Класс NP и NP-полные задачи

NP-полнота задачи выполнимости

Задача выполнимости булевой функции:

Вход: булева функция, заданная формулой

Требуется определить, выполнима ли функция, т.е. существует ли набор, на котором функция равно 1.

Теорема: *Задача выполнимости булевой функции NP-полна.*

Требуется доказать, что:

1. Эту задачу можно решить за полиномиальное время на НМТ.
2. Любую другую задачу класса NP можно свести к задаче выполнимости.

NP-полнота задачи выполнимости

1. Алгоритм на НМТ для задачи выполнимости:
    1. Выбираем набор значений переменных
    2. Вычисляем значение функции на данном наборе

NP-полнота задачи выполнимости

2. Сведение произвольного языка $L \in NP$ к задаче выполнимости:

Пусть $M \in$ НМТ, $L(M)=L$

Пусть входом M является слово w.

Покажем, как по M и w построить (за время, ограниченное полиномом) булеву функцию w_0, выполнимую т. и т.т. когда M распознаёт w.

Т.к. M распознаёт w, то $\exists$ $Q_0, Q_1, \ldots, Q_q$ – последовательность состояний M, такая, что Q_0 – начальное, а Q_q – допустимое.

NP-полнота задачи выполнимости

Определим наборы переменных:

1. $C_{i,j,t}$ = 1 т.и.т.т., когда i-ая клетка на ленте машины M содержит символ X_j в момент времени t.
2. $S_{k,t}$ = 1 т.и.т.т., когда M в момент времени t находится в состоянии q_k.
3. $H_{i,t}$ = 1 т.и.т.т., когда головка в момент t находится над i-ой клеткой

Свяжем эти переменные ограничениями, которые будут истинны только для M на w

- $\exists$ Q_0, Q_1, …, Q_q –такая, что Q_0 – начальное, а Q_q – допустимое.

NP-полнота задачи выполнимости

Утверждение о Q_0, Q_1, …, Q_q равносильно следующему:

1. В каждом состоянии головка находится ровно над одной ячейкой
2. В каждом состоянии в каждой клетке ленты ровно один символ
3. Каждое состояние Q_i, машина находится ровно в одном внутреннем состоянии
4. При одном переходе может изменится только та клетка, где головка
5. Изменение состояния происходит в соответствии с функцией переходов
6. Первое состояние является начальным
7. Последнее состояние - заключительное

NP-полнота задачи о клике

Лемма: *Задача выполнимости булевой функции, находящейся в КНФ, полна.*

Теорема: *Задача о клике NP-полна.*

Требуется доказать, что
задача КНФ-выполнимости булевой функции полиномиально трансформируема в задачу о клике.