Устойчивость систем нелинейных дифференциальных уравнений

Выполнил студент ГИП-104
Шинкарёв Г.Г.
Научный руководитель:
Ибрагимов Т. М.

Цель работы

Целью данной курсовой работы является изучение устойчивости непрерывных решений систем дифференциальных уравнений первого порядка и анализ устойчивости системы дифференциальных уравнений по оценки научной квалификации.

Постановка задачи

На основе изученного алгоритма проверить на устойчивость систему нелинейных дифференциальных уравнений подсчёта научной квалификации и написать макрос по проверки устойчивости рассматриваемой системы в зависимости от начальных коэффициентов в Exel.

Введение

- Анализ устойчивости непосредственно связан с определением условий равновесия. В линейных системах существуют только одно состояние равновесия. Поэтому зависимые переменные, характеризующие состояние системы, с течением времени приближаются либо к состоянию покоя, либо периодического изменения. В нелинейных же системах возможны ситуации, когда существуют несколько состояний равновесия.
- Если достаточно малое возмущение приводит к существенному отклонению режима от исходного состояния или от невозмущенного движения, то говорят о нестабильности или неустойчивости положения равновесия или невозмущенного движения. Если же после прекращения действия возмущения система не отклоняется существенно от своего исходного состояния, то такой режим называют устойчивым.

Целочисленный пример

- Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является системой уравнений для оценки научной квалификации.

$$\frac{dx_i}{dt} = uskor \cdot I \cdot K \cdot m_i \cdot \beta_i \cdot x_i \cdot (1 - x_i) - x_i \cdot d_i$$

- uskor=3
- I=125
- U=12

$$d_i = \begin{Bmatrix} 0.000001;0.0000001;0.0000057;0.0000057;0.0000115; \\ 0.0000001;0.0000057;0.0000046;0.00000013 \end{Bmatrix}$$

$$\beta_i = \begin{matrix} \{0.0000026;0.0000007;0.00000073;0.00000022;0.00000021; \\ 0.0000025;0.0000067;0.0000023;0.000077\} \end{matrix}$$

Для обработки данного примера мы использовали дифференцирование, а точнее дифференцировали 9 исходных уравнений методом Эйлера.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	Начальные значения													Сумма Mi					
2	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		E	M		6					
3	0,938	0,996904095	0,96826904	0,9347	0,9121	0,933100858	0,9667905	0,991	0,96245		0,0005	6							
4	Mi																		
5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9										
6	6	0	0	0	0	0	0	0	0										
7	Коэфициенты значимости:																		
8	0,5735	0,186	0,5735	0,0144	0,0574	0,05735	0,014353	0,014	0,05735										
10	1. Поиск проблемы		Mi=		2. Формирование идеи		Mi=		Математическая част		Mi=		4. Подготовка обеспечения		Mi=		5. Реализация плана работ		Mi=
11	Xo=	0,938025748	6		Xo=	0,996904095	0		Xo=	0,968269	0		Xo=	0,934738693	0		Xo=	0,912057847	0
13	Расчёт				Расчёт				Расчёт				Расчёт				Расчёт		
14	t	X1	F1=		t	X1	F2=		t	X1	F3=		t	X1	F4=		t	X1	F5=
15	0	0,938025748	0,04250999		0	0,996904095	-9,97E-08		0	0,968269	-5,51913E-06		0	0,934738693	-5,328E-06		0	0,912057847	-1,05E-05
16	0,05	0,940151247	0,04114606		0,05	0,99690409	-9,97E-08		0,05	0,9682688	-5,51913E-06		0,05	0,934738426	-5,328E-06		0,05	0,912057323	-1,05E-05
17	0,1	0,9422085	0,03981767		0,1	0,996904085	-9,97E-08		0,1	0,9682685	-5,51913E-06		0,1	0,93473816	-5,328E-06		0,1	0,912056798	-1,05E-05
18	0,15	0,944199384	0,03852721		0,15	0,99690408	-9,97E-08		0,15	0,9682682	-5,51913E-06		0,15	0,934737894	-5,328E-06		0,15	0,912056274	-1,05E-05
19	0,2	0,946125744	0,03727305		0,2	0,996904075	-9,97E-08		0,2	0,9682679	-5,51913E-06		0,2	0,934737627	-5,328E-06		0,2	0,912055749	-1,05E-05
20	0,25	0,947989396	0,03605455		0,25	0,99690407	-9,97E-08		0,25	0,9682677	-5,51913E-06		0,25	0,934737361	-5,328E-06		0,25	0,912055225	-1,05E-05
21	0,3	0,949792124	0,03487106		0,3	0,996904065	-9,97E-08		0,3	0,9682674	-5,51912E-06		0,3	0,934737094	-5,328E-06		0,3	0,9120547	-1,05E-05
22	0,35	0,951535677	0,03372189		0,35	0,99690406	-9,97E-08		0,35	0,9682671	-5,51912E-06		0,35	0,934736828	-5,328E-06		0,35	0,912054176	-1,05E-05
23	0,4	0,953221771	0,03260636		0,4	0,996904055	-9,97E-08		0,4	0,9682668	-5,51912E-06		0,4	0,934736562	-5,328E-06		0,4	0,912053652	-1,05E-05
24	0,45	0,954852089	0,03152378		0,45	0,99690405	-9,97E-08		0,45	0,9682666	-5,51912E-06		0,45	0,934736295	-5,328E-06		0,45	0,912053127	-1,05E-05
25	0,5	0,956428278	0,03047345		0,5	0,996904046	-9,97E-08		0,5	0,9682663	-5,51912E-06		0,5	0,934736029	-5,328E-06		0,5	0,912052603	-1,05E-05
26	0,55	0,957951951	0,02945466		0,55	0,99690404	-9,97E-08		0,55	0,968266	-5,51912E-06		0,55	0,934735762	-5,328E-06		0,55	0,912052078	-1,05E-05
27	0,6	0,959424684	0,02846671		0,6	0,996904035	-9,97E-08		0,6	0,9682657	-5,51911E-06		0,6	0,934735496	-5,328E-06		0,6	0,912051554	-1,05E-05
28	0,65	0,960848019	0,02750887		0,65	0,99690403	-9,97E-08		0,65	0,9682655	-5,51911E-06		0,65	0,93473523	-5,328E-06		0,65	0,912051029	-1,05E-05
29	0,7	0,962223463	0,02658045		0,7	0,996904025	-9,97E-08		0,7	0,9682652	-5,51911E-06		0,7	0,934734963	-5,328E-06		0,7	0,912050505	-1,05E-05
30	0,75	0,963552486	0,02568074		0,75	0,99690402	-9,97E-08		0,75	0,9682649	-5,51911E-06		0,75	0,934734697	-5,328E-06		0,75	0,91204998	-1,05E-05
31	0,8	0,964836523	0,02480903		0,8	0,996904015	-9,97E-08		0,8	0,9682646	-5,51911E-06		0,8	0,93473443	-5,328E-06		0,8	0,912049456	-1,05E-05
32	0,85	0,966076974	0,02396461		0,85	0,99690401	-9,97E-08		0,85	0,9682643	-5,51911E-06		0,85	0,934734164	-5,328E-06		0,85	0,912048932	-1,05E-05
33	0,9	0,967275205	0,02314681		0,9	0,996904005	-9,97E-08		0,9	0,9682641	-5,51911E-06		0,9	0,934733898	-5,328E-06		0,9	0,912048407	-1,05E-05
34	0,95	0,968432545	0,02235491		0,95	0,996904	-9,97E-08		0,95	0,9682638	-5,5191E-06		0,95	0,934733631	-5,328E-06		0,95	0,912047883	-1,05E-05
35	1	0,969550291	0,02158825		1	0,996903995	-9,97E-08		1	0,9682635	-5,5191E-06		1	0,934733365	-5,328E-06		1	0,912047358	-1,05E-05
38	6. Синтез результатов		Mi=		Оформление результат		Mi=		8. Защита работы		Mi=		9. Самокритика		Mi=				
39	Xo=	0,933100858	0		Xo=	0,96679046	0		Xo=	0,9906228	0		Xo=	0,962452777	0		Итог:		
41	Расчёт				Расчёт				Расчёт				Расчёт				Расчёт		
42	t	X1	F6=		t	X1	F7=		t	X1	F8=		t	X1	F9=		t	F10=	
43	0	0,933100858	-9,331E-08		0	0,96679046	-5,51E-06		0	0,9906228	-4,55686E-06		0	0,962452777	-9,625E-08		0	0,01577943	
44	0,05	0,933100853	-9,331E-08		0,05	0,966790184	-5,51E-06		0,05	0,9906225	-4,55686E-06		0,05	0,962452773	-9,625E-08		0,05	0,01527269	
45	0,1	0,933100848	-9,331E-08		0,1	0,966789909	-5,51E-06		0,1	0,9906223	-4,55686E-06		0,1	0,962452768	-9,625E-08		0,1	0,01477989	
46	0,15	0,933100844	-9,331E-08		0,15	0,966789633	-5,51E-06		0,15	0,9906221	-4,55686E-06		0,15	0,962452763	-9,625E-08		0,15	0,01430080	
47	0,2	0,933100839	-9,331E-08		0,2	0,966789358	-5,51E-06		0,2	0,9906218	-4,55686E-06		0,2	0,962452758	-9,625E-08		0,2	0,01383519	
48	0,25	0,933100834	-9,331E-08		0,25	0,966789082	-5,51E-06		0,25	0,9906216	-4,55686E-06		0,25	0,962452753	-9,625E-08		0,25	0,01338282	
49	0,3	0,93310083	-9,331E-08		0,3	0,966788807	-5,51E-06		0,3	0,9906214	-4,55686E-06		0,3	0,962452748	-9,625E-08		0,3	0,01294344	
50	0,35	0,933100825	-9,331E-08		0,35	0,966788531	-5,51E-06		0,35	0,9906212	-4,55686E-06		0,35	0,962452744	-9,625E-08		0,35	0,01251681	
51	0,4	0,93310082	-9,331E-08		0,4	0,966788256	-5,51E-06		0,4	0,9906209	-4,55686E-06		0,4	0,962452739	-9,625E-08		0,4	0,01210266	
52	0,45	0,933100816	-9,331E-08		0,45	0,96678798	-5,51E-06		0,45	0,9906207	-4,55686E-06		0,45	0,962452734	-9,625E-08		0,45	0,01170075	
53	0,5	0,933100811	-9,331E-08		0,5	0,966787704	-5,51E-06		0,5	0,9906205	-4,55685E-06		0,5	0,962452729	-9,625E-08		0,5	0,01131081	
54	0,55	0,933100806	-9,331E-08		0,55	0,966787429	-5,51E-06		0,55	0,9906203	-4,55685E-06		0,55	0,962452724	-9,625E-08		0,55	0,01093258	
55	0,6	0,933100802	-9,331E-08		0,6	0,966787153	-5,51E-06		0,6	0,99062	-4,55685E-06		0,6	0,96245272	-9,625E-08		0,6	0,01056580	
56	0,65	0,933100797	-9,331E-08		0,65	0,966786878	-5,51E-06		0,65	0,9906198	-4,55685E-06		0,65	0,962452715	-9,625E-08		0,65	0,01021020	
57	0,7	0,933100792	-9,331E-08		0,7	0,966786602	-5,51E-06		0,7	0,9906196	-4,55685E-06		0,7	0,96245271	-9,625E-08		0,7	0,00986552	
58	0,75	0,933100788	-9,331E-08		0,75	0,966786327	-5,51E-06		0,75	0,9906193	-4,55685E-06		0,75	0,962452705	-9,625E-08		0,75	0,00953149	

Здесь столбец t время интегрирования, следующие значения Xn рассчитываются по следующим формулам:

$$X_{n,m} = X_{n,m-1} + F_{n,m-1}(t_m - t_{m-1})$$

$$m = 1..10$$

$$n = 1..9$$

Fn - это и есть функция оценки научной квалификации по каждому критерию.
Mi – коэффициент управления функцией.
F10- представляет собой функцию для подсчёта общей квалификации.

Затем при помощи макроса мы расшатываем начальные значения X на величину E.

Начальные значения								
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
0,11829	0,35240944	0,478011066	0,337962853	0,509910485	0,117660666	0,357631039	0,642598613	0,820978178

E	Количество проверок на устойчивос
0,0005	50

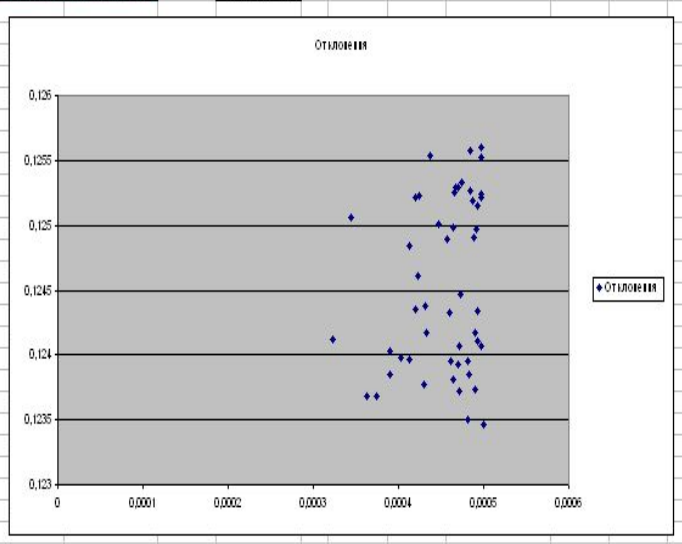
F1_fin	F2_fin	F3_fin	F4_fin	F5_fin	F6_fin	F7_fin	F8_fin	F9_fin
0,12403	-3,551E-08	-2,72465E-06	-1,92638E-06	-5,8639E-06	-1,17661E-08	-2,03849E-06	-2,95594E-06	-8,20978E-08

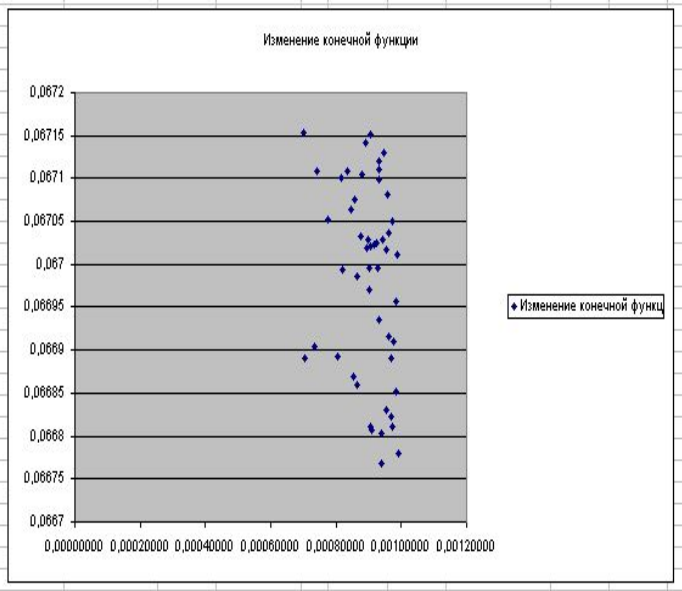
F10
0,04604375

Сдвиг	Значение F10	Отклонение2
0,00046	0,04636666	0,124895323
0,00049	0,04646069	0,125148611
0,00042	0,04648434	0,1252123
0,0005	0,04659887	0,125520813
0,00047	0,04652687	0,125326848
0,00047	0,0464989	0,125251529
0,00048	0,04661861	0,125573971
0,00044	0,0466064	0,125541069
0,0005	0,04648355	0,125210167
0,00046	0,04639985	0,124984727
0,0005	0,0464965	0,125245043
0,00045	0,04640872	0,125008617
0,00034	0,04642611	0,125055459
0,00049	0,04647499	0,125187112
0,00047	0,04651432	0,125293054
0,00048	0,04650615	0,125271048
0,0005	0,04662915	0,125602357
0,00047	0,0465129	0,12528923
0,00049	0,04639537	0,124972642
0,00042	0,04649155	0,125231717
0,00049	0,04637245	0,124910922
0,00041	0,04634684	0,124841931
0,00042	0,04626279	0,124615522
0,00047	0,04620863	0,124469641
0,00043	0,04610025	0,124177732
0,00032	0,04607755	0,12411659
0,00048	0,0459808	0,123855972
0,00049	0,04593572	0,123734551
0,00036	0,04591767	0,123685931
0,00048	0,04585177	0,123508441
0,00043	0,04594875	0,123769651
0,00037	0,04591755	0,12368561
0,00047	0,04600718	0,123927034
0,0004	0,04602522	0,123975643
0,00046	0,0459628	0,123807487
0,0005	0,04583663	0,123467659
0,00047	0,04593224	0,123725172
0,00039	0,04598005	0,123853954
0,00046	0,04601878	0,123958277
0,00048	0,04601567	0,123949915
0,00047	0,04605925	0,124067274
0,00049	0,0461607	0,124340563
0,00043	0,04617556	0,124380583
0,00042	0,04616278	0,124346168
0,00049	0,04609761	0,124170632
0,00046	0,04615628	0,124328655
0,0005	0,04605847	0,124065196
0,00041	0,04602022	0,123962154
0,00049	0,04607405	0,124107144
0,00039	0,04604375	0,124025535

M(x)
0,124533064
D(x)
0,006131088
Sigma(x)
0,078301265

Dlya_Sigma
0,006109987
0,006095295
0,006091604
0,006073738
0,006084967
0,00608933
0,006070662
0,006072566
0,006091727
0,006104799
0,006089706
0,006103413
0,006100696
0,006093063
0,006086924
0,006088199
0,00606902
0,006087146
0,0061055
0,006090478
0,006109081
0,006113085
0,006126236
0,006134718
0,006151706
0,006155267
0,006170459
0,006177543
0,00618038
0,006190745
0,006175494
0,006180399
0,006166315
0,006163481
0,006173287
0,006193128
0,00617809
0,006170576
0,006164493
0,00616498
0,00615814
0,006142227
0,006139898
0,006141901
0,00615212
0,00614292
0,006158262
0,006164267
0,006155817
0,006160573





В результате получаем графики распределения, после чего находим математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

Повторим эту процедуру N раз при различных значениях E и начальных значениях Xo.

На рисунках 1-9 изображены графики, отражающие зависимости математического ожидания и среднеквадратичного отклонения от величины радиуса отклонения начальных значений.

Рисунок 1. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0;0.1)$ I=1..9

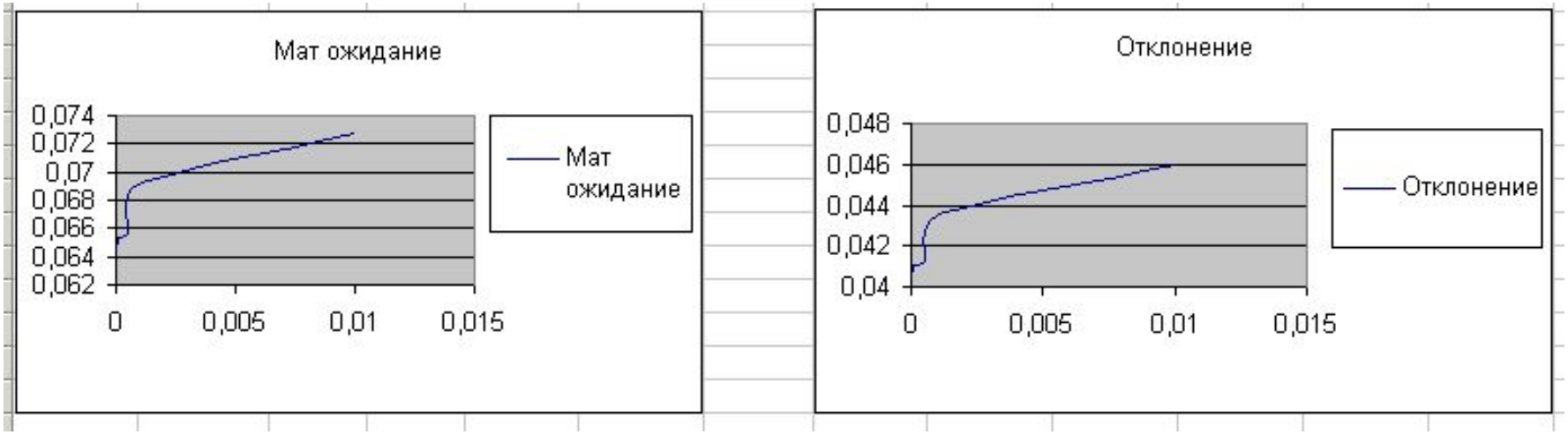
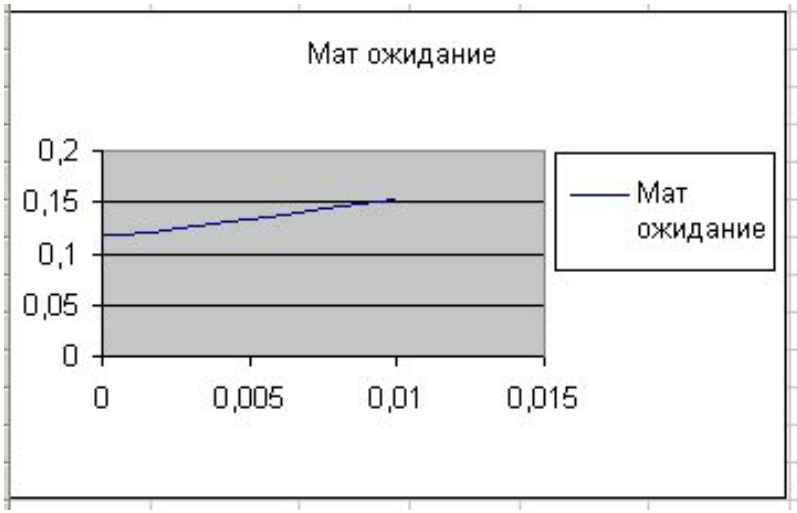


Рисунок 2. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0.1;0.2)$ I=1..9



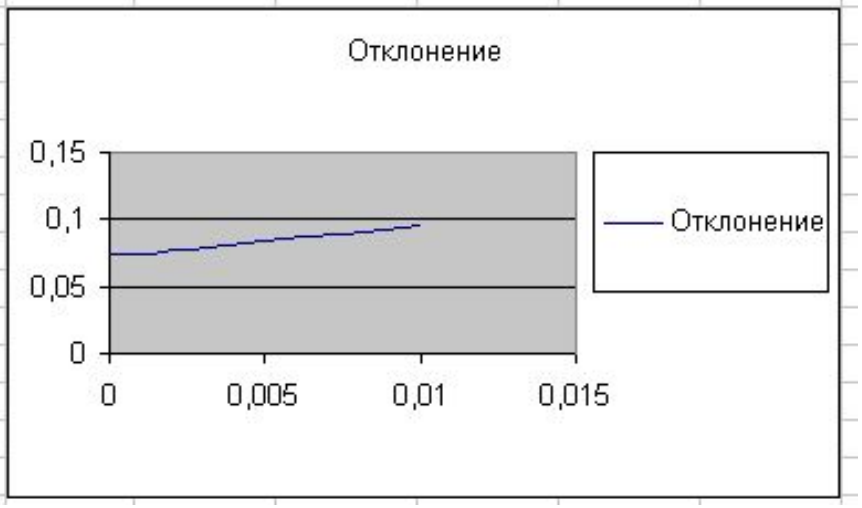


Рисунок 3. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0.2;0.3)$ I=1..9

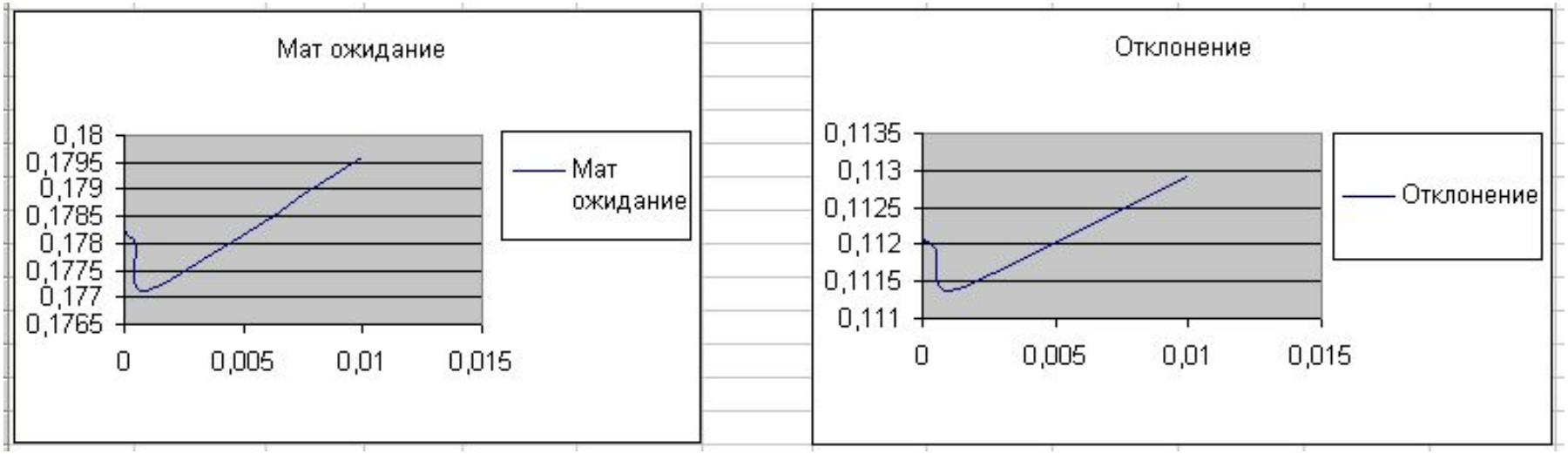
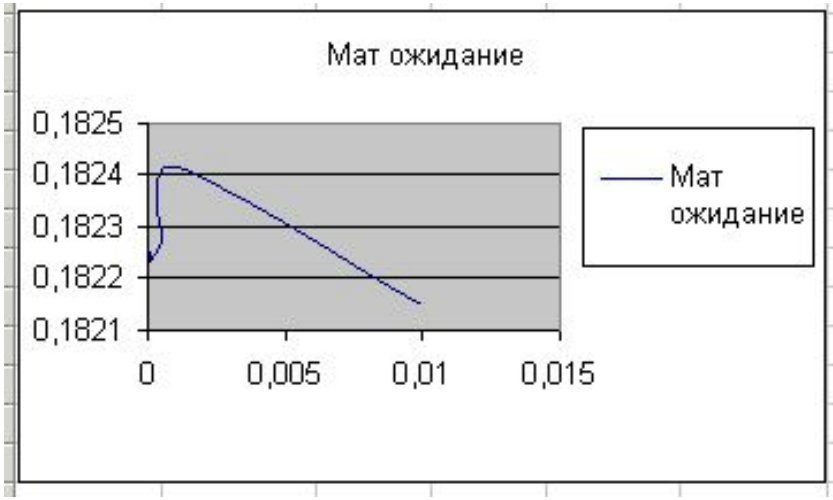


Рисунок 4. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0.3;0.4)$ I=1..9



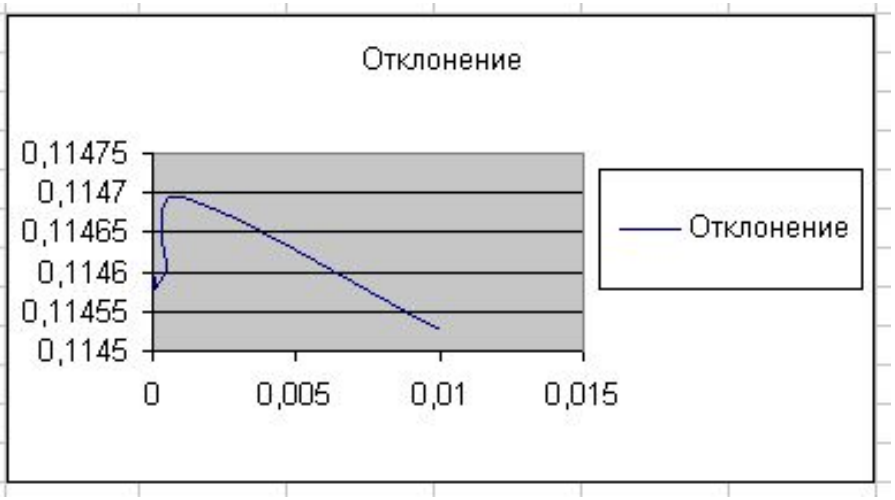


Рисунок 5. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0.4;0.5)$ I=1..9

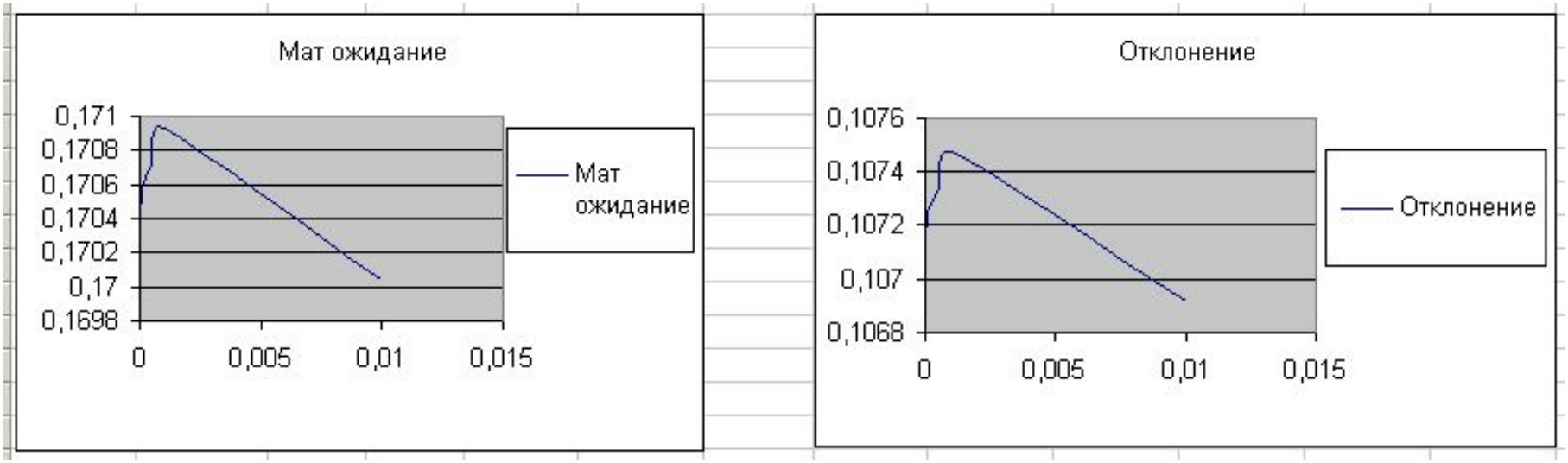


Рисунок 6. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0.5;0.6)$ I=1..9

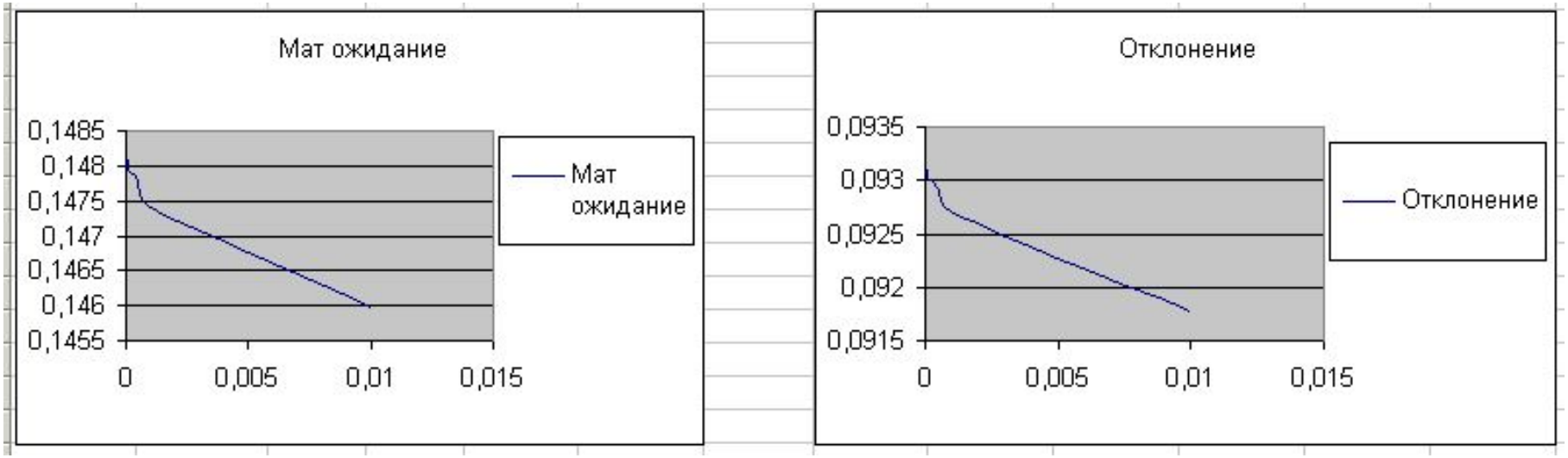


Рисунок 7. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0.6;0.7)$ I=1..9

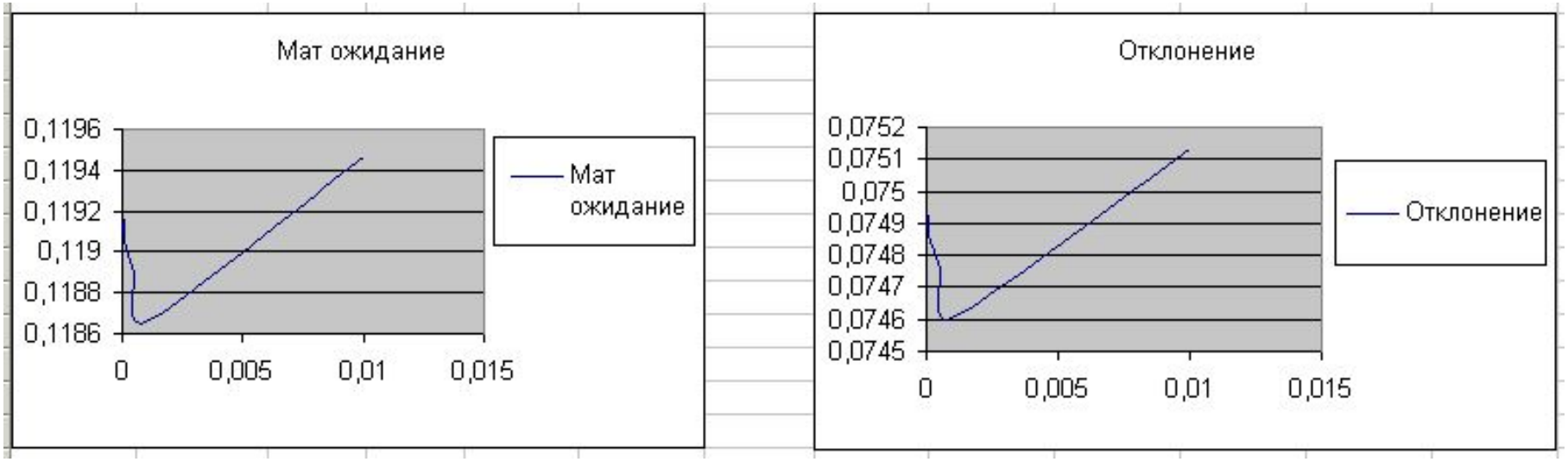


Рисунок 8. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0.7;0.8)$ I=1..9

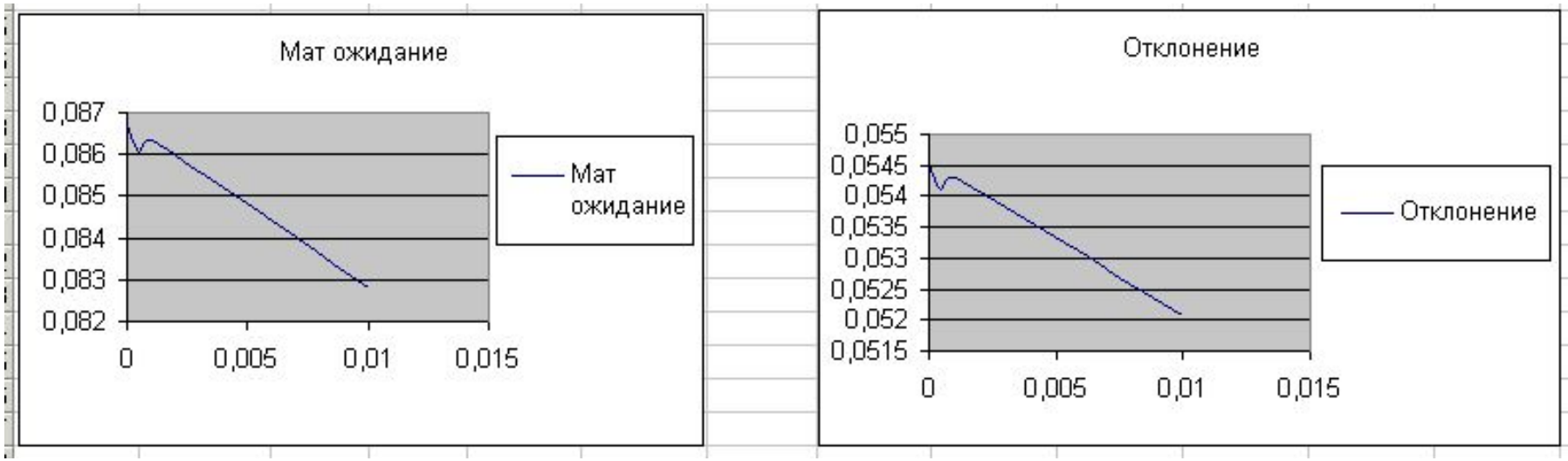


Рисунок 9. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0.8;0.9)$ I=1..9

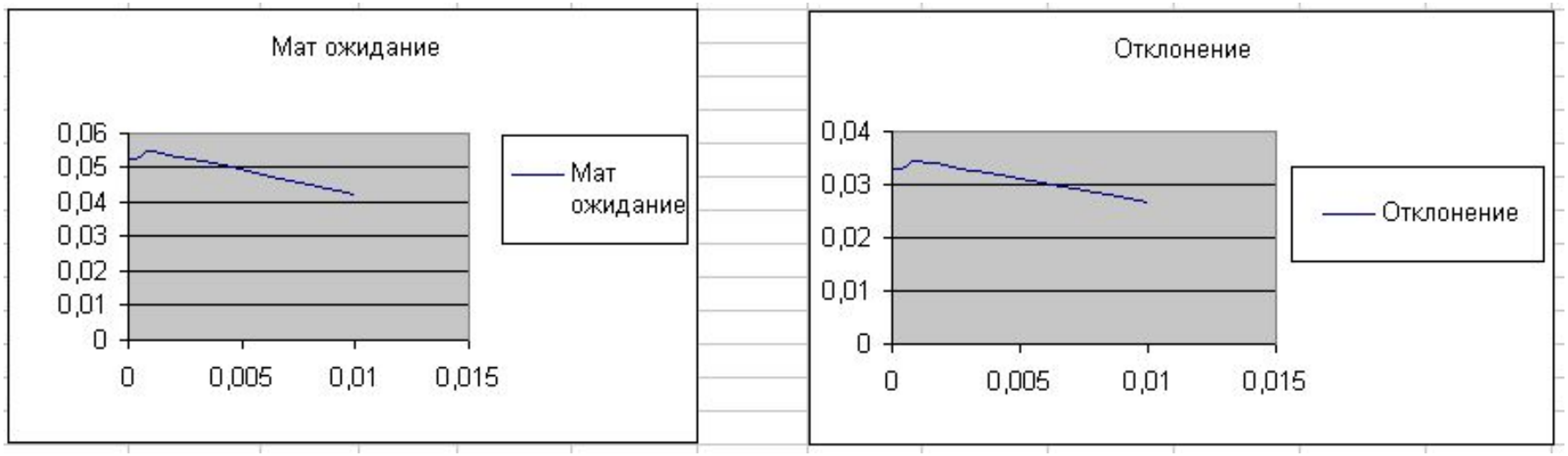


Рисунок 10. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при $X_I \in (0.9;1)$ I=1..9

Выводы

- Исследование системы на устойчивость показало, что при увеличении квалификации студентов устойчивость системы ДУ падает.
- Предположительно изменение устойчивости по грубой оценке соответствует экспоненциальному закону.
- Есть и ряд факторов, которые могут, опять же предположительно, воздействовать негативно на устойчивость. Например это использование метода Эйлера. Продолжив работу в следующем семестре, я постараюсь проинтегрировать систему методом Рунге-Кутта. И оценить устойчивость системы. Я полагаю, что картина измениться. Тогда уже можно будет говорить о конкретных выводах