

Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики



Кафедра фотоники и оптоинформатики

А.В.Павлов

Интеллектуальные информационные системы

Лекция 10

НС с хаотической динамикой (Начала теории хаоса)

Мозг здорового бодрствующего человека является предельно неустойчивой хаотической системой.

Без хаотической динамики невозможно обучение – мозг не может добавить в память новый образ

[Фриман Дж.У., Динамика мозга в восприятии и сознании: творческая роль хаоса // В сб. «Синергетика и психология». Вып.3. "Когнитивные процессы", Издательство «Когито-Центр», 2004.].

Роль хаоса в обучении



Три типа динамики – три типа аттракторов

- Устойчивая система – аттрактор с единственным глобальным минимумом, конвергентная динамика;
- Предельный цикл – циклическая динамика;
- Хаос – странный аттрактор.

Итерировующее отображение

(X, d) – метрическое пространство

$T: X \rightarrow X$ сжимающее отображение, если

$$\exists S, 0 < S < 1, \forall x, y \in X, d(T(x), T(y)) \leq Sd(x, y)$$

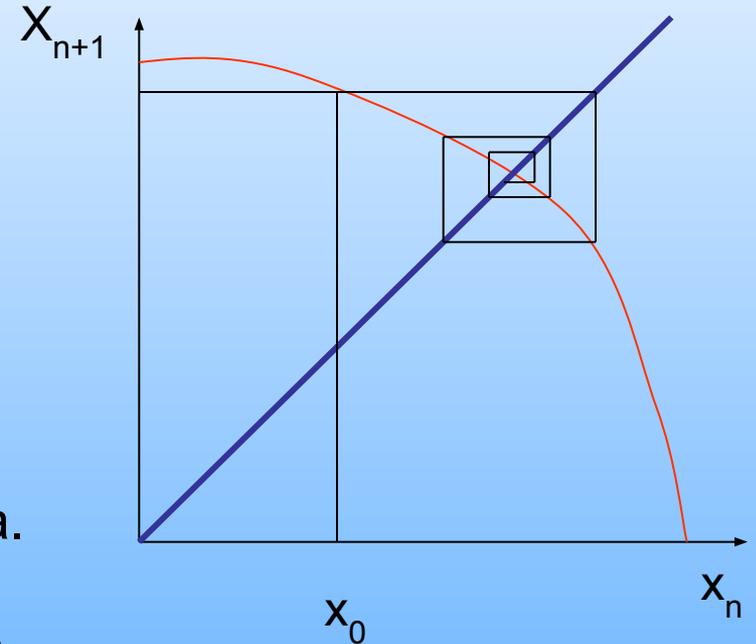
Если $S \in (0, \infty)$, то T – отображение Липшица.

Теорема о сходимости к неподвижной точке.

(X, d) , T – сжимающее отображение, x_f – неподвижная точка, т.е. $T(x_f) = x_f$,
 $T(x)$ имеет в конечном счете одну неподвижную точку и, кроме того,

$$\forall x_0 \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_f, \text{ где } x_n = T(x_{n-1}).$$

$$n \rightarrow \infty$$



Паутинная диаграмма

Свойство единственности неподвижной точки

Пусть $T(x)$ имеет две неподвижные точки x_{f1} и x_{f2} .

Тогда по определению сжимающего отображения

$$d(T(x_{f1}), T(x_{f2})) = d(x_{f1}, x_{f2}) \leq S d(x_{f1}, x_{f2}),$$

Так как $S < 1$, то последнее неравенство выполняется только при $x_{f1} = x_{f2}$.

Притягивающие и отталкивающие точки.

Отображение f не предполагается сжимающим, \Rightarrow теорема о неподвижной точке неприменима. x_f – неподвижная точка.

Разложим f в ряд Тейлора вблизи неподвижной точки

$$f(x) = f(x_f) + (x - x_f)(f'(x)).$$

По определению неподвижной точки $f(x_f) = x_f$, то следующий шаг

$$x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow x_{n+1} - x_n = (x_n - x_f)f'(x_f)$$

если $|f'(x_f)| > 1$, то x_f - отталкивающая, т.к. с каждым шагом расстояние увеличивается, орбиты из ее окрестности расходятся;

если $|f'(x_f)| < 1$, то x_f - притягивающая, т.к. с каждым шагом расстояние уменьшается, орбиты из ее окрестности сходятся.

Периодические точки

Точки ξ_1 и ξ_2 : $f(\xi_1) = \xi_2$; $f(\xi_2) = \xi_1$;

$$x_{n+1} = f(f(x_n)) = f^{(2)}(x_n)$$

Def. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f^{(n)}(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$

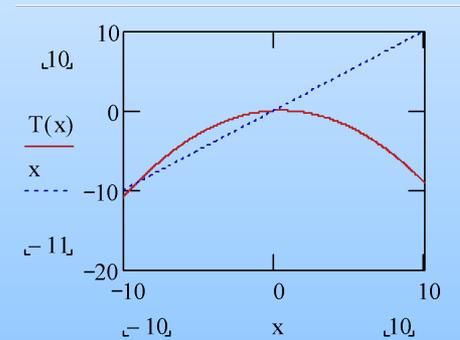
называется орбитой точки x_0 .

Def. Орбита называется периодической с периодом p , если $x_{n+p} = x_n$; $n=0, 1, 2, \dots$

Если условие периодичности $x_{n+p} = x_n$ справедливо только после некоторого $n \geq n_0$, то орбита в конечном счете периодическая.

Примеры итерирующих отображений, приводящих к хаосу

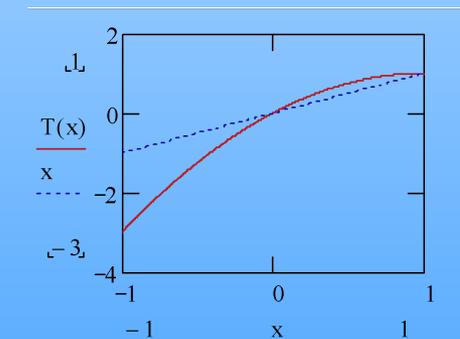
- модель ограниченного роста $T: x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ (Верхольст, 1845)



- $x_{n+1} = x_n^2 + a$

- $x_{n+1} = x_n(1+a(1-x_n))$

- $x_{n+1} = x_n \exp(a(1-x_n))$



Отображение $T(x)=x^2+a$

Неподвижная точка -
решения $x=x^2+a$, т.е.

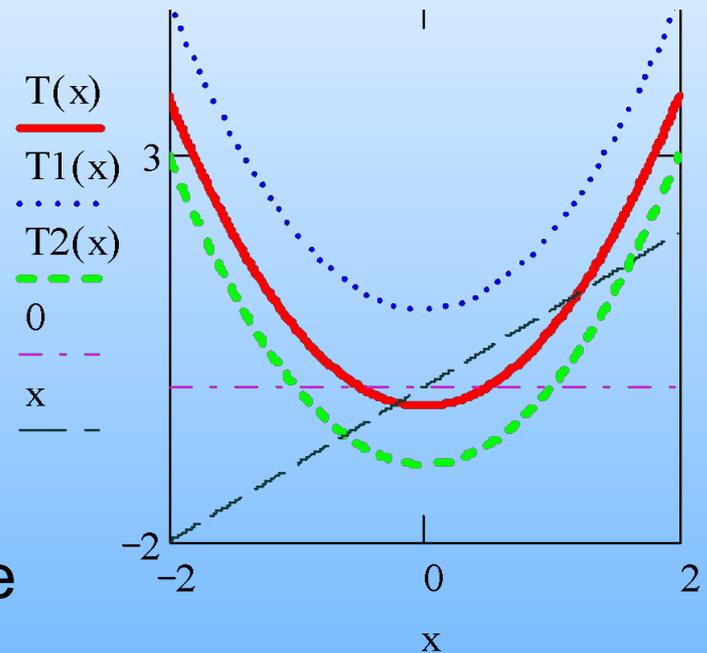
$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4a})$$

$$\eta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4a})$$

Неподвижная точка действительные
числа, только если $1-4a \geq 0$.

Если $a \leq 1/4$, то $\varepsilon < \eta < \varepsilon$, $T(-\varepsilon) = \varepsilon$.

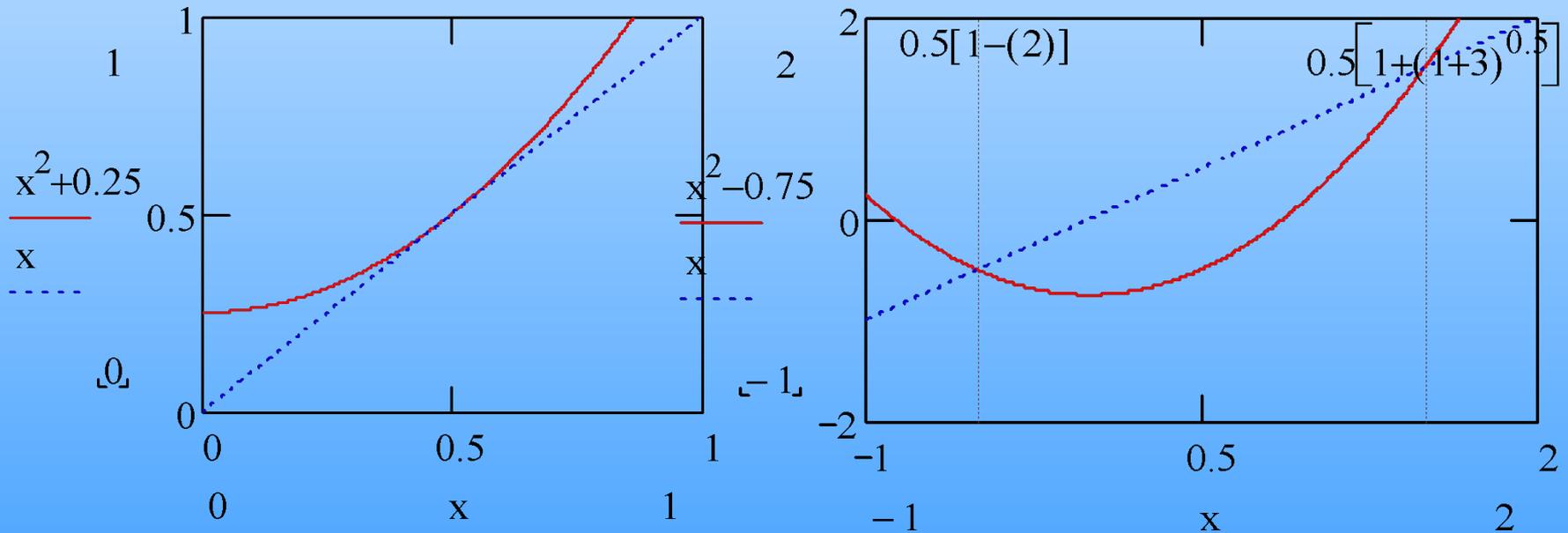
Для $x_0 > \varepsilon$ и $x_0 < \eta$ орбиты стремятся к ∞ .



$$T(x) = x^2 + a$$

Пусть $I \equiv [-\varepsilon, \varepsilon]$, если $-2 \leq a \leq 1/4$ и $x_0 \in I$, то $T(x_0) \in I$.

$-3/4 < a < 1/4$ $\Rightarrow |T'(\eta)| = |1 - (1 - 4a)^{1/2}| < 1 \Rightarrow$ неподвижная точка притягивающая все орбиты с $x_0 \in I$ сходится к η .

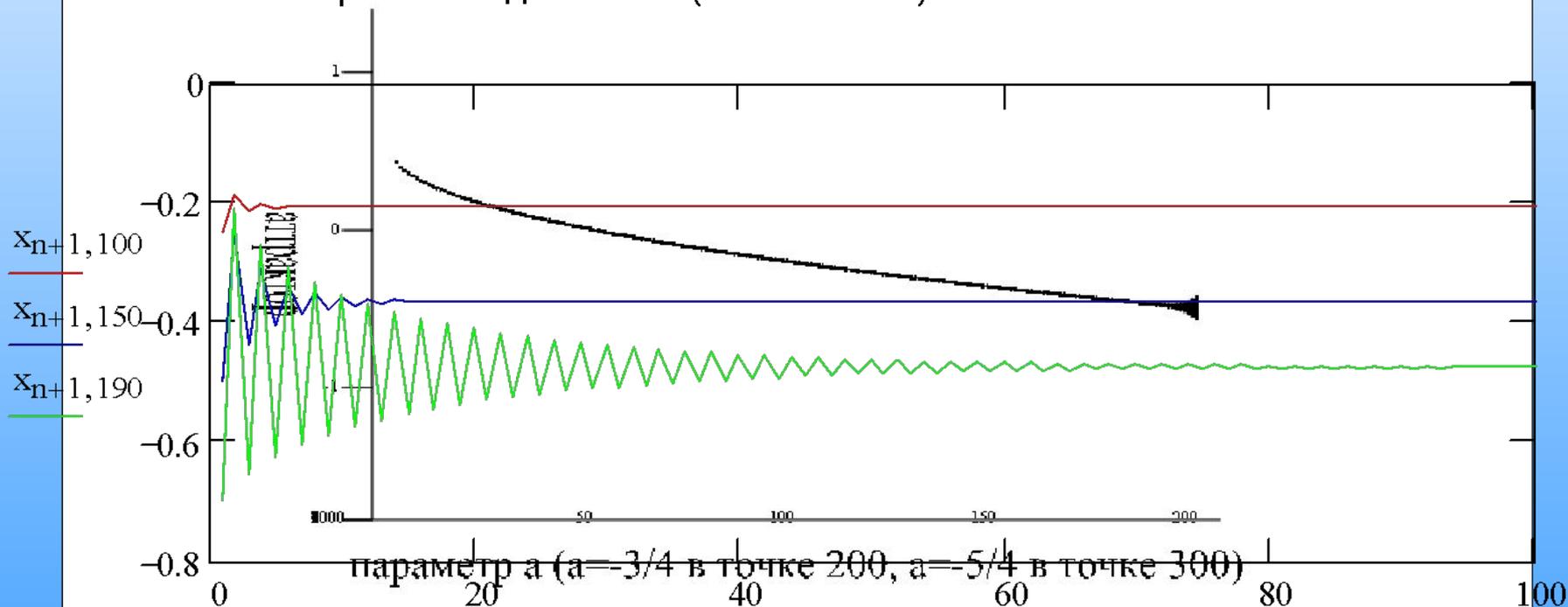


Зависимость значения неподвижной точки от значения параметра a в диапазоне $-3/4 < a < 1/4$

$$\text{Àèðóðèàöèííàü äèãðàíà ÈÍ Ò(ð)=à+ð^2$$

Примеры развития процессов при различных значениях параметра a

1. Конвергентная динамика ($-0.75 < a < 0.25$)

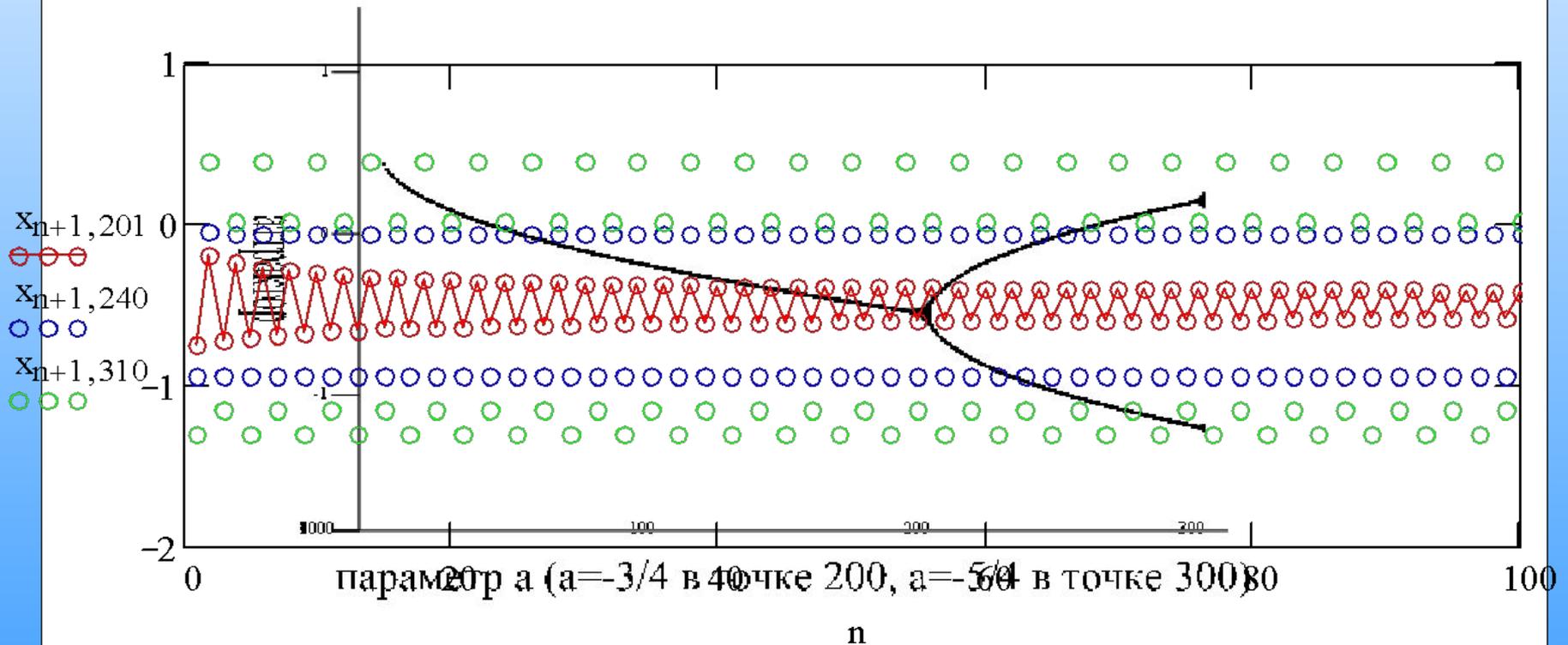


Неподвижная точка устойчива ($a^n = -3/4$ при $m=200$)

$-5/4 < a < -3/4$. $\Rightarrow |T'(\eta)| > 1 \Rightarrow$ Неподвижная точка η отталкивающая. В то же время, $T^{(2)}$ доставляет пару притягивающих точек, приводящих к появлению цикла с периодом 2.

$a = -3/4$ – точка бифуркации

2. Циклическая динамика в диапазоне значений параметра $-1.401155... < a < -0.7$
 2.1. $m=201$ и $m=240$ - цикл периода 2
 2.2. $m=310$ - цикл периода 4



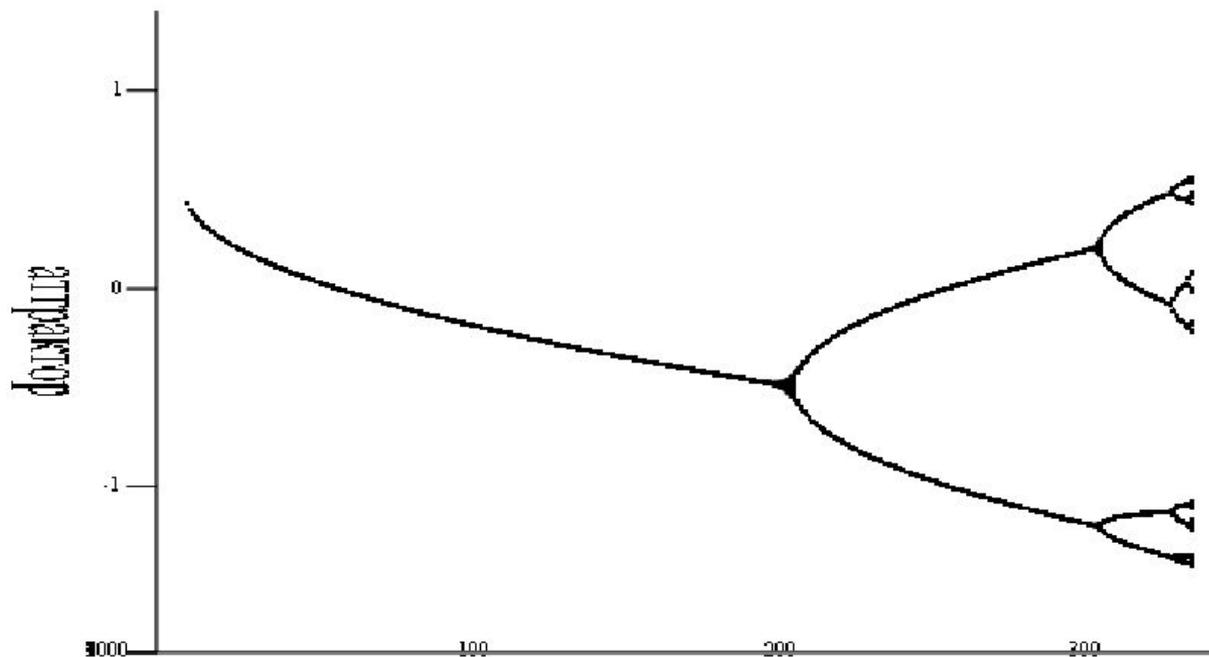
$a = -5/4$ – снова бифуркация удвоения периода – цикл с периодом 4.

На рисунке диаграмма для значений $0 < a < -1,4$

При $a = -2$, $\varepsilon = 2$, $I = [-2, 2]$, $y = x$ пересекает график $T^{(n)}(x)$ точно 2^n раз, каждая точка периодическая с периодом n

⇒ существуют периодические орбиты с $p = 2, 3, 4, \dots, n$

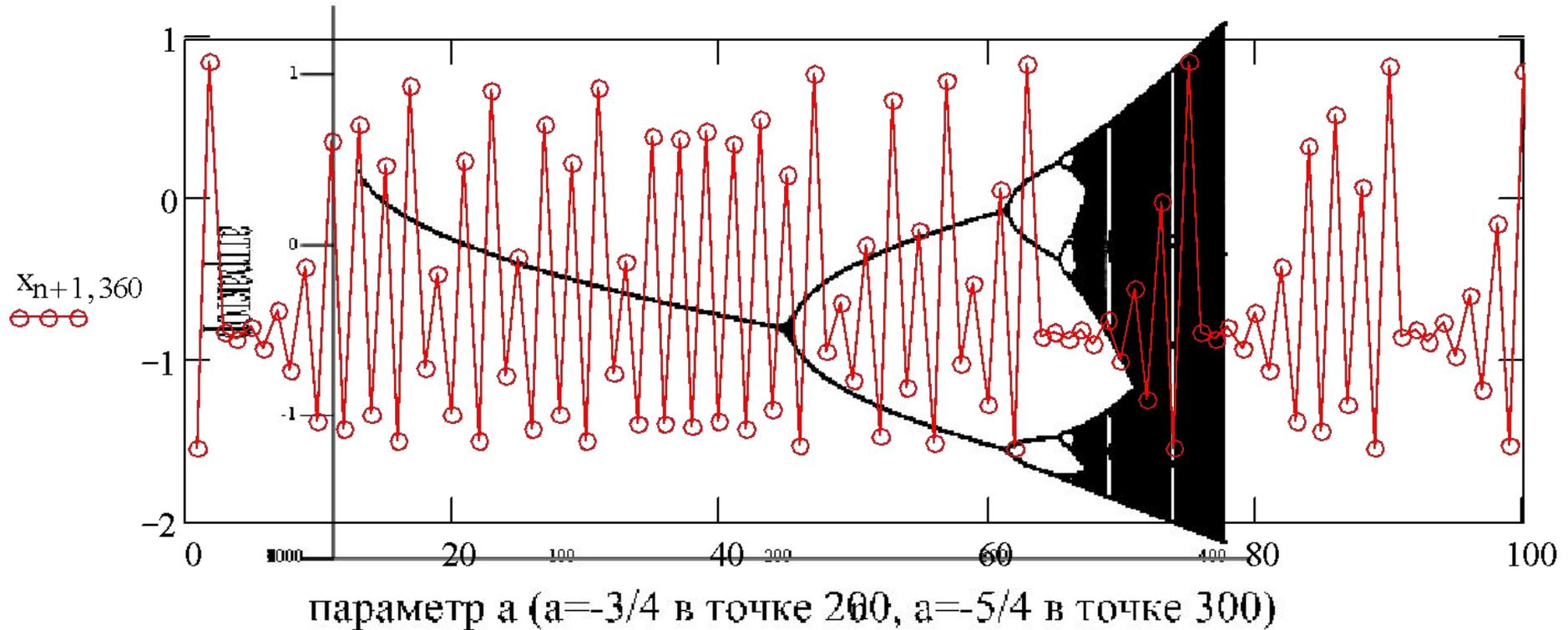
$$\hat{E} \hat{I} \hat{O}(\delta) = \hat{a} + \delta^2$$



параметр a ($a = -3/4$ в точке 200, $a = -5/4$ в точке 300)

$$x_{n+1} = ax_n + \delta x_n^2$$

3. Хаотическая динамика в диапазоне значений параметра $a < 1.401155\dots$:



Точка Фейгенбаума

$a_\infty = \lim a_n = -1.401155\dots$, где a_n – значения точек бифуркаций.

$\frac{1}{4} < a < a_\infty$ - удвоение периода

$a_\infty < a$ – область хаоса

в окрестности $a = -1.7548777\dots$ - окно периода 3.

Отношение длин интервалов между точками бифуркаций имеет предел

$$d = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.669162\dots$$

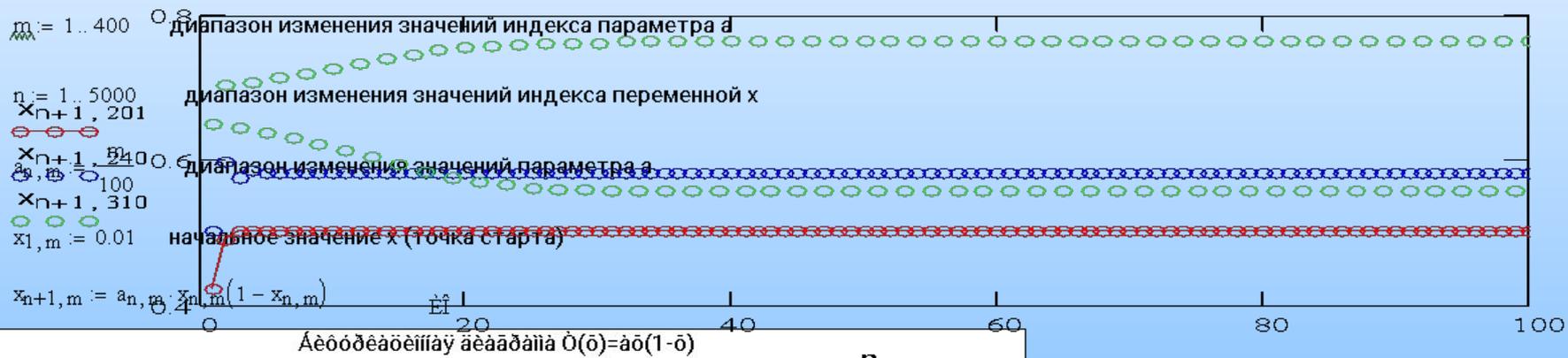
-постоянная Фейгенбаума.

Если значения a_∞ для разных ф-ций разные, то значение d одно для очень многих ф-ций.

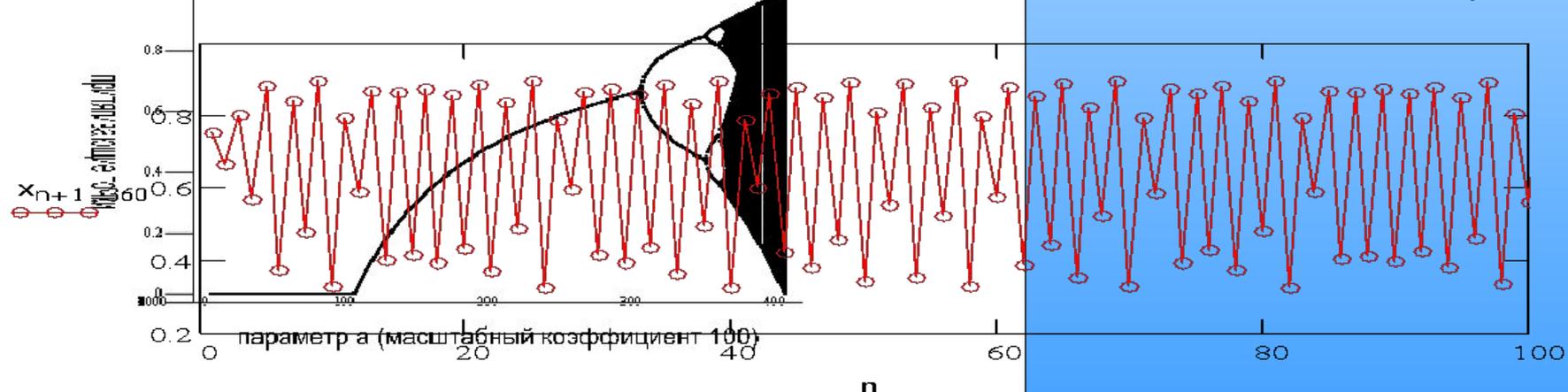
Пример построения бифуркационной диаграммы для ИО «кривая ограниченного роста»

2. Циклическая динамика :

Пример расчета бифуркационной диаграммы (дерево Фейгенбаума) для ИО "кривая ограниченного роста" в виде $x_{n+1} = a_n \cdot x_n(1-x_n)$



3. Хаотическая динамика в диапазоне значений параметра $a > a_{\text{Фейгенбаума}}$



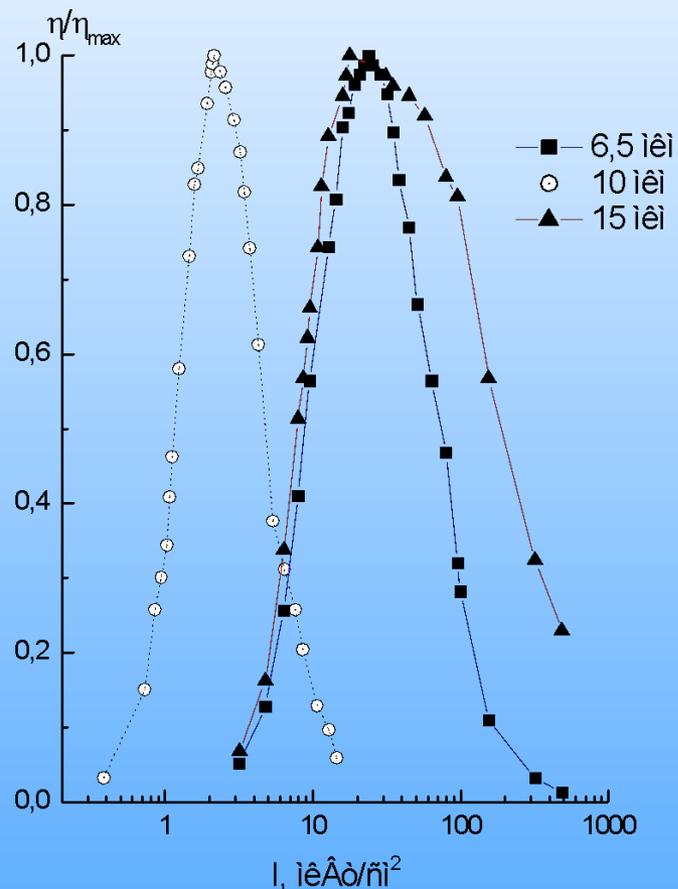
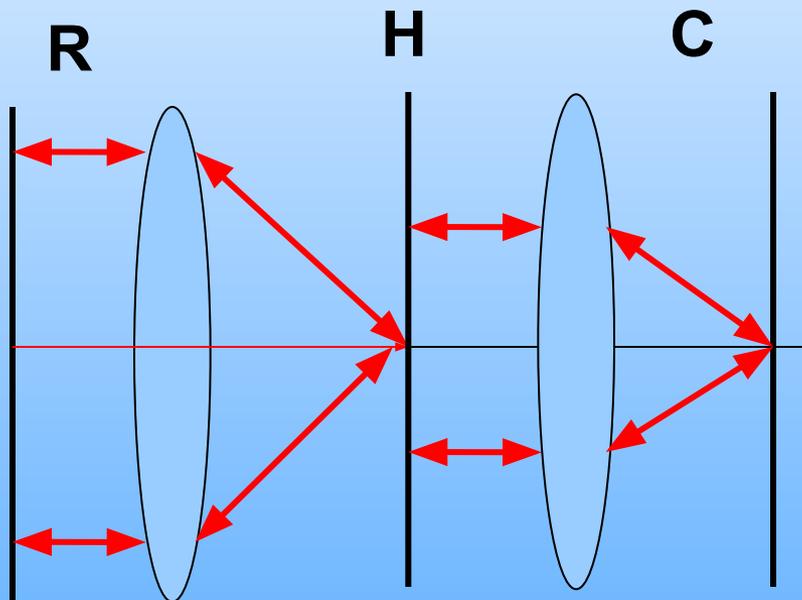
Определение хаоса

Пусть (X,d) метрическое пространство. Отображение $T:X \rightarrow X$ называется хаотическим, если:

1. T обладает существенной зависимостью от начальных условий, а именно: (X,d) , $x \in X$, U – открытое мн-во, $x \in U$, для $\delta > 0 \exists n > 0$ и $(\cdot)y \in U$, что $d(T^{(n)}(x), T^{(n)}y) > \delta$;
2. T транзитивно, т.е. для $\forall U, V$ – открытых мн-в $\exists n \geq 0$ такое, что $T^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$;
3. Периодические точки плотны в X , т.е. в любой окрестности \forall точки в X существует по крайней мере одна периодическая точка и, следовательно, бесконечное множество периодических точек.

Это – строгий хаос. Строго говоря, условие (1) избыточно, т.к. оно следует из 2 и 3.

Реализация сценария Фейгенбаума в голографической схеме

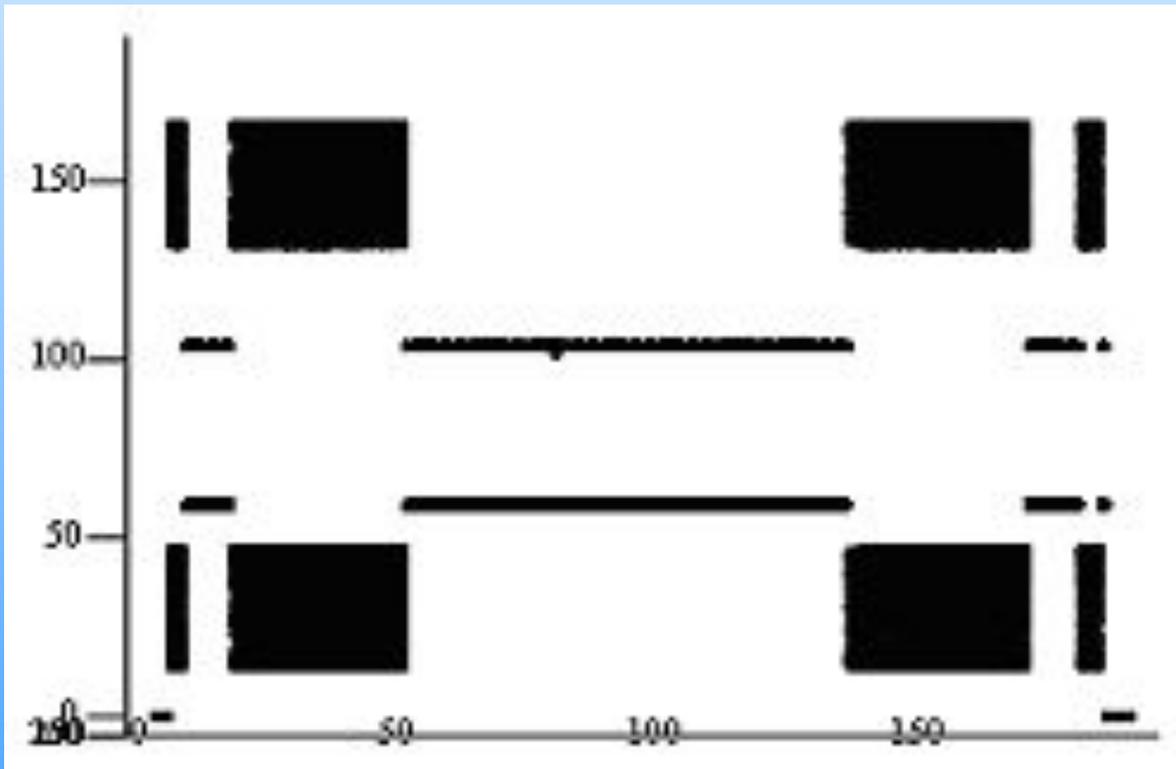


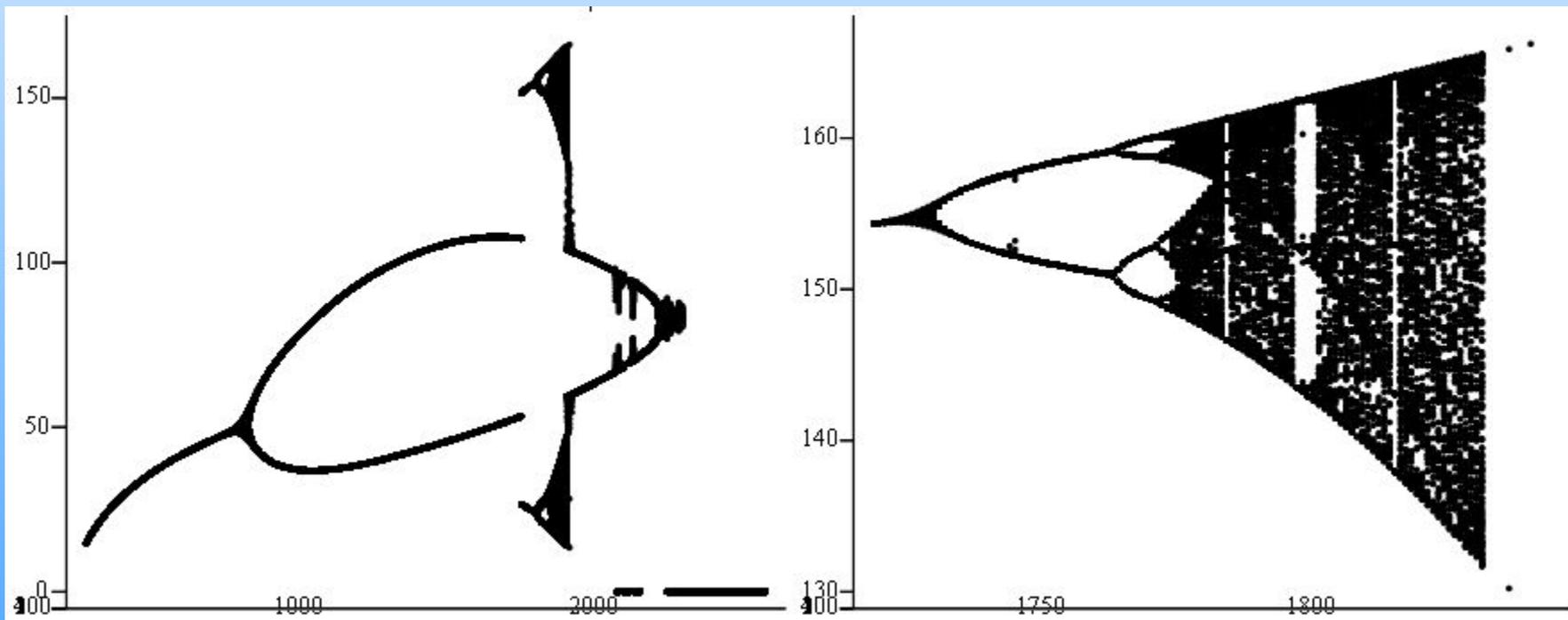
Амосова Л.П., Плетнева Н.И., Чайка А.Н., «Нелинейный режим реверсивной записи голограмм на структурах фотопроводник - жидкий кристалл с высокой чувствительностью к излучению He-Ne лазера// Оптический журнал, 2005, т.72, №6, с.57-62.

А.В.Павлов Инт. Инф.

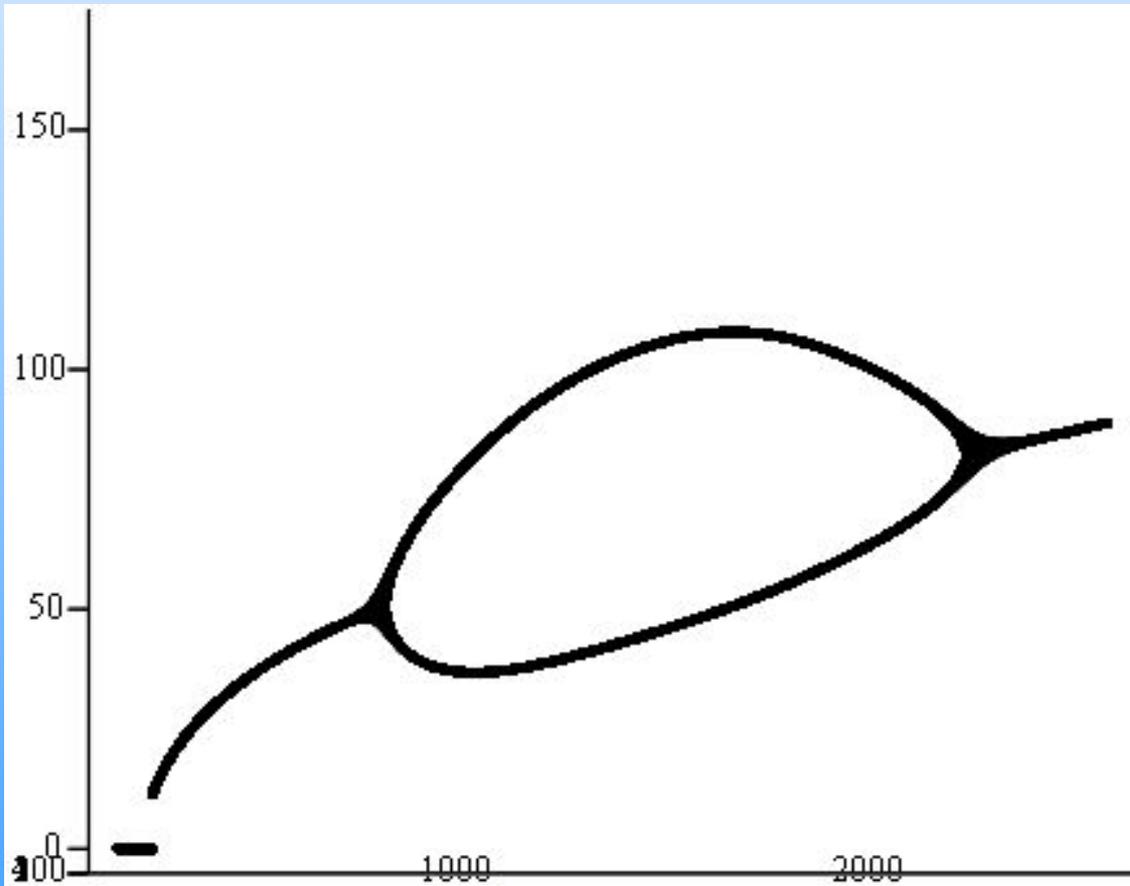
Сист

Сходимость процесса в зависимости от точки старта





А.В.Павлов Инт. Инф.
Сист



А.В.Павлов Инт. Инф.
Сист