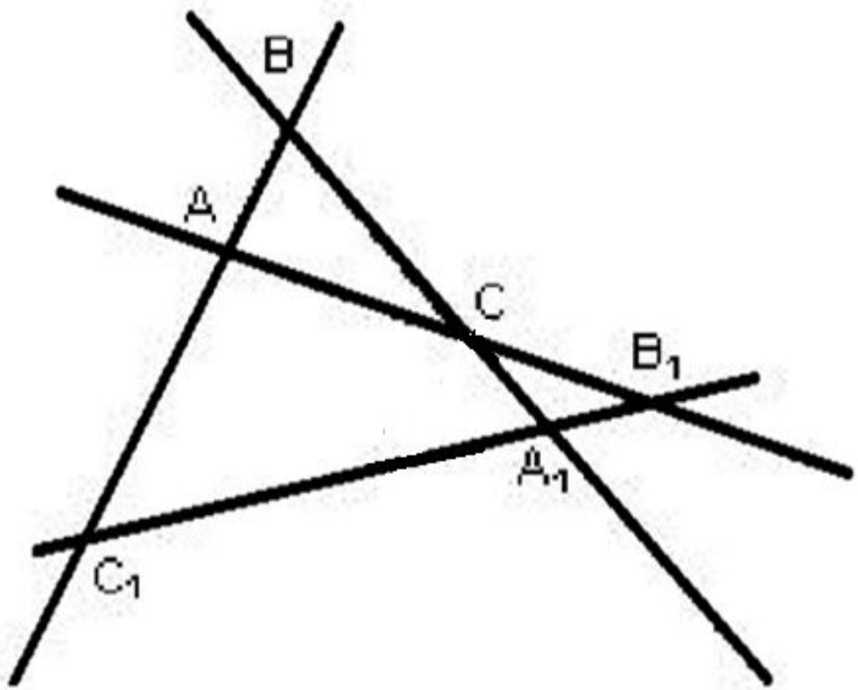
ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

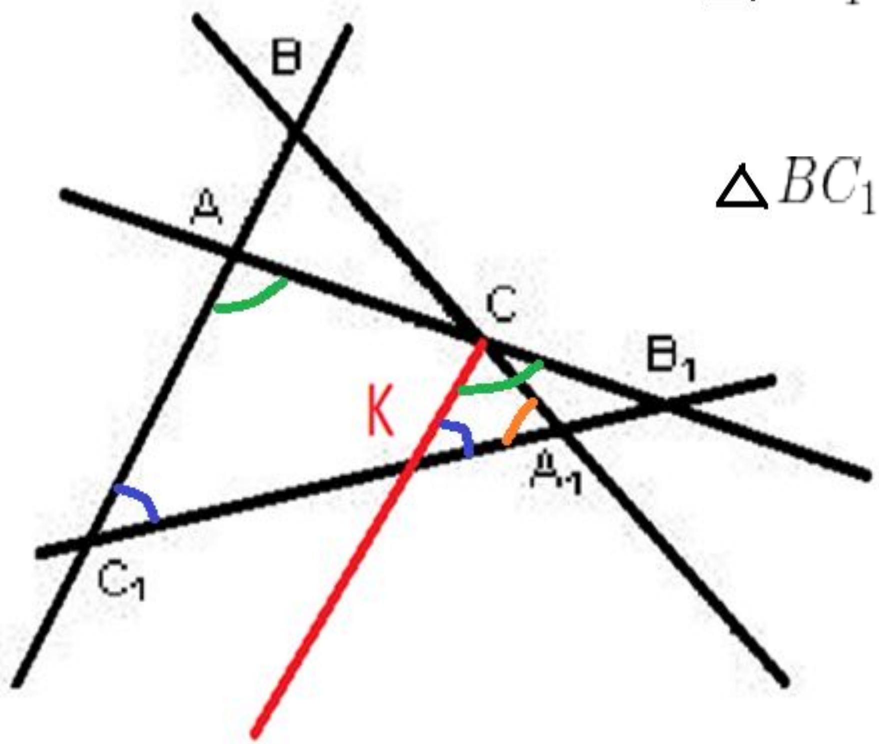
ПРЯМАЯ ТЕОРЕМА

Пусть дан треугольник ABC, точки A1,B1,C1 лежат на продолжениях сторон BC, AC и AB соответственно. Если точки A1,B1,C1 лежат на одной прямой тогда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$



Доказательство



$\triangle AC_1B_1$ и $\triangle CKB_1$: $\dfrac{AC_1}{CK} = \dfrac{B_1A}{B_1C}.$

$\triangle BC_1A_1$ и $\triangle CKA_1$: $\dfrac{C_1B}{CK} = \dfrac{BA_1}{A_1C}.$

$$CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1},$$

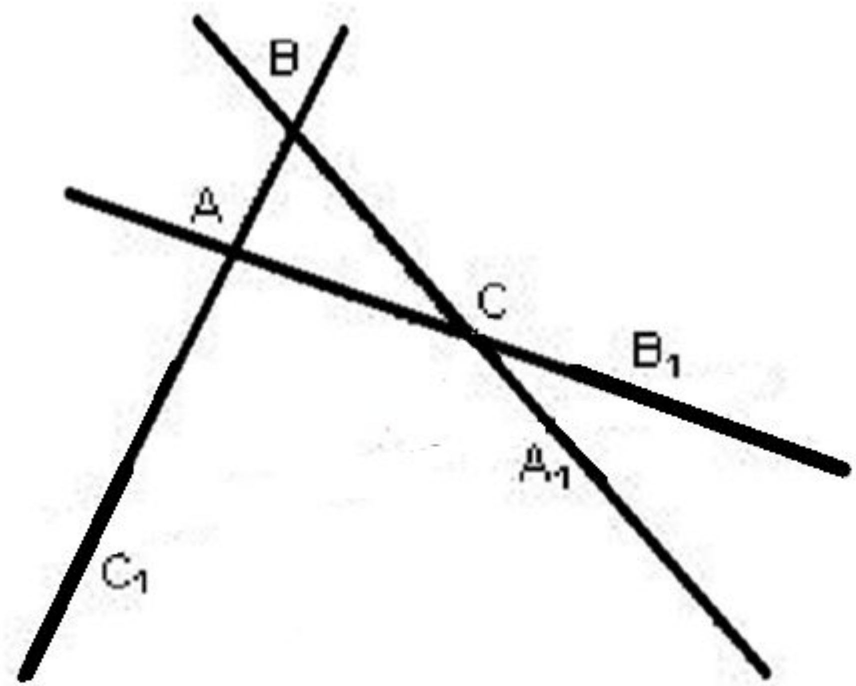
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА

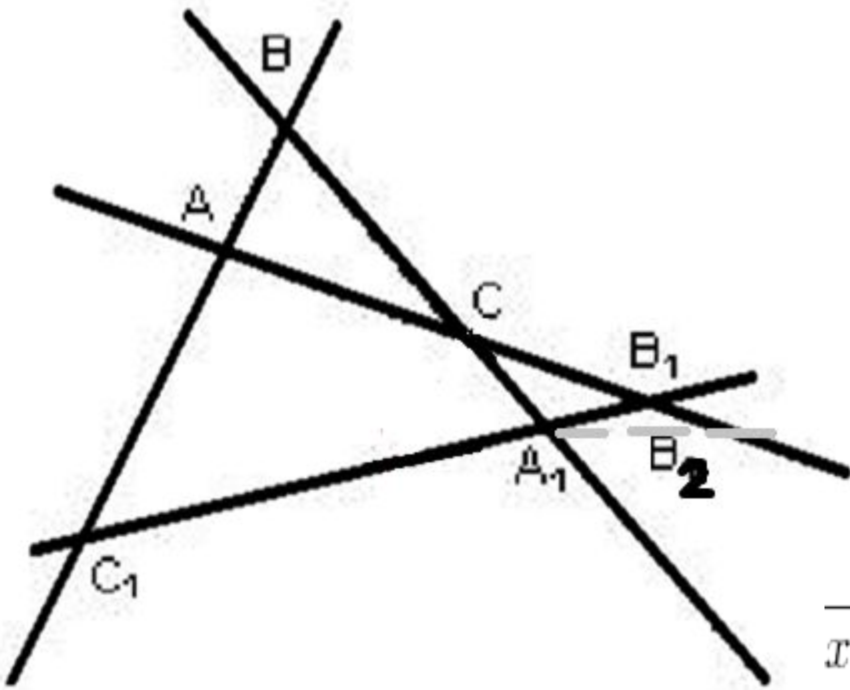
Пусть дан треугольник ABC, точки A1,B1,C1 лежат на продолжениях сторон BC, AC и AB соответственно. Если выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

то эти точки лежат на одной прямой



Доказательство



Для точек A_1, C_1 и B_2 $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1.$

По условию $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$

Пусть $CB_1 = x, CB_2 = y, AC = b$

Тогда $B_1A = x + b$ и $B_2A = y + b$

$$\frac{x}{x+b} = \frac{y}{y+b} \Leftrightarrow xy + xb = xy + yb \Leftrightarrow x = y.$$

$$B_1 = B_2$$