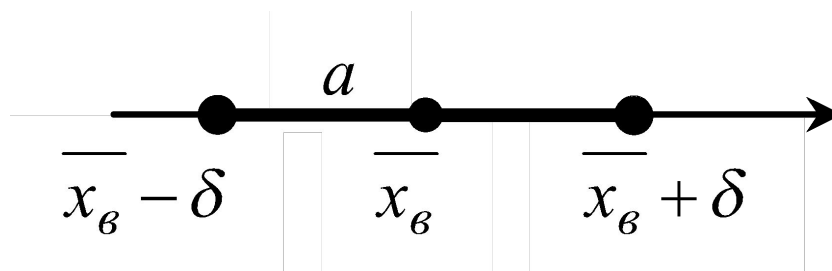
если  $\sigma$  – известно,  $\Theta = a = ?$

1. Задаём надёжность  $\gamma$ .

2. Находим точечную оценку:  $a \approx \bar{x}_e$

3. Находим доверительный интервал  $(\bar{x}_e - \delta, \bar{x}_e + \delta)$ ,  
то есть такое  $\delta$ , что

$$p(\bar{x}_e - \delta < a < \bar{x}_e + \delta) = \gamma$$



$\frac{\overline{x}_e - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$  – случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией

Шаг 1. Найдём такое число  $t_\gamma$ , что

$$P\left(\left|\frac{\overline{x}_e - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right| < t_\gamma\right) = \gamma$$

$$t_\gamma = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \quad \text{или} \quad t_\gamma = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

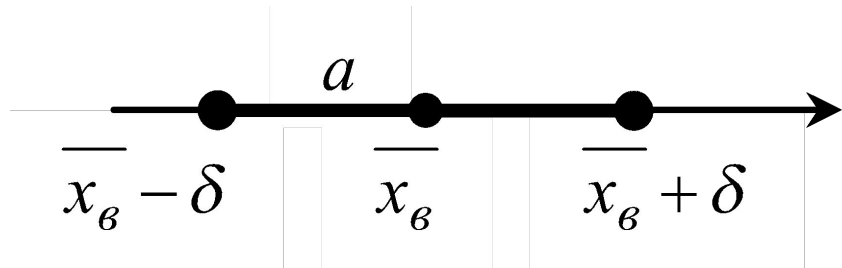
Шаг 2.

$$\left|\frac{\overline{x}_e - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right| < t_\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x}_e - \frac{t_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_e + \frac{t_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$$

$$p\left(\left|\frac{\bar{x}_e - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right| < t_\gamma\right) = p\left(\bar{x}_e - \frac{t_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + \frac{t_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

Надо найти такой интервал  $(\bar{x}_e - \delta, \bar{x}_e + \delta)$ , что

$$p(\bar{x}_e - \delta < a < \bar{x}_e + \delta) = \gamma$$



Таким образом,  $\delta = \frac{t_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ .

Доверительным интервалом является интервал:

$$\left(\bar{x}_e - \frac{t_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_e + \frac{t_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Пусть генеральная совокупность имеет нормальное распределение

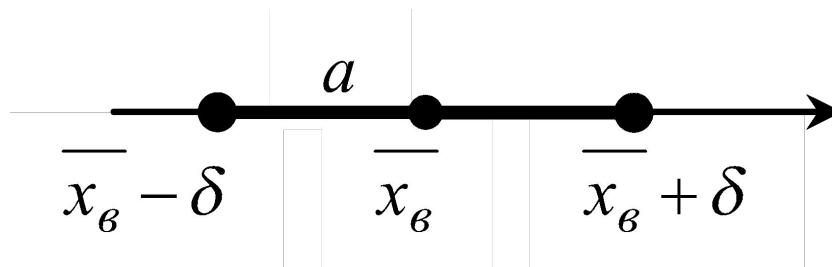
$\sigma$  – неизвестно,  $\Theta = a = ?$

1. Задаём надёжность  $\gamma$ .

2. Находим точечную оценку:  $a \approx \bar{x}_g$

3. Находим доверительный интервал  $(\bar{x}_g - \delta, \bar{x}_g + \delta)$ ,  
то есть такое  $\delta$ , что

$$p(\bar{x}_g - \delta < a < \bar{x}_g + \delta) = \gamma$$





$\frac{\overline{x}_e - a}{s} \cdot \sqrt{n}$  – случайная величина, имеющая распределение Стьюдента с  $(n-1)$  степенями свободы

Шаг 1. Найдём такое число  $t_\gamma$ , что

$$P\left(\left|\frac{\overline{x}_e - a}{s} \cdot \sqrt{n}\right| < t_\gamma\right) = \gamma$$

$$t_\gamma = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

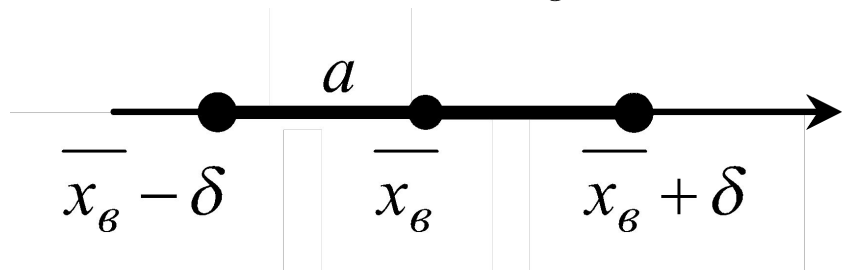
Шаг 2.

$$\left|\frac{\overline{x}_e - a}{s} \cdot \sqrt{n}\right| < t_\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x}_e - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_e + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}$$

$$p\left(\left|\frac{\bar{x}_e - a}{s} \cdot \sqrt{n}\right| < t_\gamma\right) = p\left(\bar{x}_e - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$$

Надо найти такой интервал  $(\bar{x}_e - \delta, \bar{x}_e + \delta)$ , что

$$p(\bar{x}_e - \delta < a < \bar{x}_e + \delta) = \gamma$$



Таким образом,  $\delta = \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}$ .

Доверительным интервалом является интервал:

$$\left(\bar{x}_e - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}, \bar{x}_e + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}\right)$$

Пусть генеральная совокупность имеет нормальное распределение

$$\sigma = ?$$

1. Задаём надёжность  $\gamma$ .

2. Находим точечную оценку:  $\sigma \approx s$ .

3. Находим доверительный интервал  $(s - \delta, s + \delta)$ ,  
то есть такое  $\delta$ , что

$$p(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma$$

$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}$  – случайная величина, имеющая  $\chi^2$ -распределение с  $(n-1)$  степенями свободы

Шаг 1. Найдём такое число  $q_\gamma$ , что

$$P\left(\frac{n-1}{(1+q_\gamma)^2} < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} < \frac{n-1}{(1-q_\gamma)^2}\right) = \gamma$$

$$F\left(\frac{n-1}{(1-q_\gamma)^2}\right) - F\left(\frac{n-1}{(1+q_\gamma)^2}\right) = \gamma \Rightarrow q_\gamma$$

Шаг 2.

$$\frac{n-1}{(1+q_\gamma)^2} < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} < \frac{n-1}{(1-q_\gamma)^2} \Leftrightarrow s(1-q_\gamma) < \sigma < s(1+q_\gamma)$$

$$p\left(\frac{n-1}{(1+q_\gamma)^2} < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} < \frac{n-1}{(1-q_\gamma)^2}\right) = p(s - sq_\gamma < \sigma < s + sq_\gamma) = \gamma$$

Надо найти такой интервал  $(s - \delta, s + \delta)$ , что

$$p(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma$$

Таким образом,  $\delta = sq_\gamma$ .

*Замечание:* при  $q_\gamma > 1$  имеем  $s(1 - q_\gamma) < 0$ , но  $\sigma > 0$   
 $\Rightarrow$  при  $q_\gamma > 1$   $0 < \sigma < s(1 + q_\gamma)$

Доверительным интервалом является интервал:

$$(s(1 - q_\gamma), s(1 + q_\gamma)) \text{ при } q_\gamma \leq 1$$

$$(0, s(1 + q_\gamma)) \text{ при } q_\gamma > 1$$

## Способ 2.

Шаг 1. Найдём такие числа  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$ , что

$$p\left(\chi_1^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = \gamma$$

$$\chi_1^2 = F^{-1}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) \quad \chi_2^2 = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

Шаг 2.

$$\chi_1^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} < \chi_2^2 \Leftrightarrow \frac{s}{\chi_2} \cdot \sqrt{n-1} < \sigma < \frac{s}{\chi_1} \cdot \sqrt{n-1}$$

$$p\left(\chi_1^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = p\left(\frac{s}{\chi_2} \cdot \sqrt{n-1} < \sigma < \frac{s}{\chi_1} \cdot \sqrt{n-1}\right) = \gamma$$

Доверительным интервалом является интервал:

$$\left(\frac{s}{\chi_2} \cdot \sqrt{n-1}, \frac{s}{\chi_1} \cdot \sqrt{n-1}\right)$$

Пусть производятся независимые испытания с неизвестной вероятностью  $p$  появления события  $A$  в каждом испытании.

$p - ?$

1. Задаём надёжность  $\gamma$ .

2. Находим точечную оценку:  $p \approx w = \frac{m}{n}$

$m$  – число появлений события  $A$  при  $n$  испытаниях.

$$M(w) = p \quad \sigma(w) = \sqrt{p(1-p)/n}$$

3. Находим доверительный интервал  $(p_1, p_2)$ , то есть такие числа  $p_1$  и  $p_2$ , что

$$p(p_1 < p < p_2) = \gamma$$

$w$  – случайная величина, имеющая нормальное распределение, причём  $a = p$  и  $\sigma = \sqrt{p(1-p)/n}$

$\frac{w - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$  – случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией

Шаг 1. Найдём такое  $t$ , что

$$P\left(\left|\frac{w - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right| < t\right) = \gamma$$

$$t = F^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \quad \text{или} \quad t = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$



Шаг 2.

$$\left| \frac{w - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right| < t \Leftrightarrow (1 + t^2/n) \cdot p^2 - (2w + t^2/n) \cdot p + w^2 < 0$$
$$\Leftrightarrow p_1 < p < p_2, \text{ где } p_1 = \frac{n}{t^2 + n} \left( w + \frac{t^2}{2n} - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left( \frac{t}{2n} \right)^2} \right)$$
$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n} \left( w + \frac{t^2}{2n} + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left( \frac{t}{2n} \right)^2} \right)$$

$$P \left( \left| \frac{w - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right| < t \right) = P(p_1 < p < p_2) = \gamma$$

Доверительным интервалом является интервал:

$$(p_1, p_2)$$

$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n} \left( w + \frac{t^2}{2n} - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right)$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n} \left( w + \frac{t^2}{2n} + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2} \right)$$

При больших значениях  $n$  (порядка сотен)

$$\frac{t^2}{2n} \rightarrow 0 \quad \left(\frac{t}{2n}\right)^2 \rightarrow 0 \quad \frac{n}{t^2 + n} \rightarrow 1 \quad \Rightarrow$$

$$p_1 = w - t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}} \quad \text{и} \quad p_2 = w + t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$$

Доверительным интервалом является интервал:

$$(w - \delta, w + \delta), \quad \text{где} \quad \delta = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}$$

***Статистической гипотезой*** называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения.

Проверяемую гипотезу называют ***нулевой (основной)***, обозначают её  $H_0$ .

***Конкурирующей (альтернативной)*** называют гипотезу, которая противоречит нулевой, обозначают её  $H_1$ .

Задача: проверить, верна ли нулевая гипотеза  $H_0$  при альтернативной гипотезе  $H_1$ ?