



# Класс NP и NP-полные задачи

---



# NP-полнота задачи выполнимости

---

Задача выполнимости булевой функции:

Вход: булева функция, заданная формулой

Требуется определить, выполнима ли функция, т.е. существует ли набор, на котором функция равно 1.

Теорема: *Задача выполнимости булевой функции NP-полна.*

Требуется доказать, что:

1. Эту задачу можно решить за полиномиальное время на НМТ.
2. Любую другую задачу класса NP можно свести к задаче выполнимости.



# NP-полнота задачи выполнимости

---

1. Алгоритм на НМТ для задачи выполнимости:
  1. Выбираем набор значений переменных
  2. Вычисляем значение функции на данном наборе



# NP-полнота задачи выполнимости

---

2. Сведение произвольного языка  $L \in NP$  к задаче выполнимости:

Пусть  $M \in НМТ$ ,  $L(M)=L$

Пусть входом  $M$  является слово  $w$ .

Покажем, как по  $M$  и  $w$  построить (за время, ограниченное полиномом) булеву функцию  $w_0$ , выполняемую т. и т.т. когда  $M$  распознаёт  $w$ .

Т.к.  $M$  распознаёт  $w$ , то  $\exists Q_0, Q_1, \dots, Q_q$  – последовательность состояний  $M$ , такая, что  $Q_0$  – начальное, а  $Q_q$  – допустимое.



# NP-полнота задачи выполнимости

---

Определим наборы переменных:

1.  $C_{i,j,t} = 1$  т.и.т.т., когда  $i$ -ая клетка на ленте машины  $M$  содержит символ  $X_j$  в момент времени  $t$ .
2.  $S_{k,t} = 1$  т.и.т.т., когда  $M$  в момент времени  $t$  находится в состоянии  $q_k$ .
3.  $H_{i,t} = 1$  т.и.т.т., когда головка в момент  $t$  находится над  $i$ -ой клеткой

Свяжем эти переменные ограничениями, которые будут истинны только для  $M$  на  $w$

∃  $Q_0, Q_1, \dots, Q_q$  – такая, что  $Q_0$  – начальное, а  $Q_q$  – допустимое.



# NP-полнота задачи выполнимости

---

Утверждение о  $Q_0, Q_1, \dots, Q_q$  равносильно следующему:

1. В каждом состоянии головка находится ровно над одной ячейкой
2. В каждом состоянии в каждой клетке ленты ровно один символ
3. Каждое состояние  $Q_i$ , машина находится ровно в одном внутреннем состоянии
4. При одном переходе может измениться только та клетка, где головка
5. Изменение состояния происходит в соответствии с функцией переходов
6. Первое состояние является начальным
7. Последнее состояние - заключительное



# NP-полнота задачи о клике

---

Лемма: *Задача выполнимости булевой функции, находящейся в КНФ, полна.*

Теорема: *Задача о клике NP-полна.*

Требуется доказать, что задача КНФ-выполнимости булевой функции полиномиально трансформируема в задачу о клике.