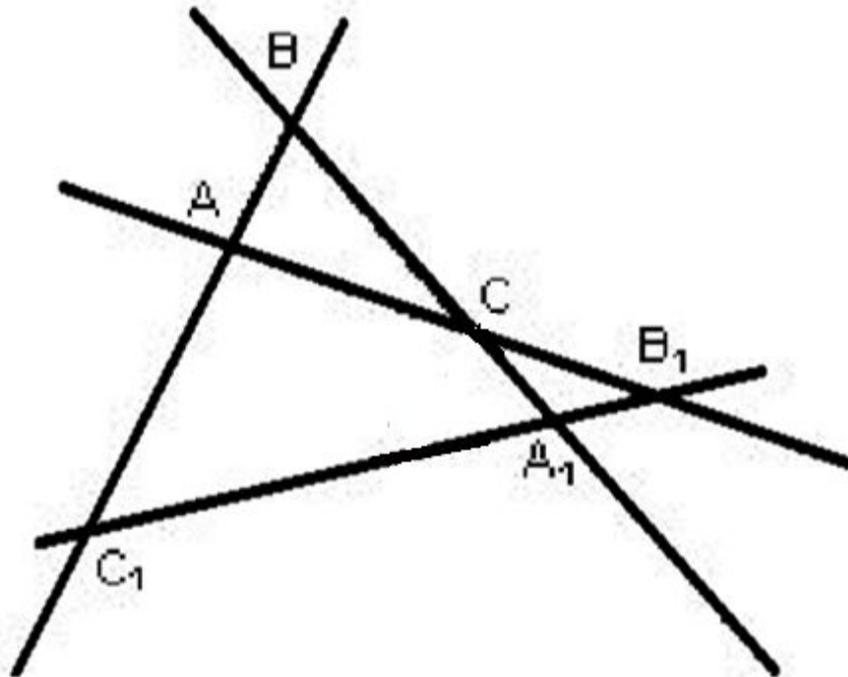


ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

ПРЯМАЯ ТЕОРЕМА

Пусть дан треугольник ABC , точки A_1, B_1, C_1 лежат на продолжениях сторон BC, AC и AB соответственно. Если точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



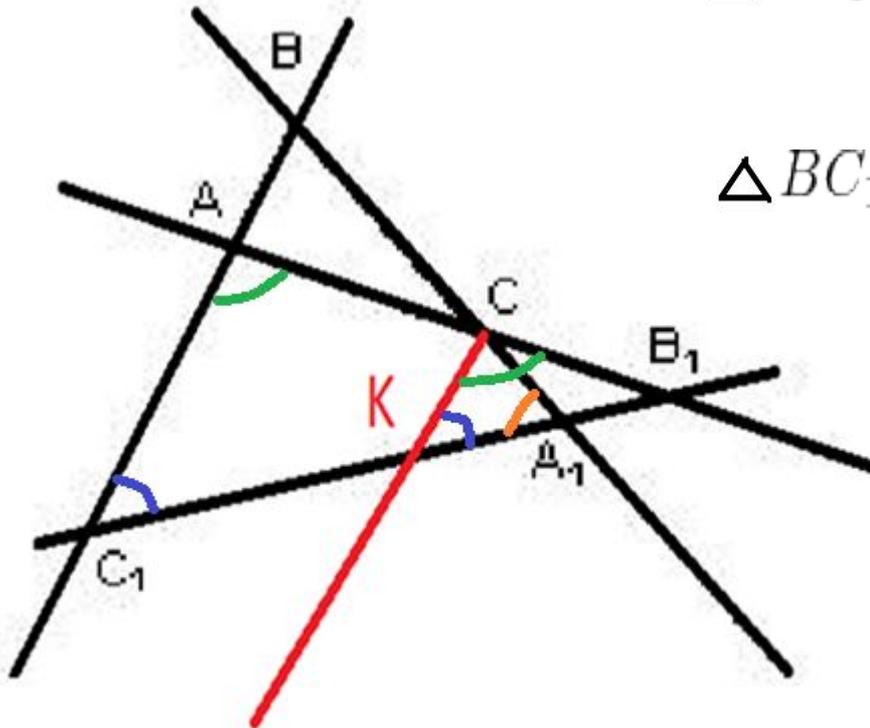
Доказательство

$$\triangle AC_1B_1 \text{ и } \triangle CKB_1: \frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C}.$$

$$\triangle BC_1A_1 \text{ и } \triangle CKA_1: \frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

$$CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1},$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

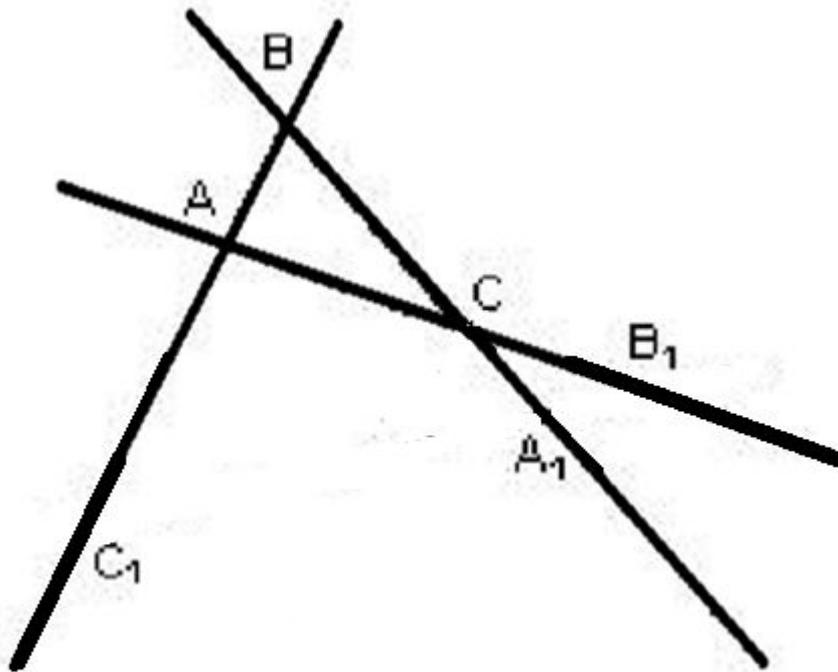


ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть дан треугольник ABC, точки A₁, B₁, C₁ лежат на продолжениях сторон BC, AC и AB соответственно. Если выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

то эти точки лежат на одной прямой



Доказательство

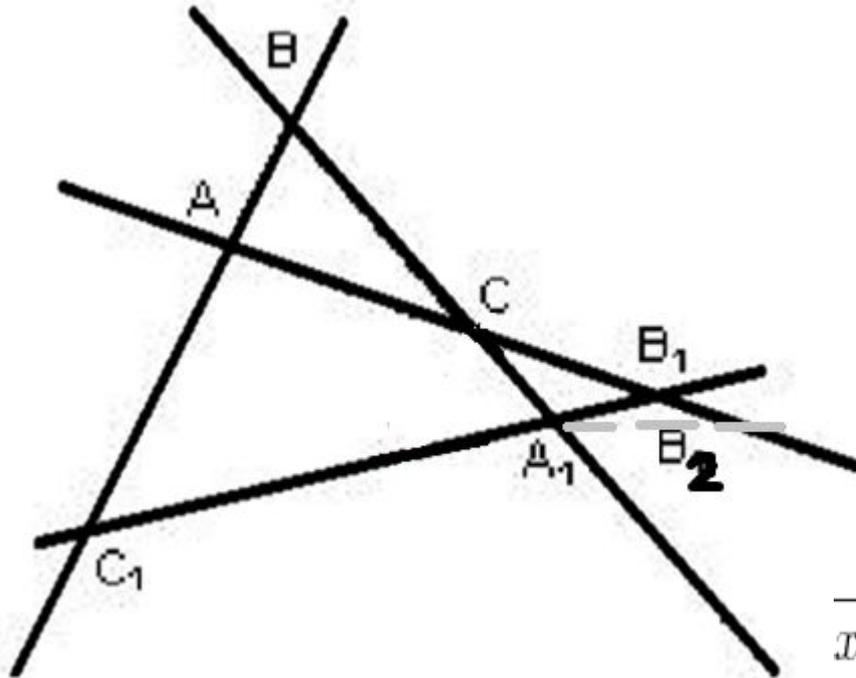
Для
точек

$$A_1, C_1 \text{ и } B_2 \quad \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1.$$

По
условию

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{CB_1}{B_1A}.$$



Пусть $CB_1 = x, CB_2 = y, AC = b$

Тогда $B_1A = x + b$ и $B_2A = y + b$

$$\frac{x}{x + b} = \frac{ay}{y + b} \Leftrightarrow xy + xb = xy + yb \Leftrightarrow x = y.$$

$$B_1 = B_2$$