Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики

Кафедра фотоники и оптоинформатики

А.В.Павлов

Интеллектуальные информационные системы

Лекция 10

НС с хаотической динамикой
(Начала теории хаоса)

Санкт-Петербург, 2007

Мозг здорового бодрствующего человека является предельно неустойчивой хаотической системой.

Без хаотической динамики невозможно обучение – мозг не может добавить в память новый образ

[*Фриман Дж.У.,* Динамика мозга в восприятии и сознании: творческая роль хаоса // В сб. «Синергетика и психология». Вып.3. "Когнитивные процессы", Издательство «Когито-Центр", 2004.].

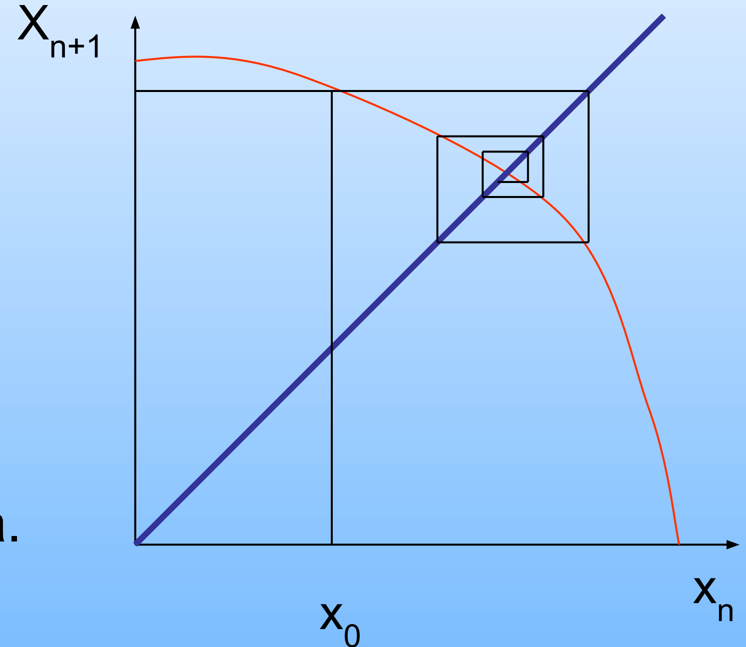
Роль хаоса в обучении

А.В.Павлов Инт. Инф. Сист

Три типа динамики – три типа аттракторов

- Устойчивая система –аттрактор с единственным глобальным минимумом, конвергентная динамика;
- Предельный цикл – циклическая динамика;
- Хаос – странный аттрактор.

Итерирующее отображение



Паутинная диаграмма

(X,d) – метрическое пространство

T:X→X сжимающее отображение, если

$\exists S,\ 0<S<1,\ \forall x,y \in X,\ d(T(x),T(y)) \le S d(x,y)$

Если $S \in (0,\infty)$, то T – отображение Липшица.

<u>Теорема о сходимости к неподвижной точке.</u>

(X,d), T – сжимающее отображение, x_f – неподвижная точка, т.е. $T(x_f)=x_f$, T(x) имеет в конечном счете одну неподвижную точку и, кроме того, $\forall x_0 \in X$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_f$, где $x_n = T(x_{n-1})$.

Свойство единственности неподвижной точки

Пусть T(x) имеет две неподвижные точки x_{f1} и x_{f2}.

Тогда по определению сжимающего отображения

$$d(T(x_{f1}),T(x_{f2}))=d(T(x_{f1}),T(x_{f2}))\leq Sd(x_{f1},x_{f2}),$$

Так как S<1, то последнее неравенство выполняется только при $x_{f1} = x_{f2}$.

Притягивающие и отталкивающие точки.

Отображение f не предполагается сжимающим, ⇒ теорема о неподвижной точке неприменима. Xf – неподвижная точка.

Разложим f в ряд Тейлора вблизи неподвижной точки

$$f(x) = f(x_f)+(x-x_f)(f'(x)).$$

По определению неподвижной точки $f(x_f)=x_f$, то следующий шаг

$$x_{n+1}=f(x_n) \Rightarrow x_{n+1}-x_n=(x_n-x_f)f'(x_f)$$

если $|f'(x_f)|>1$, то x_f - отталкивающая, т.к. с каждым шагом расстояние увеличивается, орбиты из ее окрестности расходятся;

если $|f'(x_f)|<1$, то x_f - притягивающая, т.к. с каждым шагом расстояние уменьшается, орбиты из ее окрестности сходятся.

Периодические точки

Точки ξ_1 и ξ_2 : $f(\xi_1)= \xi_2$; $f(\xi_2)= \xi_1$;

$$x_{n+1} = f\left(f\left(x_n\right)\right) = f^{(2)}\left(x_n\right)$$

Def. Последовательность $\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{f^{(n)}\left(x_0\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$

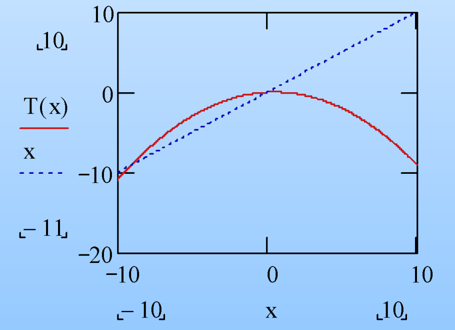
называется орбитой точки x_0.

Def. Орбита называется периодической с периодом p, если $x_{n+p}=x_n$; n=0,1,2…

Если условие периодичности $x_{n+p}=x_n$ справедливо только после некоторого $n \geq n_0$, то орбита в конечном счете периодическая.

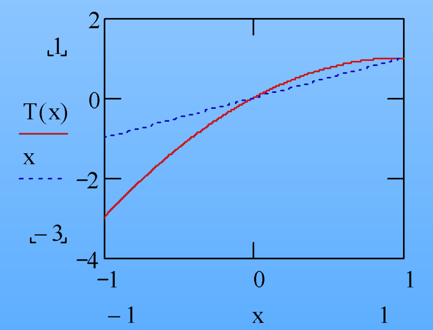
Примеры итерирующих отображений, приводящих к хаосу

- модель ограниченного роста T: $x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$ (Верхольст, 1845)



- $x_{n+1}=x_n^{\ 2}+a$

- $x_{n+1}=x_n(1+a\ (1-x_n))$



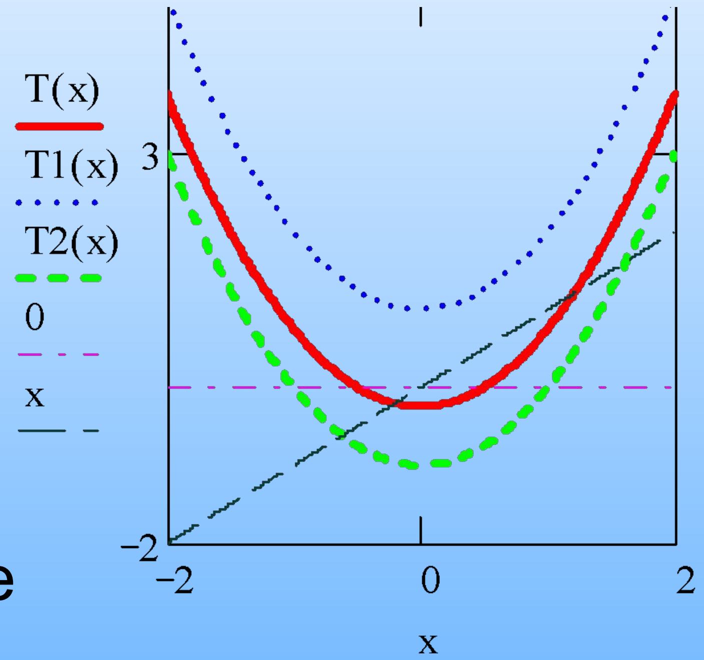
- $x_{n+1}=x_n\ \mathit{exp}(a(1-x_n))$

Отображение $T(x)=x^2+a$

Неподвижная точка - решения $x=x^2+a$, т.е.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4a}\right)$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4a}\right)$$



Неподвижная точка действительные числа, только если $1-4a \geq 0$.

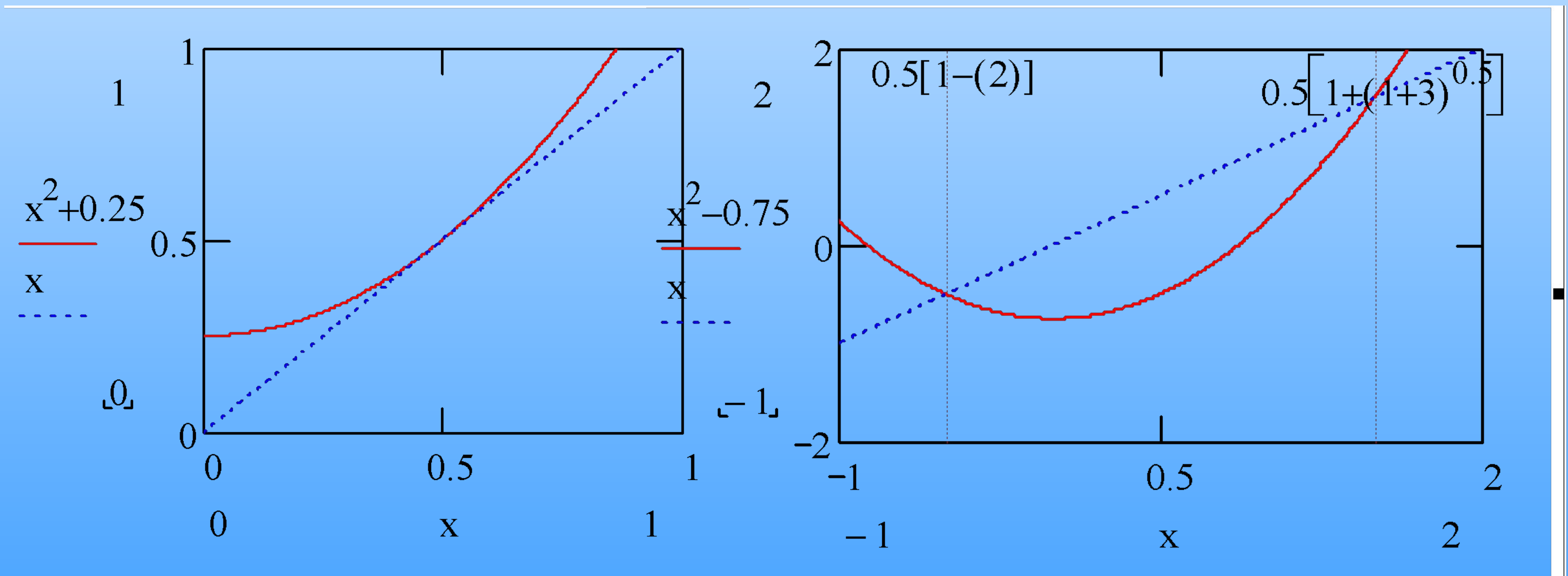
Если $a \leq 1/4$, то $\varepsilon < \eta < \varepsilon$, $T(-\varepsilon)=\varepsilon$.

Для $x_0 > \varepsilon$ и $x_0 < \varepsilon$ орбиты стремятся к ∞.

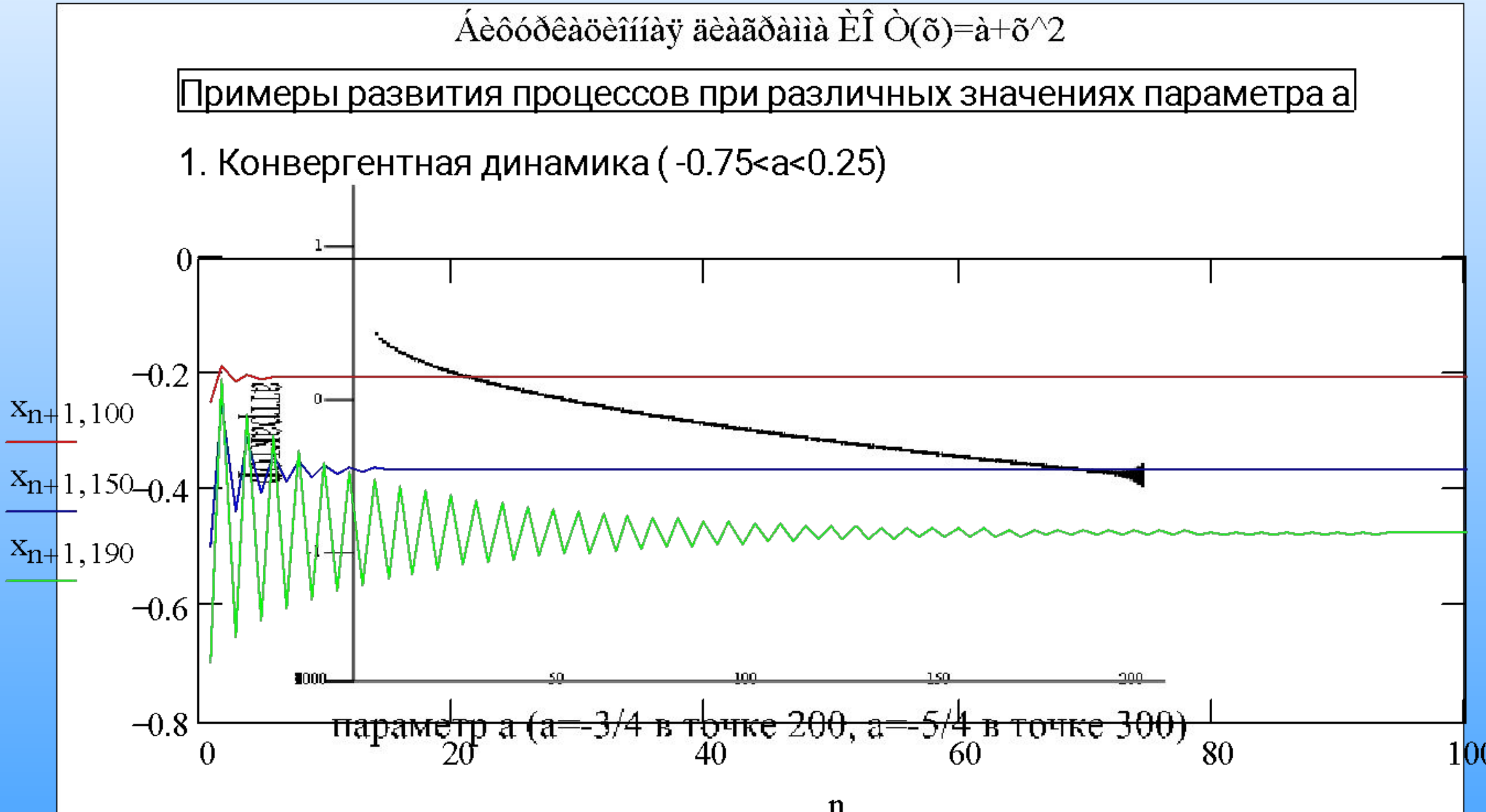
$T(x)=x^2+a$

Пусть I≡[-ε,ε], если -2≤a≤1/4 и x_0∈I, то $T(x_0)$∈I.

<u>–3/4<a<1/4 .</u> ⇒ |T'(η)|=|1-(1-4a)1/2|<1 ⇒ Неподвижная точка притягивающая все орбиты с x_0∈I сходятся к η.



Зависимость значения неподвижной точки от значения параметра а в диапазоне **–3/4<a<1/4**

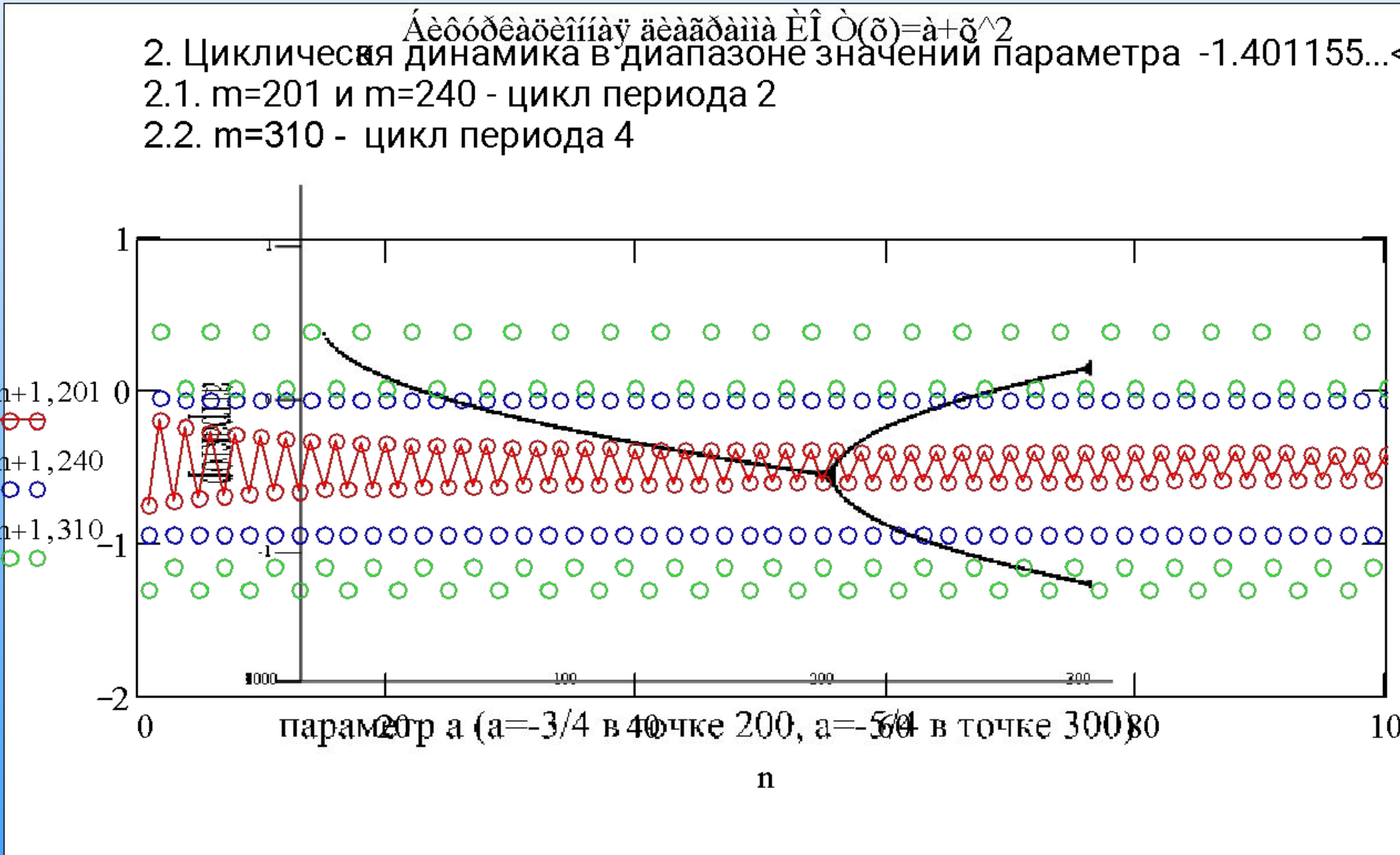


Неподвижная точка устойчива (а=-3/4 при m=200)

x

-5/4 < a < –3/4. ⇒ $|T'(\eta)|>1$ ⇒ Неподвижная точка η отталкивающая. В то же время, $T^{(2)}$ доставляет пару притягивающих точек, приводящих к появлению цикла с периодом 2.

a = –3/4 – точка бифуркации

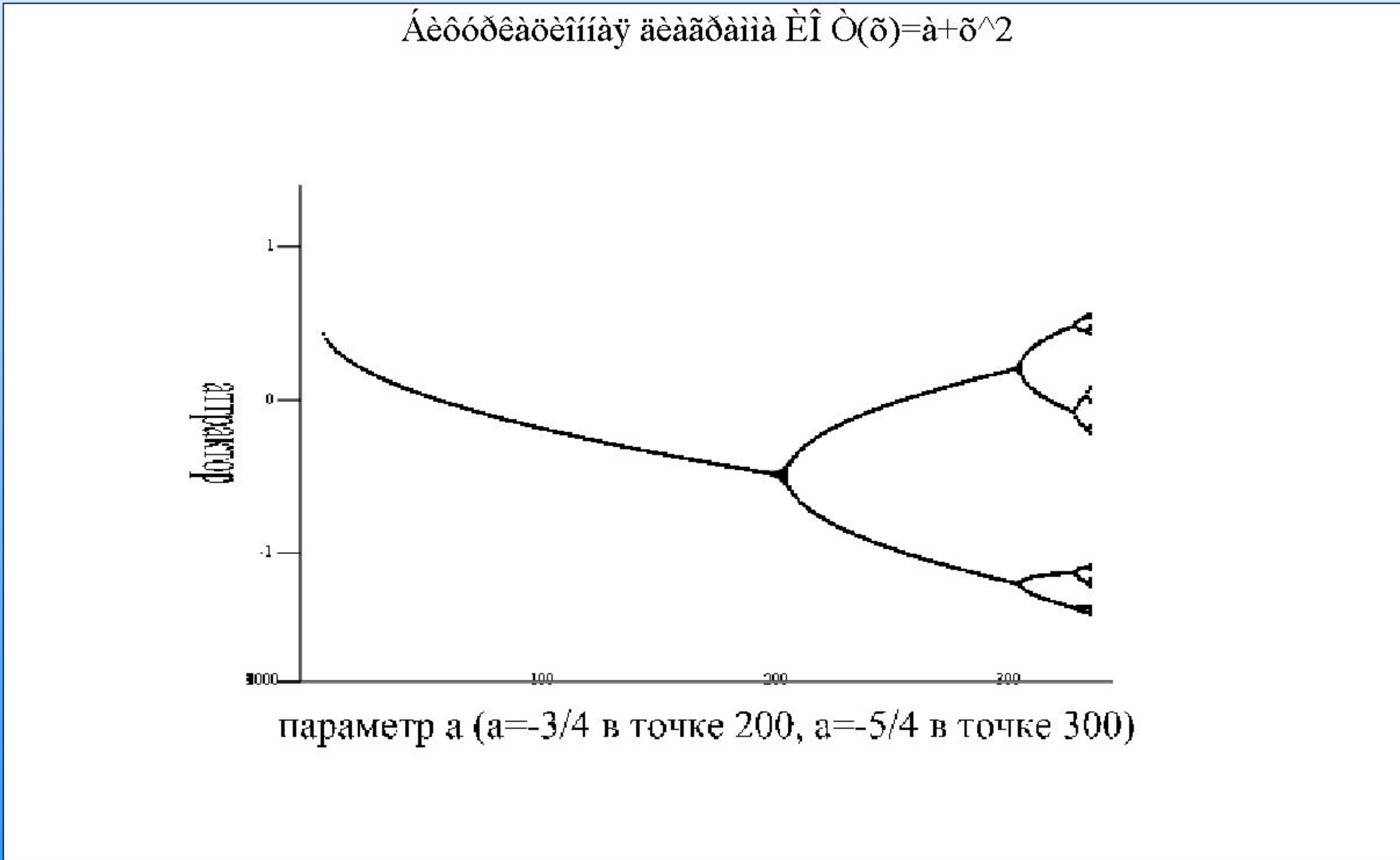


a=-5/4 – снова бифуркация удвоения периода –цикл с периодом 4.

На рисунке диаграмма для значений 0 < a < -1,4

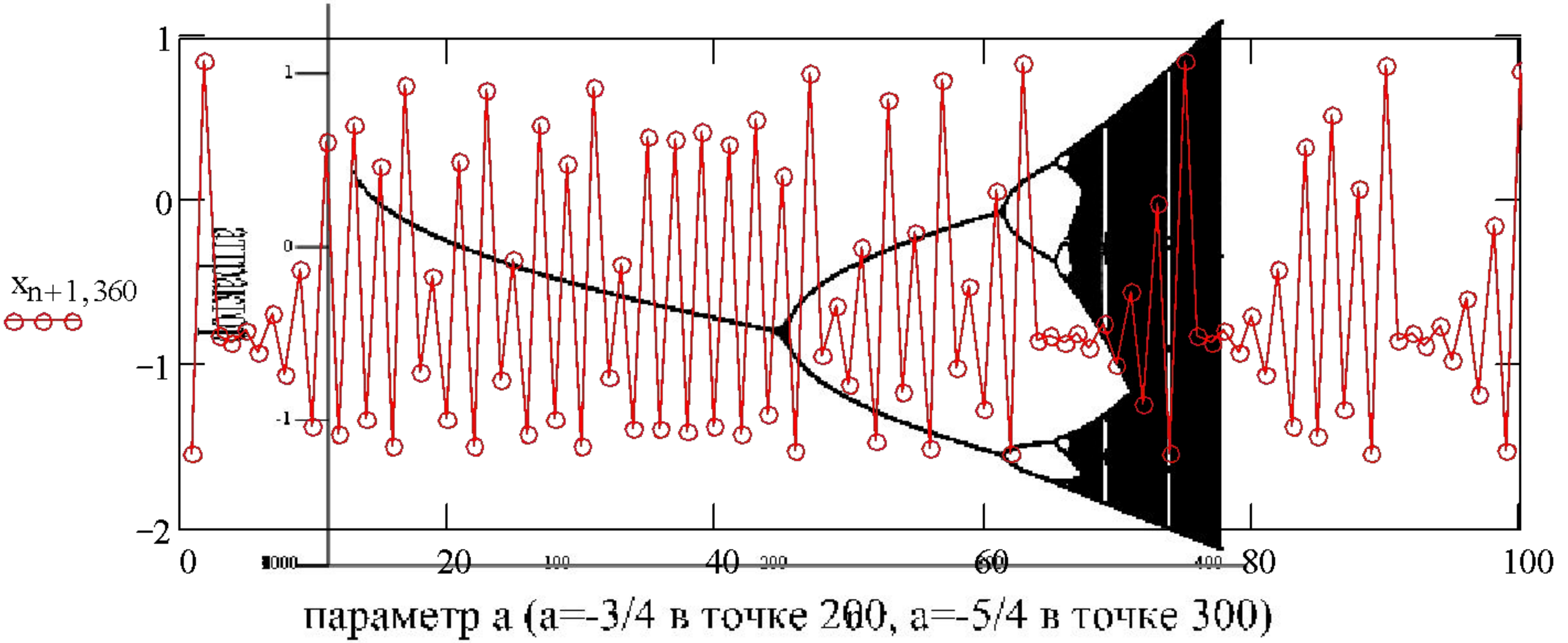
При a=-2, ε=2, I=[-2,2], y=x пересекает график $T^{(n)}(x)$ точно 2^n раз, каждая точка периодическая с периодом n

⇒ существуют периодические орбиты с p=2,3.4,…n



Áèôóðêàöèîííàÿ äèàãðàììà ÈÎ Ò(õ)=à+õ^2

3. Хаотическая динамика в диапазоне значений параметра а<1.401155... :



x

Точка Фейгенбаума

$a_\infty = lim\, a_n = -1.401155\ldots$, где a_n – значения точек бифуркаций.

$\frac{1}{4} < a < a_\infty$ - удвоение периода

$a_\infty < a$ – область хаоса

в окрестности $a=-1.7548777\ldots$ - окно периода 3.

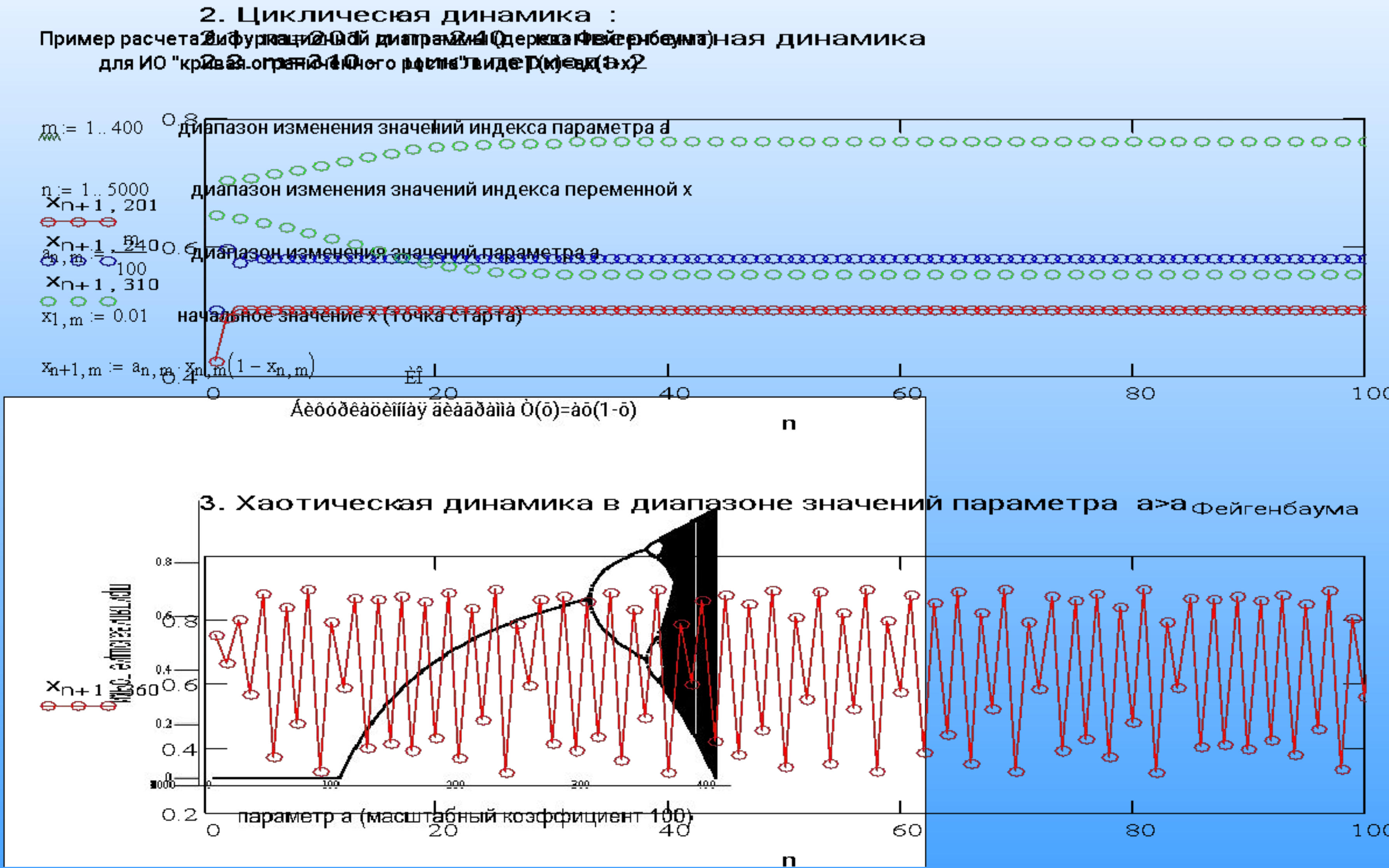
Отношение длин интервалов между точками бифуркаций имеет предел

$$d = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.669162\ldots$$

-постоянная Фейгенбаума.

Если значения a_∞ для разных ф-ций разные, то значение d одно для очень многих ф-ций.

Пример построения бифуркационной диаграммы для ИО «кривая ограниченного роста»



А.В.Павлов Инт. Инф. Сист

Определение хаоса

Пусть (X,d) метрическое пространство. Отображение $T:X\rightarrow X$ называется хаотическим, если:

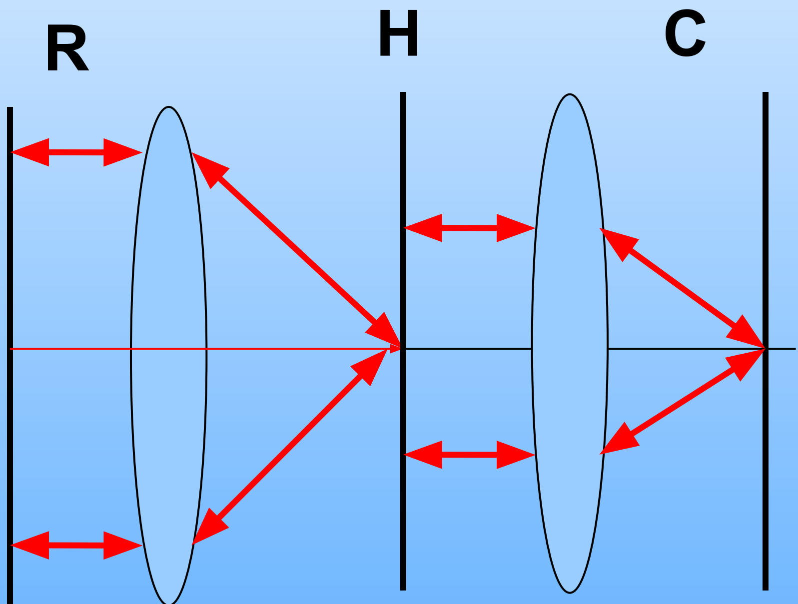
1. T обладает существенной зависимостью от начальных условий, а именно: (X,d), $x\in X$, U – открытое мн-во, $x\in U$, для $\delta>0$ $\exists n>0$ и $(\cdot)y\in U$, что $d(T^{(n)}(x),T^{(n)}y))>\delta$;

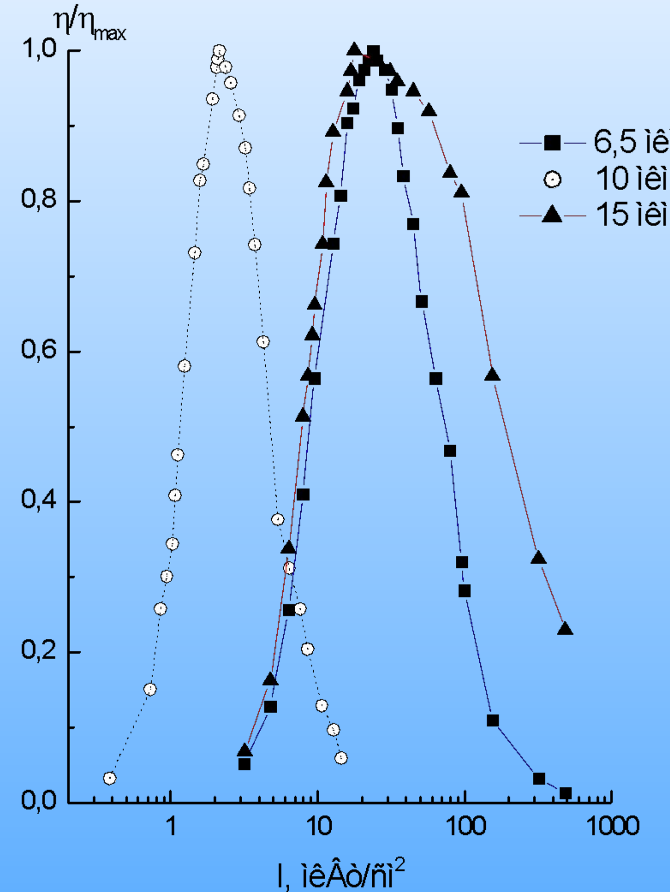
2. T транзитивно, т.е. для $\forall U,V$ – открытых мн-в $\exists n\geq 0$ такое, что $T^{(n)}(U)\wedge V\neq\varnothing$;

3. Периодические точки плотны в X, т.е. в любой окрестности $\forall$ точки в X существует по крайней мере одна периодическая точка и, следовательно, бесконечное множество периодических точек.

Это – строгий хаос. Строго говоря, условие (1) избыточно, т.к. оно следует из 2 и 3.

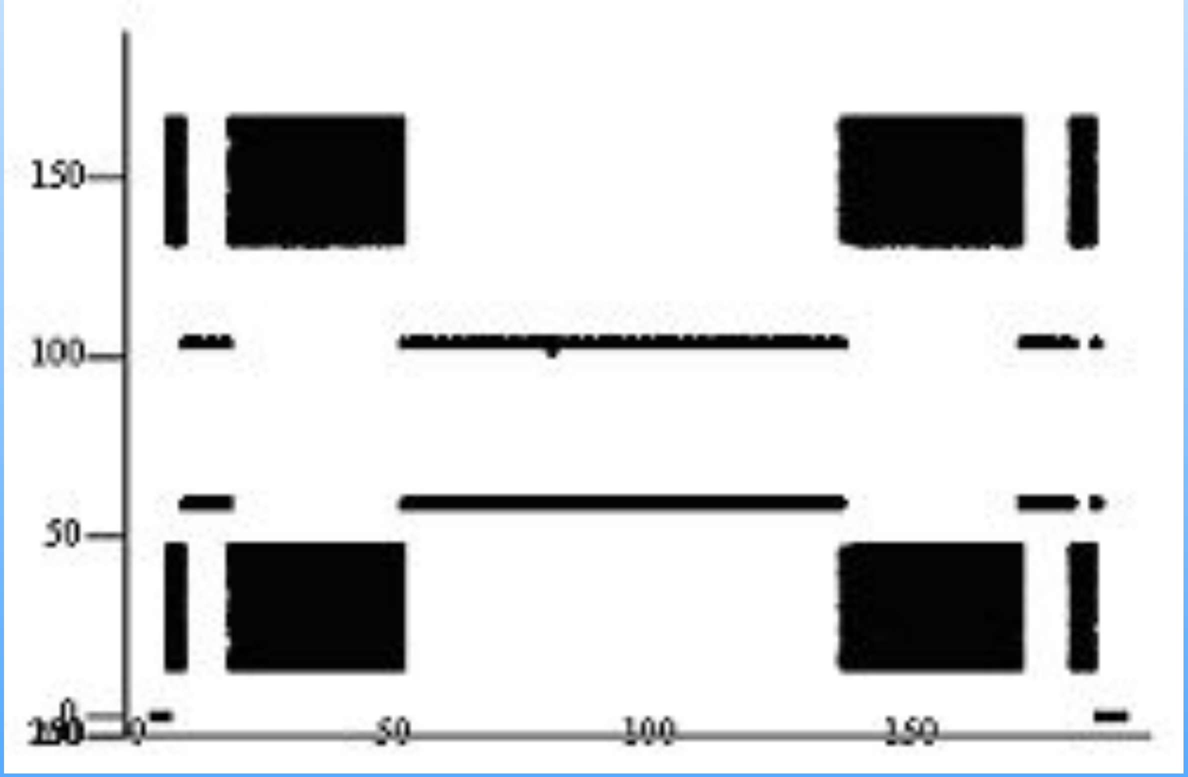
Реализация сценария Фейгенбаума в голографической схеме

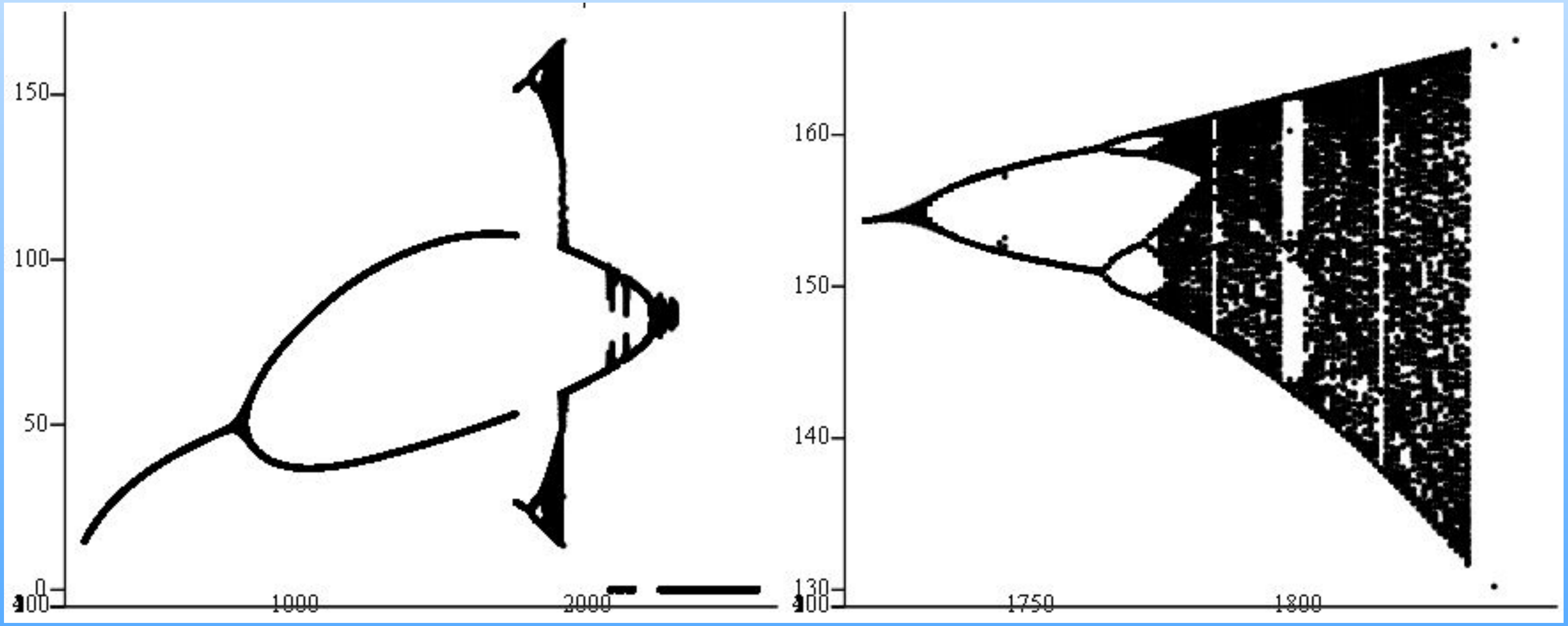


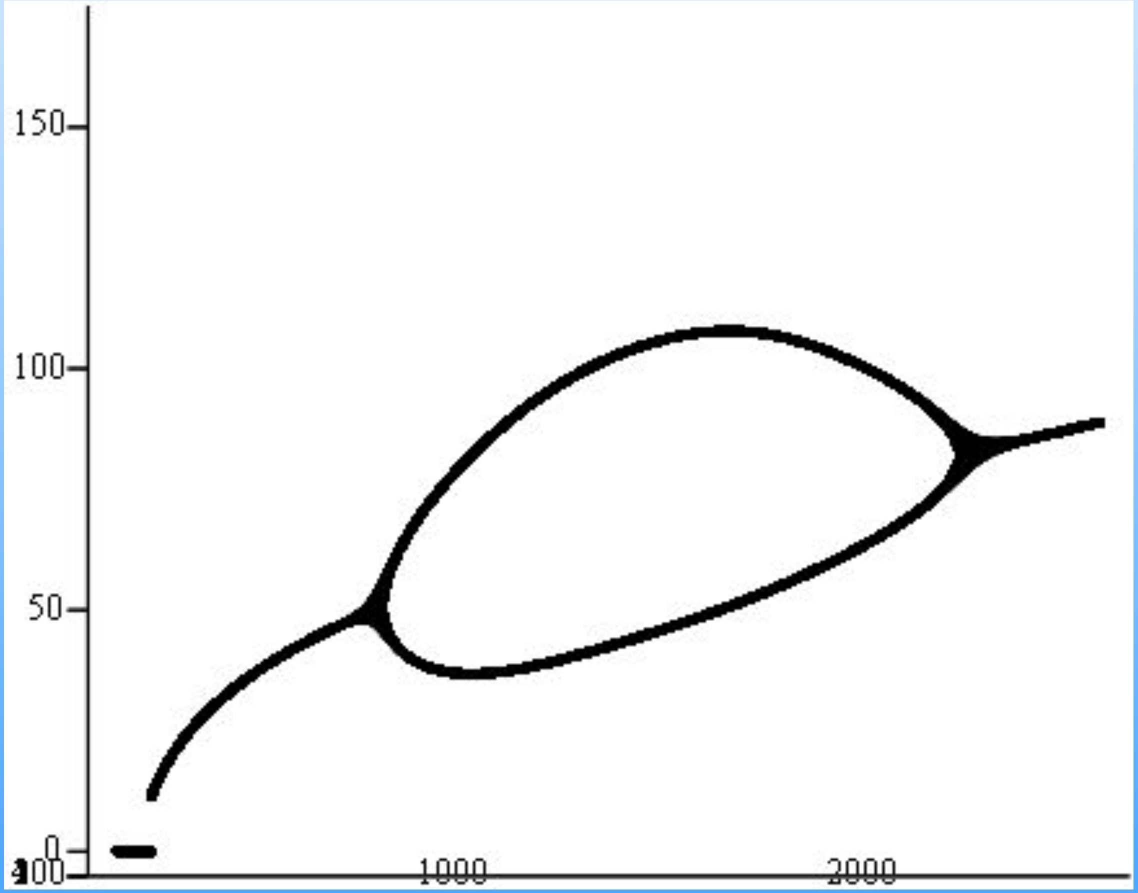


Амосова Л.П., Плетнева Н.И., Чайка А.Н., «Нелинейный режим реверсивной записи голограмм на структурах фотопроводник - жидкий кристалл с высокой чувствительностью к излучению He-Ne лазера// Оптический журнал, 2005, т.72, №6, с.57-62.

Сходимость процесса в зависимости от точки старта




150
100
50
0
100
1000
2000
160
150
140
130
100
1750
1800


150
100
50
0
400
1000
2000