

# Устойчивость систем нелинейных дифференциальных уравнений

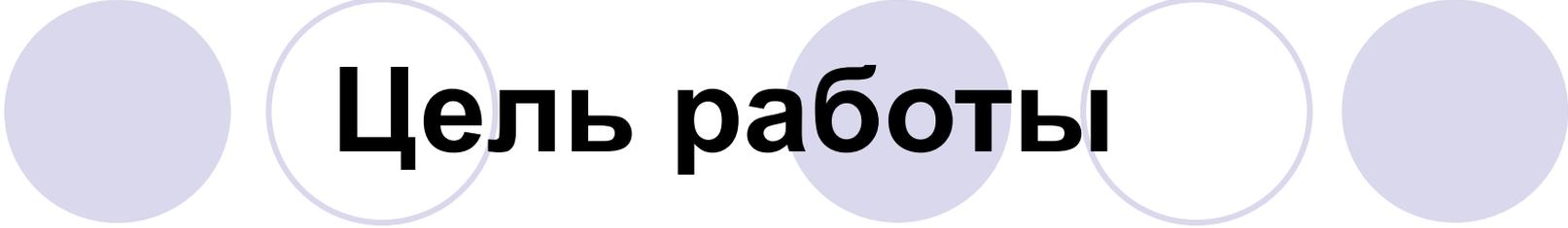


Выполнил студент ГИП-104

Шинкарёв Г.Г.

Научный руководитель:

Ибрагимов Т. М.



# Цель работы

Целью данной курсовой работы является изучение устойчивости непрерывных решений систем дифференциальных уравнений первого порядка и анализ устойчивости системы дифференциальных уравнений по оценке научной квалификации.



# Постановка задачи

На основе изученного алгоритма проверить на устойчивость систему нелинейных дифференциальных уравнений подсчёта научной квалификации и написать макрос по проверки устойчивости рассматриваемой системы в зависимости от начальных коэффициентов в Excel.



# Введение

- Анализ устойчивости непосредственно связан с определением условий равновесия. В линейных системах существуют только одно состояние равновесия. Поэтому зависимые переменные, характеризующие состояние системы, с течением времени приближаются либо к состоянию покоя, либо периодического изменения. В нелинейных же системах возможны ситуации, когда существуют несколько состояний равновесия.
- Если достаточно малое возмущение приводит к существенному отклонению режима от исходного состояния или от невозмущенного движения, то говорят о нестабильности или неустойчивости положения равновесия или невозмущенного движения. Если же после прекращения действия возмущения система не отклоняется существенно от своего исходного состояния, то такой режим называют устойчивым.

# Целочисленный пример

- Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является системой уравнений для оценки научной квалификации.

$$\frac{dx_i}{dt} = uskor \cdot I \cdot K \cdot m_i \cdot \beta_i \cdot x_i \cdot (1 - x_i) - x_i \cdot d_i$$

- $uskor=3$
- $I=125$
- $U=12$
- $d_i = \{0.000001; 0.000001; 0.0000057; 0.0000057; 0.0000115;\}$   
 $\{0.0000001; 0.0000057; 0.0000046; 0.00000013\}$
- $\beta_i = \{0.0000026; 0.0000007; 0.00000073; 0.00000022; 0.00000021;$   
 $0.0000025; 0.0000067; 0.0000023; 0.000077\}$

Для обработки данного примера мы использовали дифференцирование, а точнее дифференцировали 9 исходных уравнений методом Эйлера.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	
1	Начальные значения													Сумма Mi						
2	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9		E	M		6						
3	0,938	0,996904095	0,96826904	0,9347	0,9121	0,933100858	0,9667905	0,991	0,96245											
4	Mi																			
5	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9											
6	6	0	0	0	0	0	0	0	0											
7	Коэффициенты энзимности:																			
8	0,5735	0,186	0,5735	0,0144	0,0574	0,05735	0,014353	0,014	0,05735											
10	1. Поиск проблемы			Mi=	2. Формирование идеи			Mi=	3. Математическая часть			Mi=	4. Подготовка обеспечения			Mi=	5. Реализация плана работ			Mi=
11	X0= 0,938025748			6	X0= 0,996904095			0	X0= 0,968269			0	X0= 0,934738693			0	X0= 0,912057847			0
13	Расчёт				Расчёт				Расчёт				Расчёт				Расчёт			
14	t	X1	F1=	t	X1	F2=	t	X1	F3=	t	X1	F4=	t	X1	F5=					
15	0	0,938025748	0,04250999	0	0,996904095	-9,97E-08	0	0,968269	-5,51913E-06	0	0,934738693	-5,328E-06	0	0,912057847	-1,05E-05					
16	0,05	0,940151247	0,04114606	0,05	0,996904095	-9,97E-08	0,05	0,9682688	-5,51913E-06	0,05	0,934738426	-5,328E-06	0,05	0,912057323	-1,05E-05					
17	0,1	0,9422085	0,03981767	0,1	0,996904085	-9,97E-08	0,1	0,9682685	-5,51913E-06	0,1	0,93473816	-5,328E-06	0,1	0,912056798	-1,05E-05					
18	0,15	0,944199384	0,03852721	0,15	0,99690408	-9,97E-08	0,15	0,9682682	-5,51913E-06	0,15	0,934737894	-5,328E-06	0,15	0,912056274	-1,05E-05					
19	0,2	0,946125744	0,03727305	0,2	0,996904075	-9,97E-08	0,2	0,9682679	-5,51913E-06	0,2	0,934737627	-5,328E-06	0,2	0,912055749	-1,05E-05					
20	0,25	0,947989396	0,03605406	0,25	0,99690407	-9,97E-08	0,25	0,9682677	-5,51913E-06	0,25	0,934737361	-5,328E-06	0,25	0,912055225	-1,05E-05					
21	0,3	0,949792124	0,03487145	0,3	0,996904065	-9,97E-08	0,3	0,9682674	-5,51912E-06	0,3	0,934737094	-5,328E-06	0,3	0,9120547	-1,05E-05					
22	0,35	0,951535677	0,03372189	0,35	0,99690406	-9,97E-08	0,35	0,9682671	-5,51912E-06	0,35	0,934736828	-5,328E-06	0,35	0,912054176	-1,05E-05					
23	0,4	0,953221771	0,03280636	0,4	0,996904055	-9,97E-08	0,4	0,9682668	-5,51912E-06	0,4	0,934736562	-5,328E-06	0,4	0,912053652	-1,05E-05					
24	0,45	0,954852089	0,03152378	0,45	0,99690405	-9,97E-08	0,45	0,9682666	-5,51912E-06	0,45	0,934736295	-5,328E-06	0,45	0,912053127	-1,05E-05					
25	0,5	0,956428278	0,03047345	0,5	0,996904045	-9,97E-08	0,5	0,9682663	-5,51912E-06	0,5	0,934736029	-5,328E-06	0,5	0,912052603	-1,05E-05					
26	0,55	0,957951951	0,02945466	0,55	0,99690404	-9,97E-08	0,55	0,968266	-5,51912E-06	0,55	0,934735762	-5,328E-06	0,55	0,912052078	-1,05E-05					
27	0,6	0,959424684	0,02846671	0,6	0,996904035	-9,97E-08	0,6	0,9682657	-5,51911E-06	0,6	0,934735496	-5,328E-06	0,6	0,912051554	-1,05E-05					
28	0,65	0,960848019	0,02750887	0,65	0,99690403	-9,97E-08	0,65	0,9682655	-5,51911E-06	0,65	0,93473523	-5,328E-06	0,65	0,912051029	-1,05E-05					
29	0,7	0,962223463	0,02658045	0,7	0,996904025	-9,97E-08	0,7	0,9682652	-5,51911E-06	0,7	0,934734963	-5,328E-06	0,7	0,912050505	-1,05E-05					
30	0,75	0,963552486	0,02568074	0,75	0,99690402	-9,97E-08	0,75	0,9682649	-5,51911E-06	0,75	0,934734697	-5,328E-06	0,75	0,91204998	-1,05E-05					
31	0,8	0,964836523	0,02480903	0,8	0,996904015	-9,97E-08	0,8	0,9682646	-5,51911E-06	0,8	0,93473443	-5,328E-06	0,8	0,91204946	-1,05E-05					
32	0,85	0,966078974	0,02396461	0,85	0,99690401	-9,97E-08	0,85	0,9682643	-5,51911E-06	0,85	0,934734164	-5,328E-06	0,85	0,912048932	-1,05E-05					
33	0,9	0,967275205	0,02314681	0,9	0,996904005	-9,97E-08	0,9	0,9682641	-5,51911E-06	0,9	0,934733898	-5,328E-06	0,9	0,912048407	-1,05E-05					
34	0,95	0,968432546	0,02235491	0,95	0,996904	-9,97E-08	0,95	0,9682638	-5,5191E-06	0,95	0,934733631	-5,328E-06	0,95	0,912047883	-1,05E-05					
35	1	0,969550291	0,02158825	1	0,996903995	-9,97E-08	1	0,9682635	-5,5191E-06	1	0,934733365	-5,328E-06	1	0,912047358	-1,05E-05					
38	6. Синтез результатов			Mi=	7. Оформление результата			Mi=	8. Защита работы			Mi=	9. Самокритика			Mi=				
39	X0= 0,933100858			0	X0= 0,96679046			0	X0= 0,9906228			0	X0= 0,962452777			0				
41	Расчёт				Расчёт				Расчёт				Расчёт				Расчёт			
42	t	X1	F6=	t	X1	F7=	t	X1	F8=	t	X1	F9=	t	X1	F10=					
43	0	0,933100858	-9,331E-08	0	0,96679046	-5,51E-06	0	0,9906228	-4,55686E-06	0	0,962452777	-9,625E-08	0	0,912057943						
44	0,05	0,933100853	-9,331E-08	0,05	0,966790184	-5,51E-06	0,05	0,9906225	-4,55686E-06	0,05	0,962452773	-9,625E-08	0,05	0,912057269						
45	0,1	0,933100848	-9,331E-08	0,1	0,966789909	-5,51E-06	0,1	0,9906223	-4,55686E-06	0,1	0,962452768	-9,625E-08	0,1	0,912056600						
46	0,15	0,933100844	-9,331E-08	0,15	0,966789633	-5,51E-06	0,15	0,9906221	-4,55686E-06	0,15	0,962452763	-9,625E-08	0,15	0,912055930						
47	0,2	0,933100839	-9,331E-08	0,2	0,966789358	-5,51E-06	0,2	0,9906218	-4,55686E-06	0,2	0,962452758	-9,625E-08	0,2	0,912055261						
48	0,25	0,933100834	-9,331E-08	0,25	0,966789082	-5,51E-06	0,25	0,9906216	-4,55686E-06	0,25	0,962452753	-9,625E-08	0,25	0,912054592						
49	0,3	0,93310083	-9,331E-08	0,3	0,966788807	-5,51E-06	0,3	0,9906214	-4,55686E-06	0,3	0,962452748	-9,625E-08	0,3	0,912053923						
50	0,35	0,933100825	-9,331E-08	0,35	0,966788531	-5,51E-06	0,35	0,9906212	-4,55686E-06	0,35	0,962452744	-9,625E-08	0,35	0,912053254						
51	0,4	0,93310082	-9,331E-08	0,4	0,966788256	-5,51E-06	0,4	0,9906209	-4,55686E-06	0,4	0,962452739	-9,625E-08	0,4	0,912052585						
52	0,45	0,933100816	-9,331E-08	0,45	0,96678798	-5,51E-06	0,45	0,9906207	-4,55686E-06	0,45	0,962452734	-9,625E-08	0,45	0,912051916						
53	0,5	0,933100811	-9,331E-08	0,5	0,966787704	-5,51E-06	0,5	0,9906205	-4,55686E-06	0,5	0,962452729	-9,625E-08	0,5	0,912051247						
54	0,55	0,933100806	-9,331E-08	0,55	0,966787429	-5,51E-06	0,55	0,9906203	-4,55686E-06	0,55	0,962452724	-9,625E-08	0,55	0,912050578						
55	0,6	0,933100802	-9,331E-08	0,6	0,966787153	-5,51E-06	0,6	0,9906202	-4,55686E-06	0,6	0,96245272	-9,625E-08	0,6	0,912049909						
56	0,65	0,933100797	-9,331E-08	0,65	0,966786878	-5,51E-06	0,65	0,9906198	-4,55686E-06	0,65	0,962452715	-9,625E-08	0,65	0,912049240						
57	0,7	0,933100792	-9,331E-08	0,7	0,966786602	-5,51E-06	0,7	0,9906196	-4,55686E-06	0,7	0,96245271	-9,625E-08	0,7	0,912048571						
58	0,75	0,933100788	-9,331E-08	0,75	0,966786327	-5,51E-06	0,75	0,9906193	-4,55686E-06	0,75	0,962452705	-9,625E-08	0,75	0,912047902						

Здесь столбец t время интегрирования, следующие значения Xn рассчитываются по следующим формулам:

$$X_{n,m} = X_{n,m-1} + F_{n,m-1}(t_m - t_{m-1})$$

$$m = 1..10$$

$$n = 1..9$$

Fn - это и есть функция оценки научной квалификации по каждому критерию.

Mi – коэффициент управления функцией.

F10- представляет собой функцию для подсчёта общей квалификации.

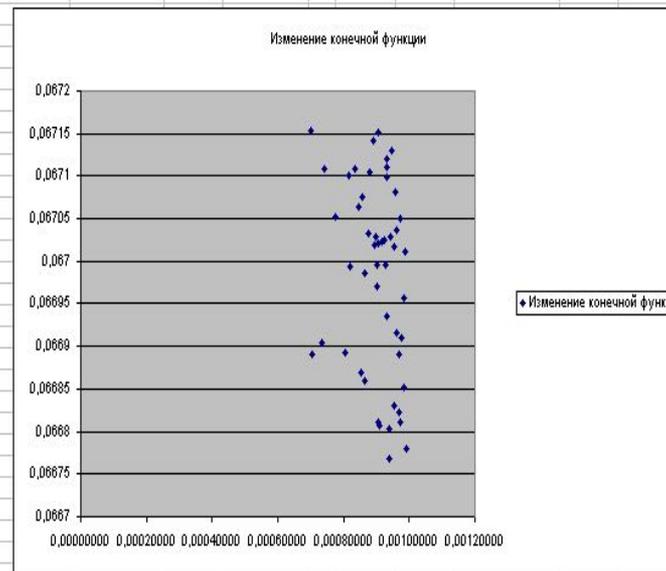
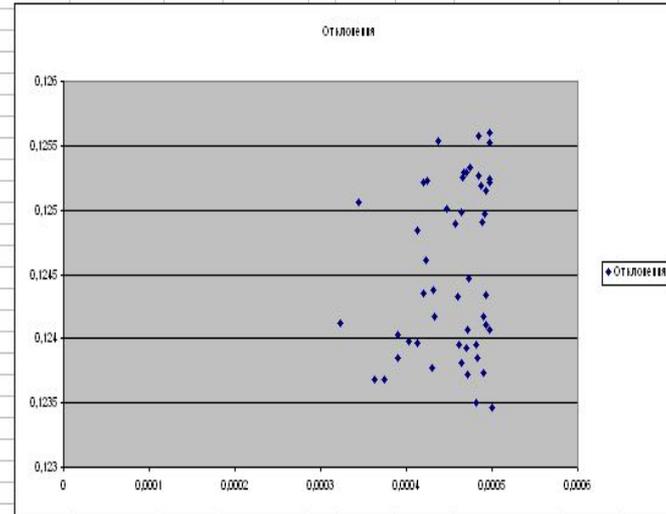
Затем при помощи макроса мы расштыываем начальные значения X на величину E.

Начальные значения									
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	E
0,11829	0,35240944	0,478011066	0,337962853	0,509910485	0,117660666	0,357631039	0,642598613	0,820978178	0,0005
F1_fin	F2_fin	F3_fin	F4_fin	F5_fin	F6_fin	F7_fin	F8_fin	F9_fin	F10
0,12403	-3,551E-08	-2,72465E-06	-1,92638E-06	-5,8639E-06	-1,17861E-08	-2,03849E-06	-2,95594E-06	-8,20978E-08	0,04604375

В результате получаем графики распределения, после чего находим математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение.

Повторим эту процедуру N раз при различных значениях E и начальных значениях X<sub>0</sub>.

Сдвиг	значение F10	Отклонение2	M(x)	Dlya_Sigma
0,00046	0,04636666	0,124895323	0,124533064	0,006109987
0,00049	0,04648069	0,125148611	D(x)	0,006095295
0,00042	0,04648434	0,1252123	0,006131088	0,006081604
0,0005	0,04659887	0,125520813	Sigma(x)	0,006073738
0,00047	0,04652687	0,125328848	0,078301265	0,006084967
0,00047	0,0464989	0,125251529		0,00608933
0,00048	0,04661861	0,125573971		0,006070662
0,00044	0,0466084	0,125541069		0,006072566
0,0005	0,04648365	0,125210167		0,006081727
0,00046	0,04639985	0,124984727		0,006104799
0,0005	0,0464965	0,125246043		0,006089706
0,00045	0,04640872	0,125008617		0,006103413
0,00034	0,04642611	0,125055459		0,006100696
0,00049	0,04647499	0,125187112		0,006093063
0,00047	0,04651432	0,125293054		0,006086924
0,00048	0,04650615	0,125271048		0,006088199
0,0005	0,04662915	0,125602357		0,00608902
0,00047	0,0465129	0,12528923		0,006087146
0,00049	0,04639537	0,124972642		0,0061055
0,00042	0,04649165	0,125231717		0,006090478
0,00049	0,04637246	0,124910922		0,006109081
0,00041	0,04634684	0,124841931		0,006113085
0,00042	0,04626279	0,124615522		0,006126236
0,00047	0,04620863	0,124486641		0,006134718
0,00043	0,04610025	0,124177732		0,006151706
0,00032	0,04607755	0,12411659		0,006155267
0,00048	0,0459808	0,123855972		0,006170469
0,00049	0,04593572	0,123734651		0,006177543
0,00036	0,04591787	0,123685931		0,00618038
0,00048	0,04585177	0,123508441		0,006180746
0,00043	0,04594875	0,123769851		0,006175494
0,00037	0,04591755	0,12368561		0,006180399
0,00047	0,04600718	0,123927034		0,006166315
0,0004	0,04602522	0,123975643		0,006163481
0,00046	0,0459628	0,123807487		0,006173287
0,0005	0,04583683	0,123467659		0,006193128
0,00047	0,04593224	0,123725172		0,00617809
0,00039	0,04598005	0,123853954		0,006170576
0,00046	0,04601878	0,123958277		0,006164493
0,00048	0,04601667	0,123949915		0,00616498
0,00047	0,04605925	0,124067274		0,00615814
0,00049	0,0461607	0,124340563		0,006142227
0,00043	0,04617556	0,124380583		0,006139898
0,00042	0,04616278	0,124346188		0,006141901
0,00049	0,04609761	0,124170632		0,00615212
0,00046	0,04615628	0,124328655		0,00614292
0,0005	0,04605847	0,124065198		0,006158262
0,00041	0,04602022	0,123962154		0,006164267
0,00049	0,04607405	0,124107144		0,006155817
0,00039	0,04604375	0,124025535		0,006160573



На рисунках 1-9 изображены графики, отражающие зависимости математического ожидания и среднеквадратичного отклонения от величины радиуса отклонения начальных значений.

Рисунок 1. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0;0.1)$   $I=1..9$

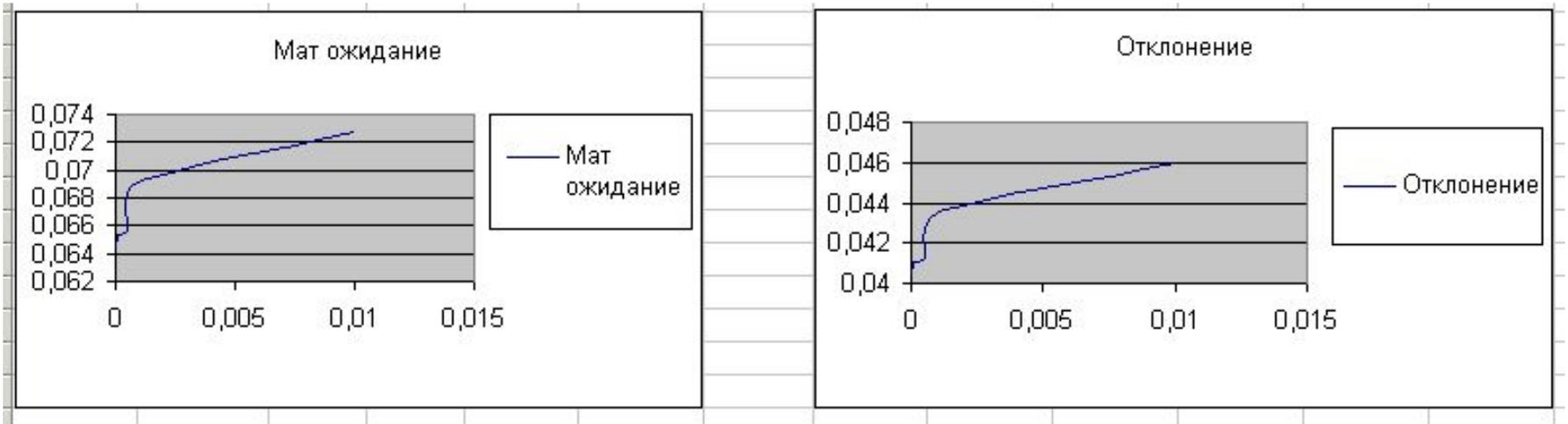


Рисунок 2. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0.1; 0.2)$   $I=1..9$

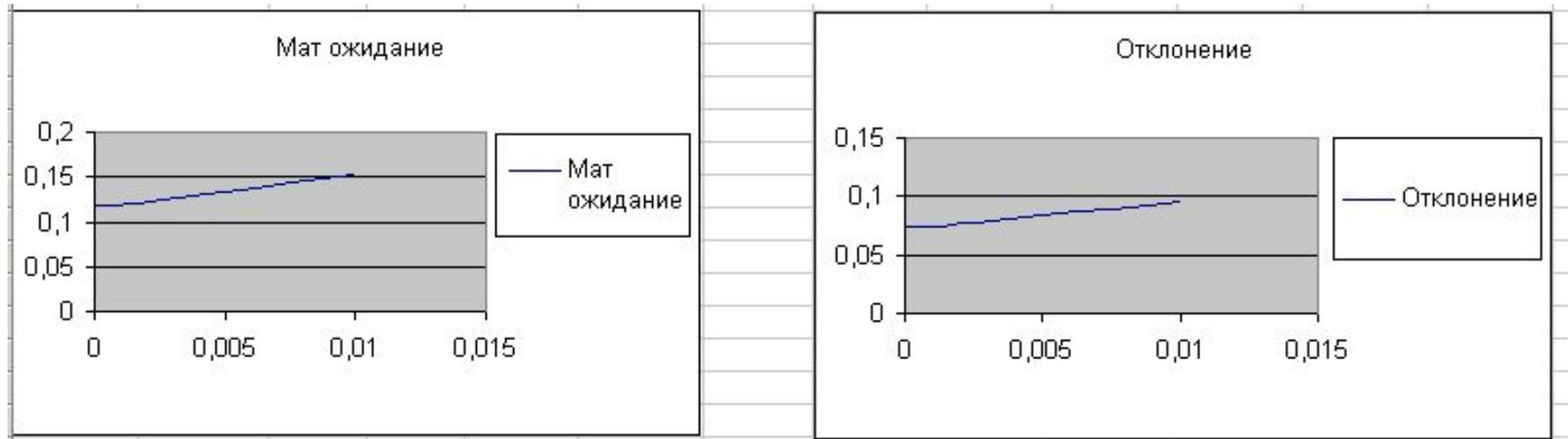


Рисунок 3. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0.2; 0.3)$   $I=1..9$

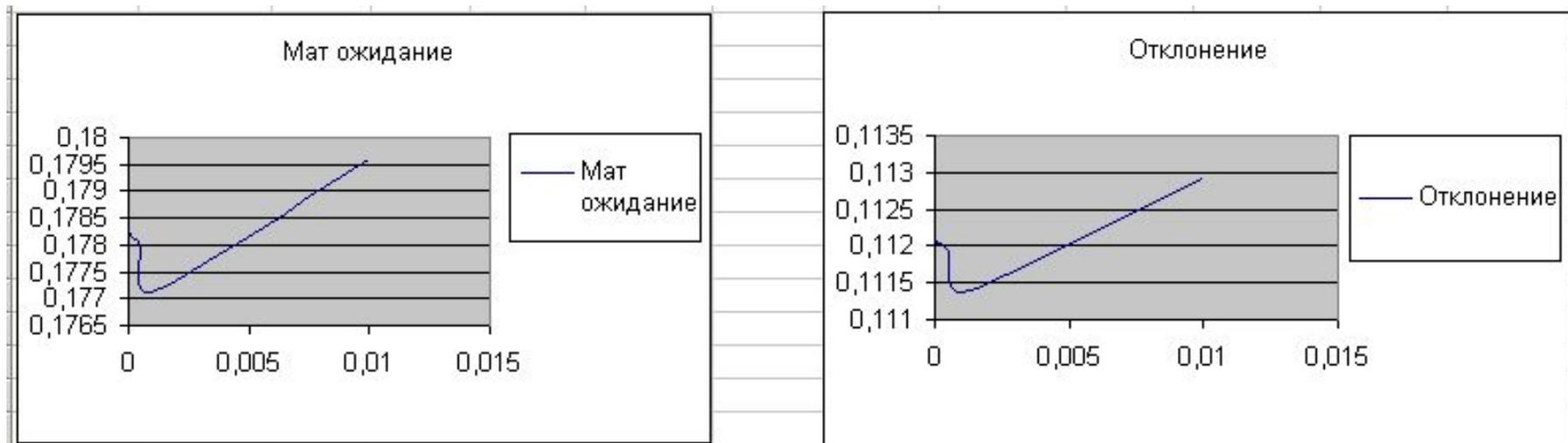


Рисунок 4. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0.3; 0.4)$   $I=1..9$



Рисунок 5. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0.4;0.5)$   $I=1..9$

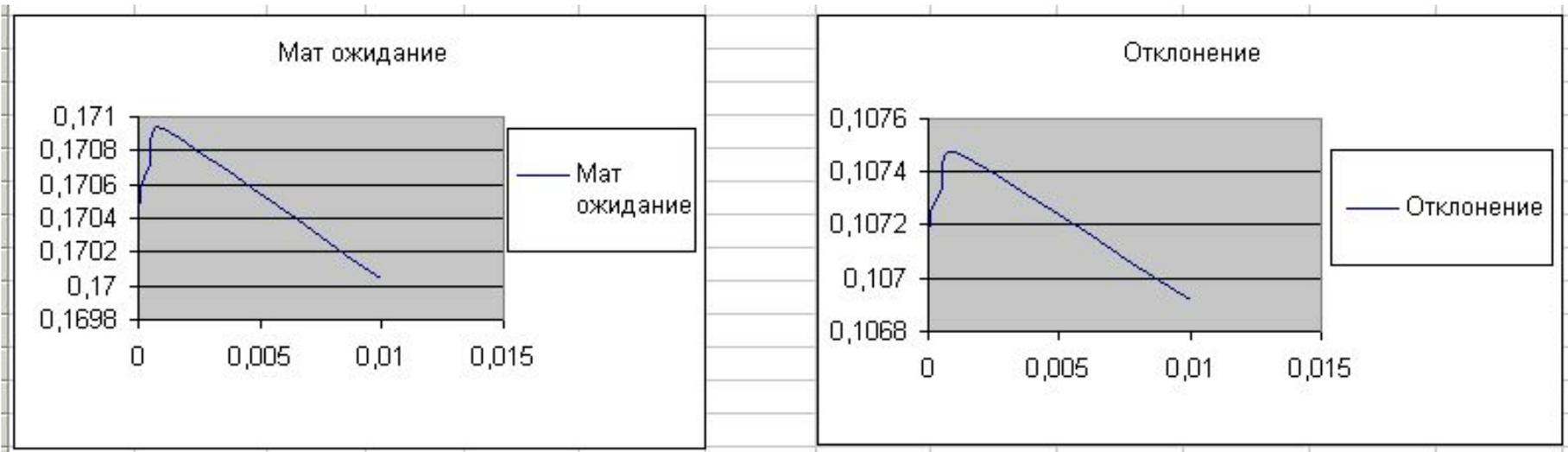


Рисунок 6. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0.5; 0.6)$   $I=1..9$

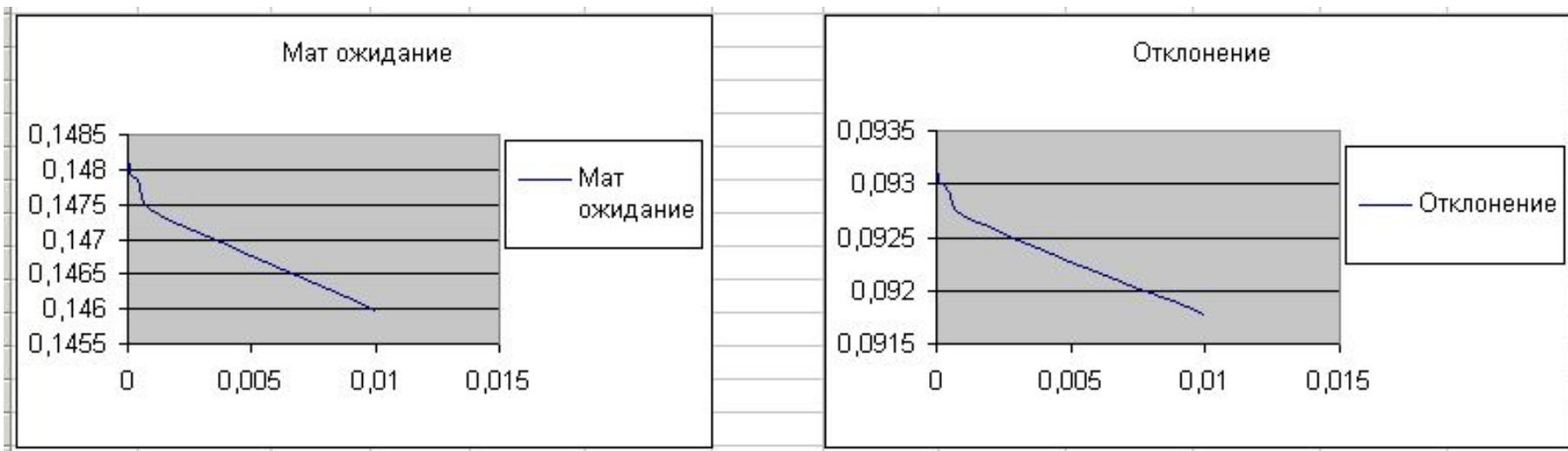


Рисунок 7. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0.6;0.7) I=1..9$

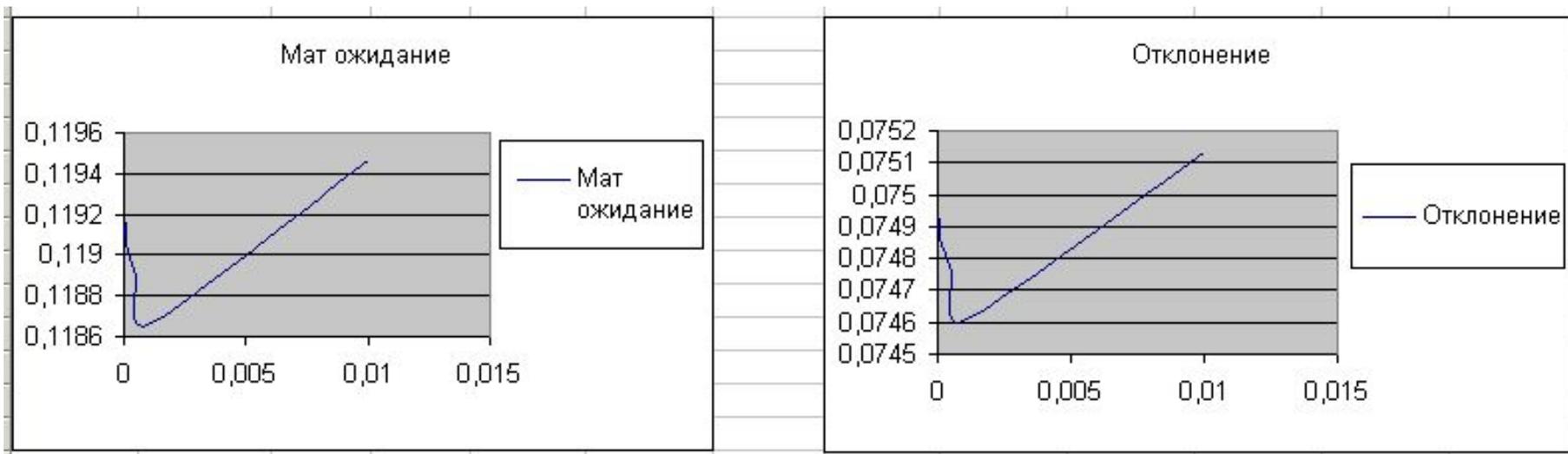


Рисунок 8. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0.7; 0.8)$   $I=1..9$

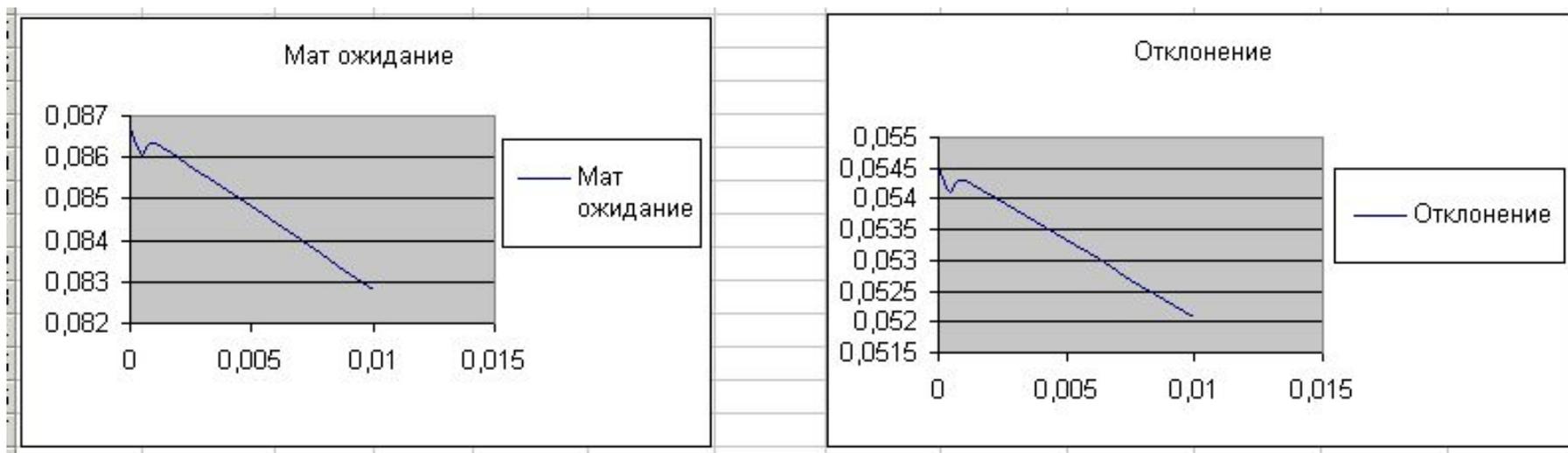


Рисунок 9. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0.8;0.9)$   $I=1..9$

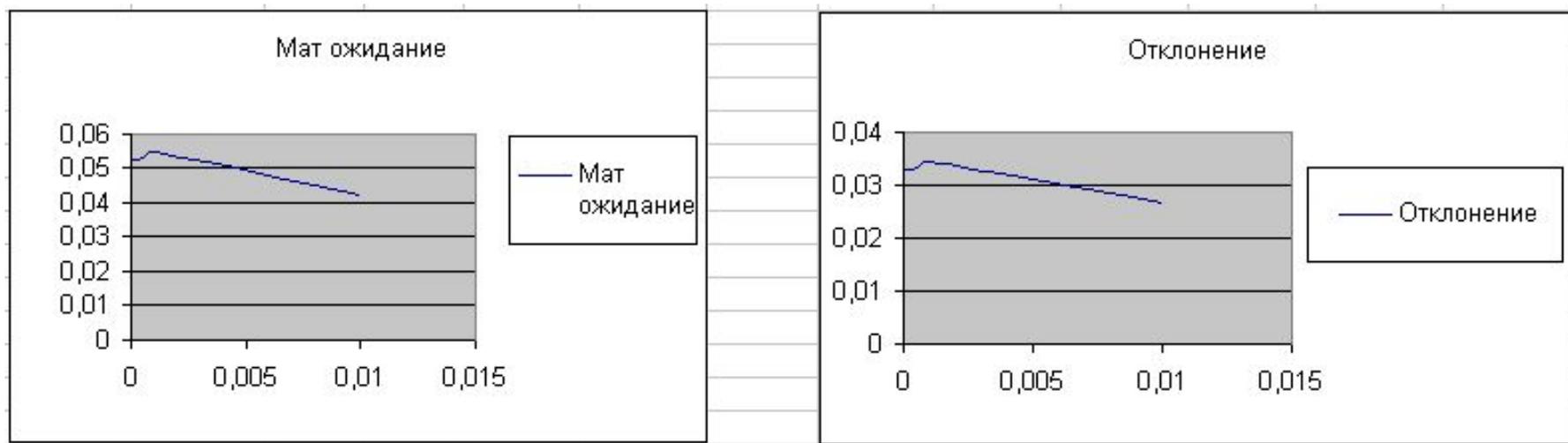


Рисунок 10. Графики зависимости математического ожидания и среднеквадратического отклонения при  $X_I \in (0.9;1)$   $I=1..9$





# Выводы

- Исследование системы на устойчивость показало, что при увеличении квалификации студентов устойчивость системы ДУ падает.
- Предположительно изменение устойчивости по грубой оценке соответствует экспоненциальному закону.
- Есть и ряд факторов, которые могут, опять же предположительно, воздействовать негативно на устойчивость. Например это использование метода Эйлера. Продолжив работу в следующем семестре, я постараюсь проинтегрировать систему методом Рунге-Кутты. И оценить устойчивость системы. Я полагаю, что картина измениться. Тогда уже можно будет говорить о конкретных выводах