

Введение в компьютерные методы метрико- топологических построений.

Г.Г.Рябов (МГУ)
2007г

Современная вычислительная среда.

- Глобальная модель циркуляции «атмосфера-океан» (MITsgm) - 10^7 - 10^9 узлов (кубов).
- Обтекание «Аэробуса» - 10^7 тетраэдров.
- Биотомограф - $1000 \times 1000 \times 1000$ (10^9) вокселей.
- Фармацевтика - триангуляция молекулярной поверхности - 10^7 .
- Перколяционные задачи - решетка 10^9 .
- Архитектура и строительство - минимальные поверхности.
- Научно-техническая визуализация - 10^7 - 10^8 треугольников.

Геометрико - топологические особенности.

- Меры по сохранению устойчивости решения (число и геометрия тетраэдров).
- Проведение оперативных преобразований среды.(кластеризация и разбиение для распараллеливания вычислений).
- Сохранение при преобразованиях топологических инвариантов и заданных геометрических отношений(тел).

Digital geometry and topology

Discrete differential geometry

- США (MIT, Caltech, Stanford)
- Франция(INRIA)
- Германия (Un.Gumbold)
- Швеция (Un.Upsala)
- Венгрия (Un.Seged)
- Нов.Зеландия (Un.Oakland)
- Япония (Un.Chiba)

**комбинаторная
топология**

**симплициальные
комплексы**

**отображения R_n
на подпространства**

полиэдризация R_n

**геометрия
чисел**

решетки

**отображения Z_n
на себя**

**решеточный
веер**

алгебра

**линейные
преобразования**

**унимодулярные
матрицы**

**процессор
метрико-топологических построений**

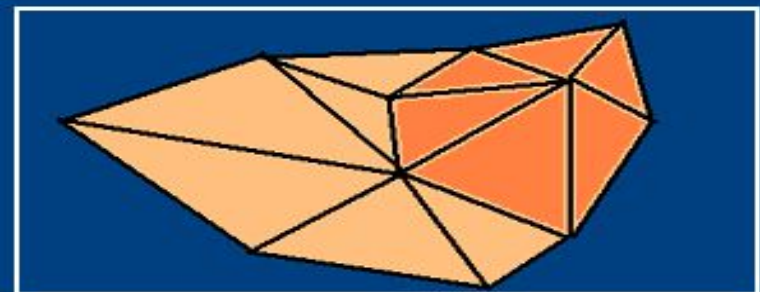
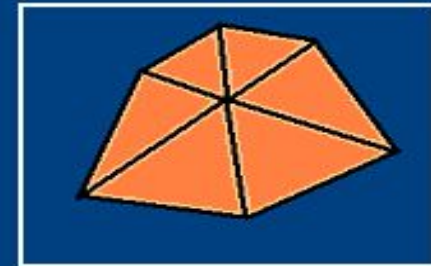
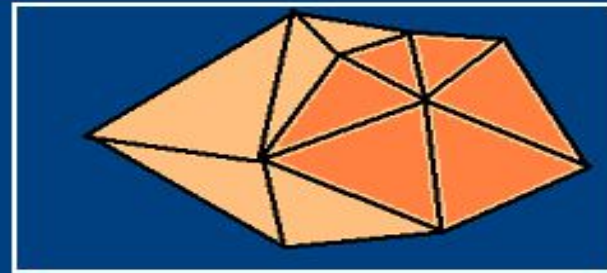
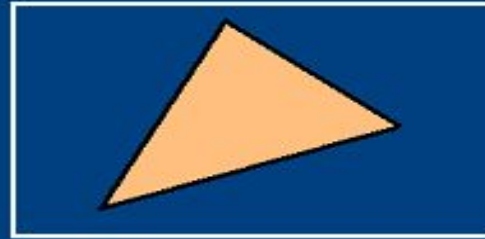
**организация памяти с
учетом симметрий
и подобий**

**организация вычислений
с учетом параллелизма и
контроля за инвариантами**

КОМПЬЮТЕР

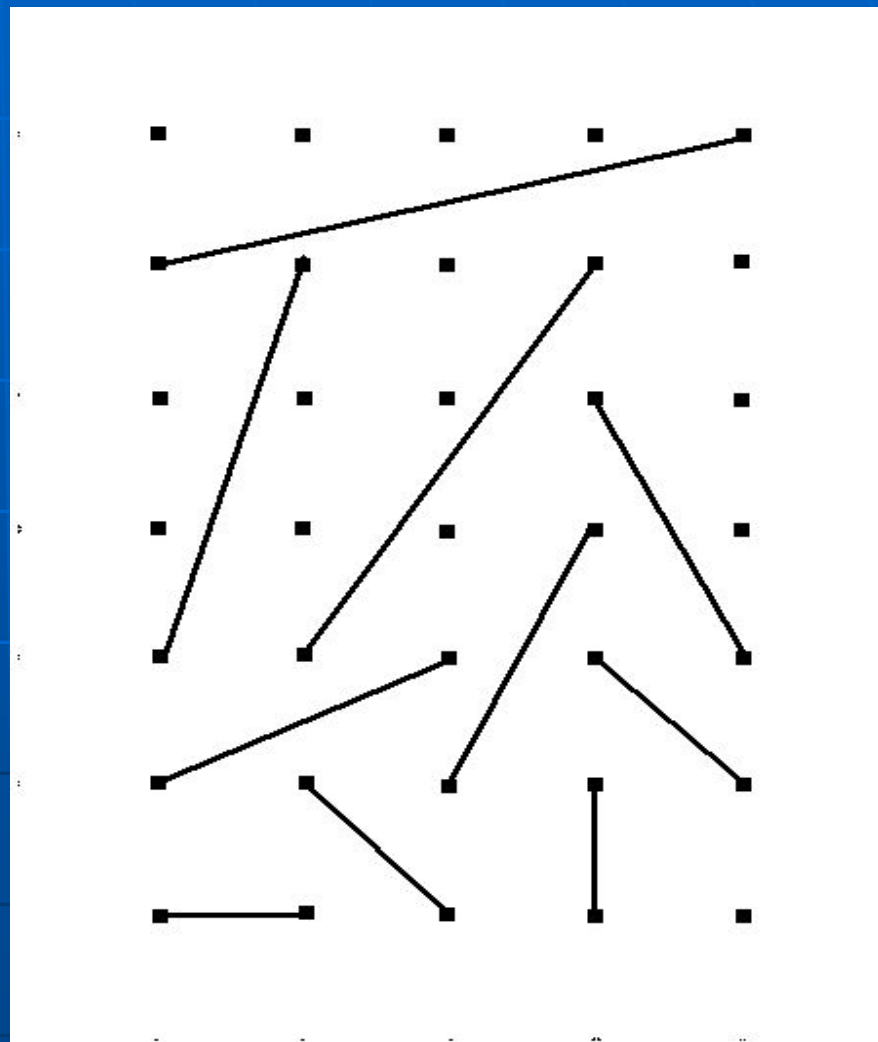
Комбинаторная топология.

- Конечный элемент-симплекс.
- Комплекс – множество правильно расположенных симплексов.
- Звездный полиэдр-окрестность.
- Преобразование комплексов – сумма допустимых преобразований звездных полиэдров.



Целые точки и простые ребра.

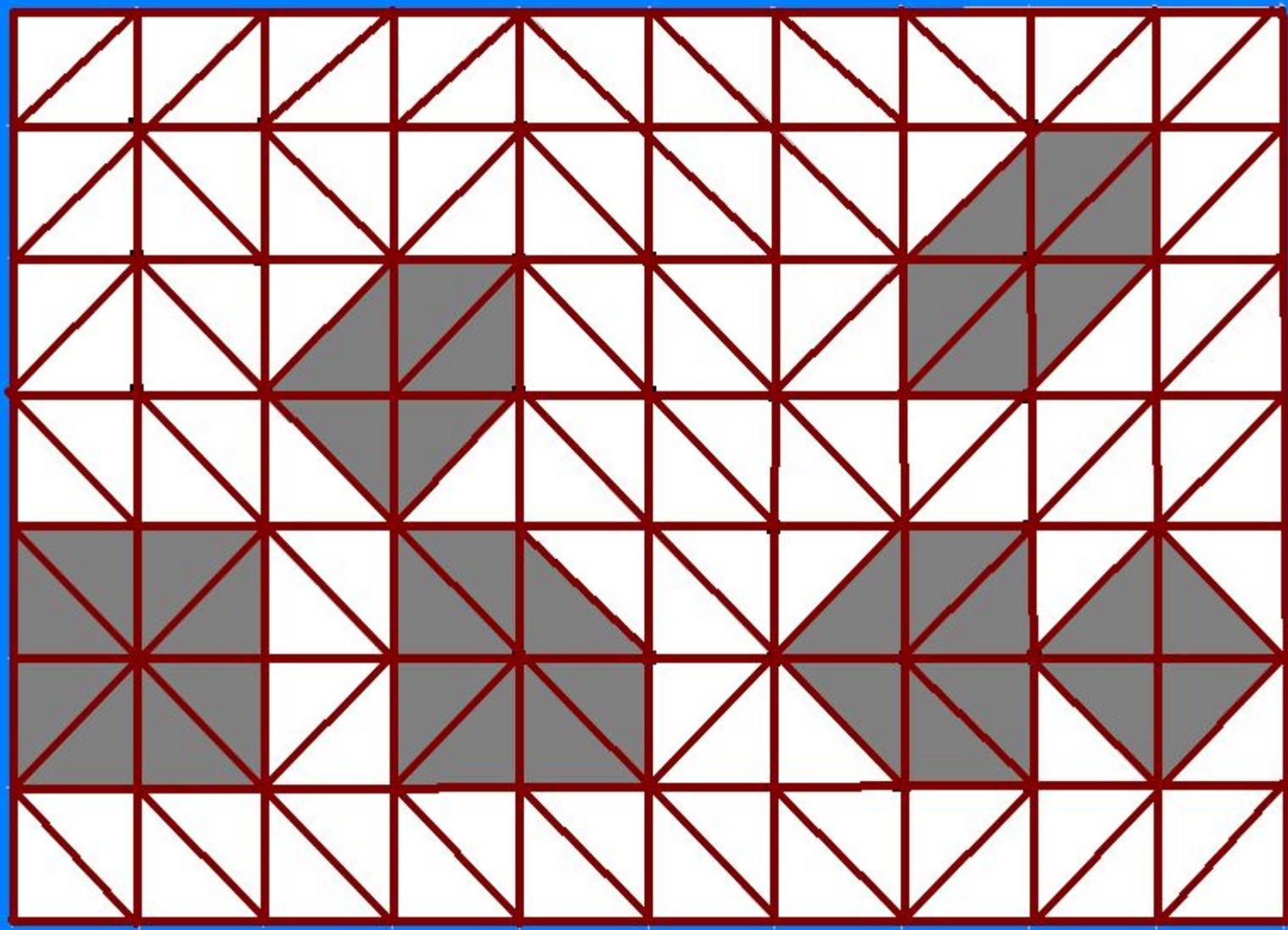
- Симплексы с вершинами в целых точках и простыми ребрами (не имеющими внутренних целых точек).
- Модельные множества (Z^n, U_p) , n -размерность пространства, p -норма простых ребер ($p = \max |x_i|; i=1-n$).
- Основные построения для $n=3,4,5,6$; $p=1$;



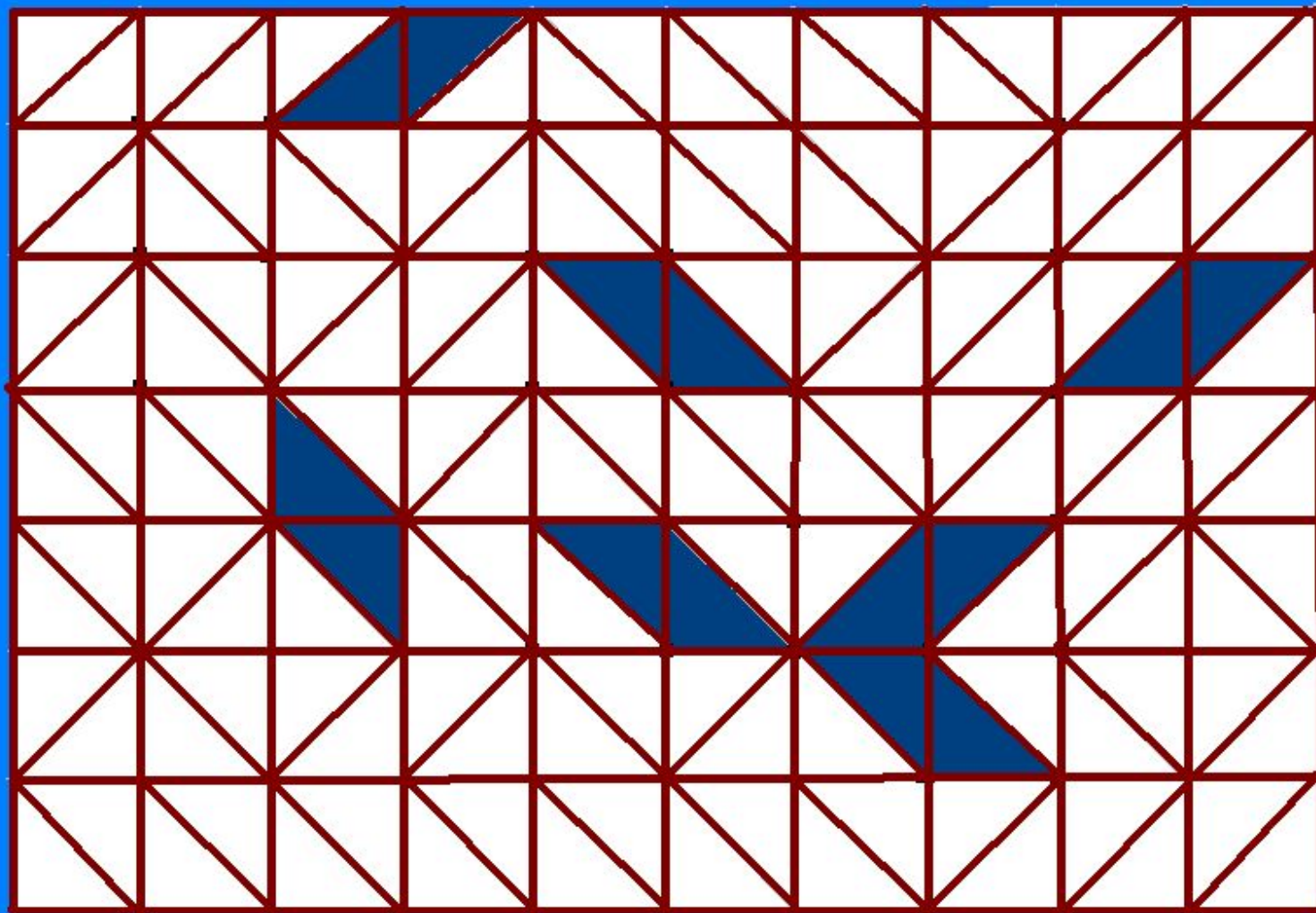
Основная последовательность базисных построений.

- Построение однородных звездчатых полиэдров (стереоэдров) на простых симплексах.
- Покрытие такими полиэдрами всего пространства (нормальное, правильное разбиение).
- Определение симплициальных комплексов.
- Аналоги гомотопных преобразований на комплексах-преобразования на граничных зв. полиэдрах (гомотопные волны).

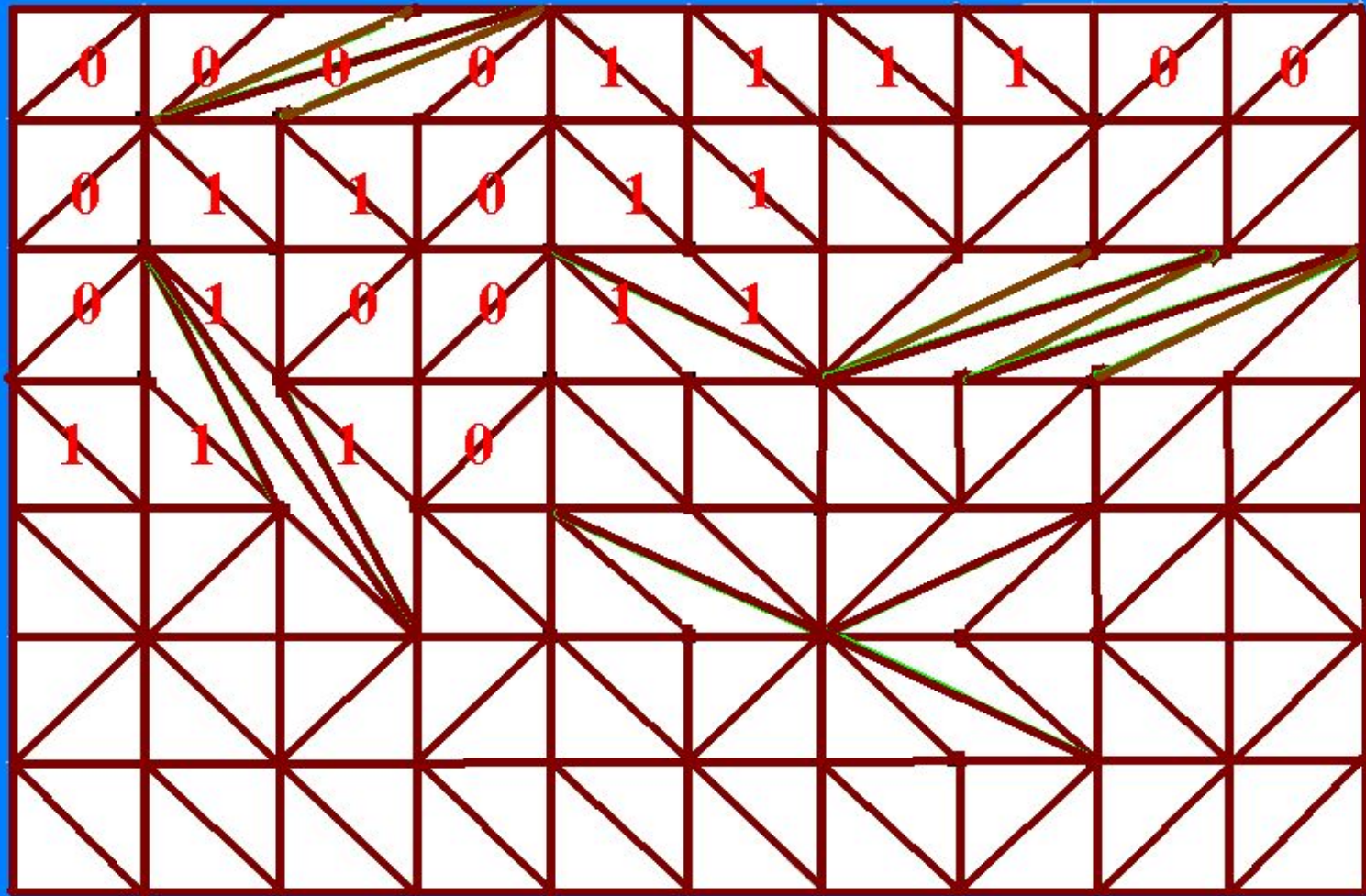
(\mathbb{Z}^2, U_1) и все 6 типов 2d зв.полиэдров



Перестройки разбиения - выделение параллелограммов и замена диагоналей.



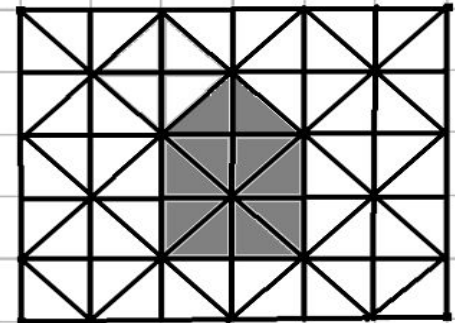
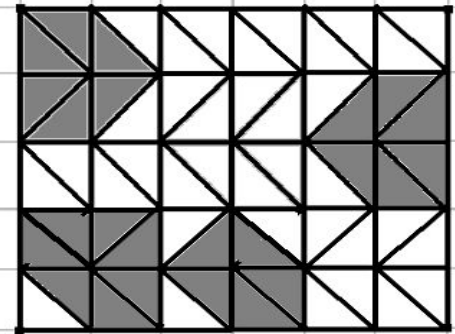
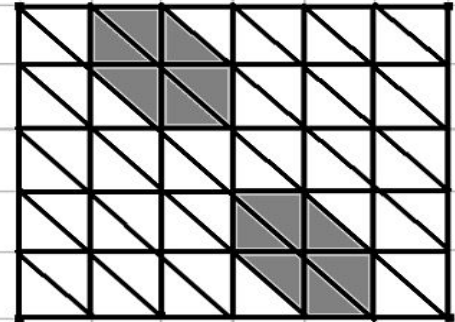
Двоичный код-инвариант при перестройках 1-го типа (диагональ-диагональ)



Классификация

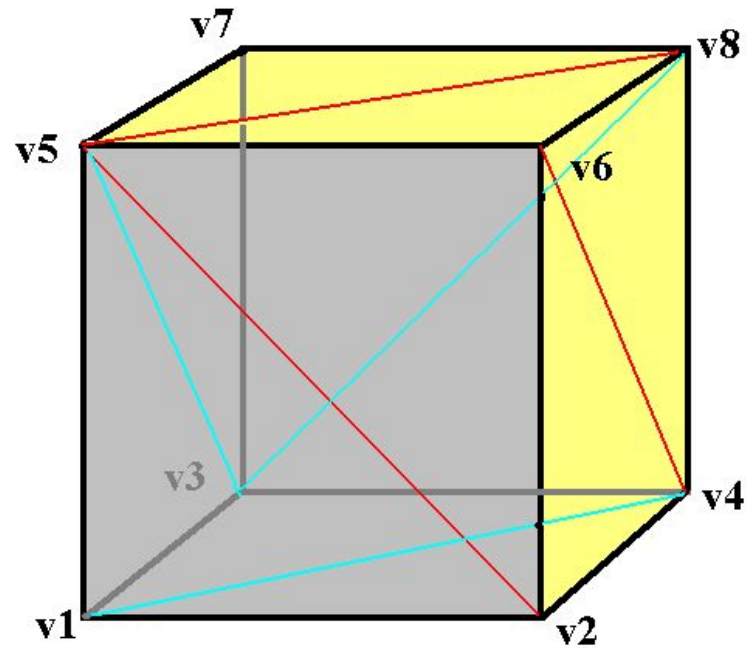
ТИПОВ ЗВ. ПОЛИЭДРОВ.

- 1. Транслируемые.
- 2. Конгруэнтные.
- 3. Парнотранслируемые.



Перечисление всех неконгруэнтных триангуляций куба.

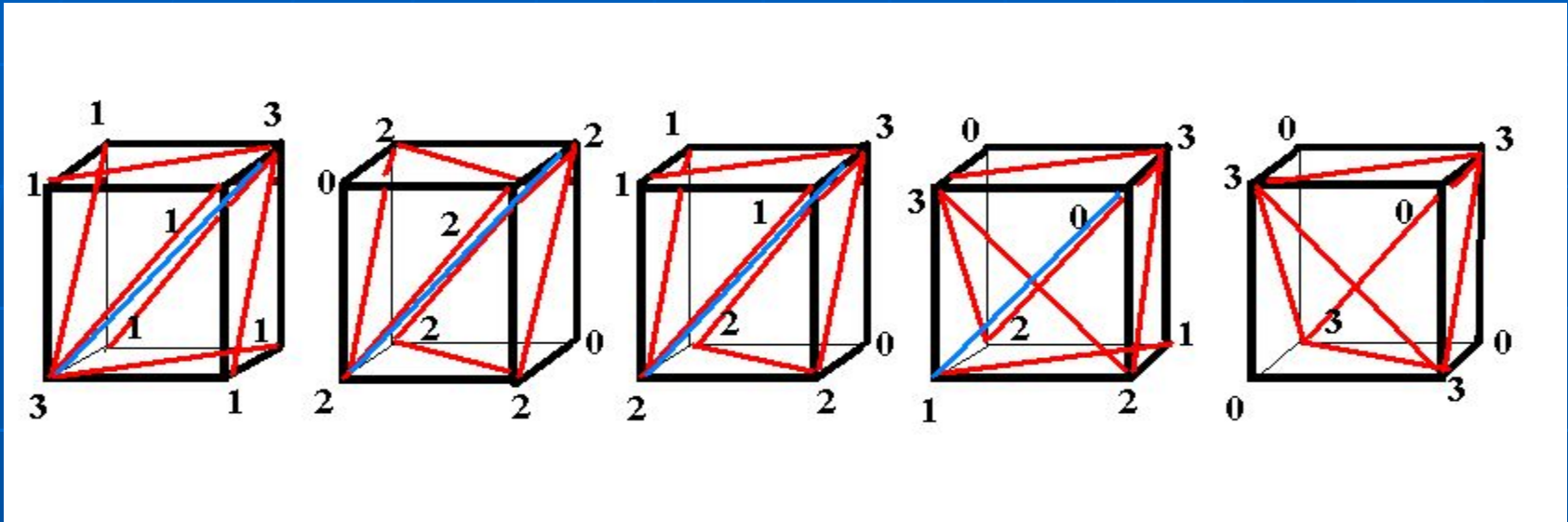
- Любая триангуляция на вершинах куба порождает диагональное разбиение граней куба.
- Каждому разбиению соответствует вектор степеней вершин (инцидентных диагоналей).
- Разные векторы-неконгруэнтные триангуляции.
- $v_1-1, v_2-1, v_3-2, v_4-2, v_5-3, v_6-1, v_7-0, v_8-2;$
- $(1, 3, 3, 1)$



Диофантовы уравнения.

- i -число диагоналей сходящихся к вершине.
- x_i -число вершин с i сходящимися диагоналями.
- $\sum x_i = 8; i=0-3;$
- $\sum i x_i = 12; i=0-3;$
- Решения: $(2,2,2,2); (0,6,0,2); (1,3,3,1); (2,0,6,0); (4,0,4,0); (0,4,4,0);$

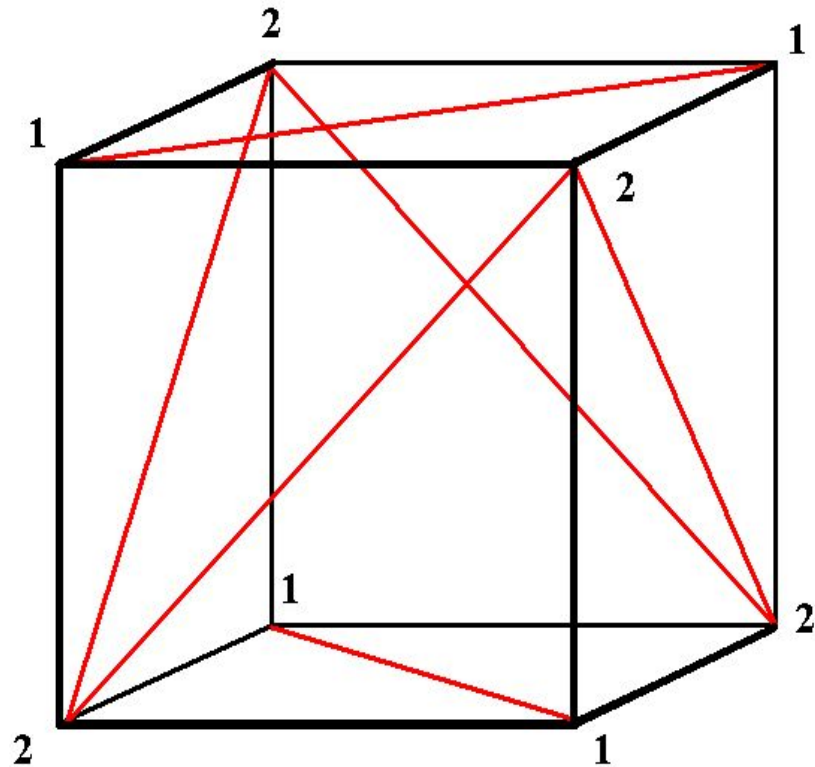
Все типы неконгруэнтных триангуляций куба.



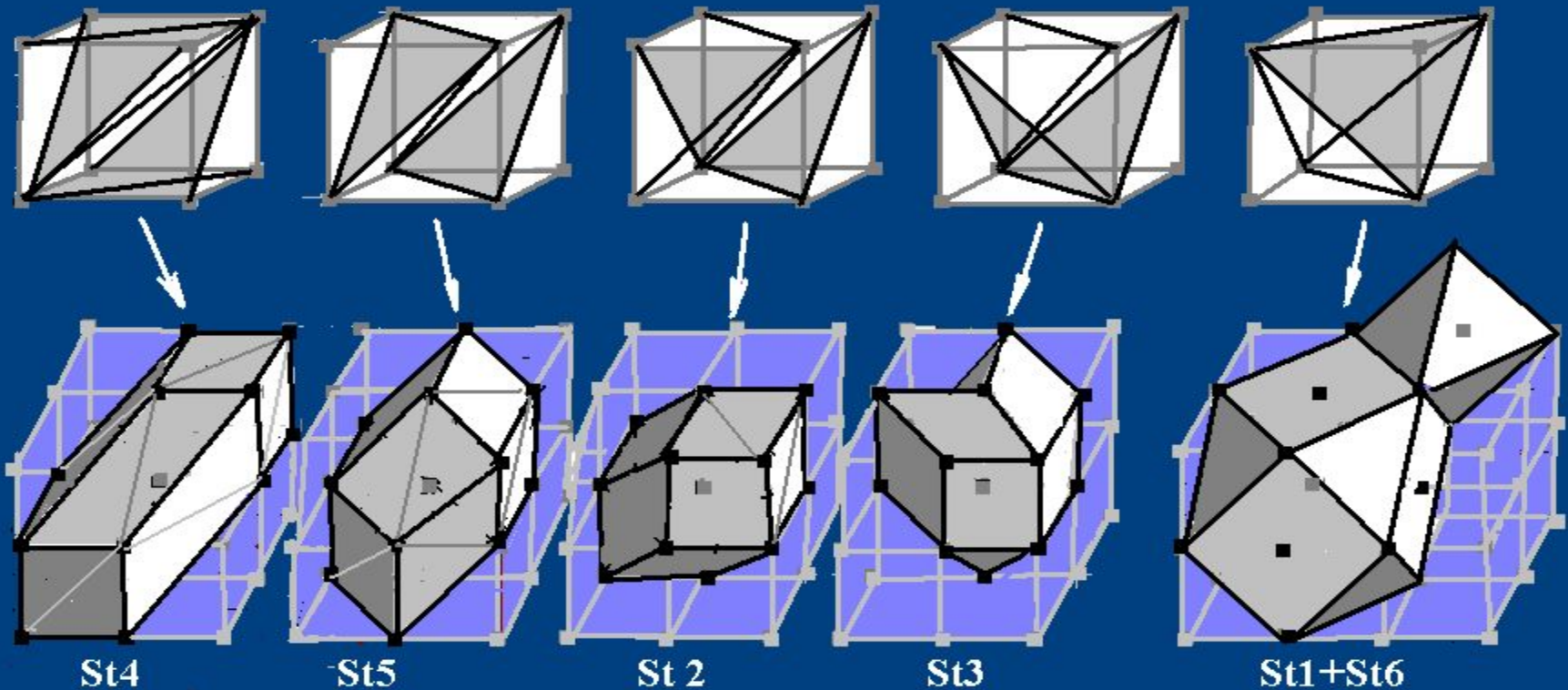
- $(0,6,0,2)$ $(2,0,6,0)$ $(1,3,3,1)$ $(2,2,2,2)$ $(4,0,0,4)$

Решение $(0,4,4,0)$ не соответствует
никакой триангуляции.

- Ни при какой диагонали внутри куба невозможно правильное разбиение на пирамиды.



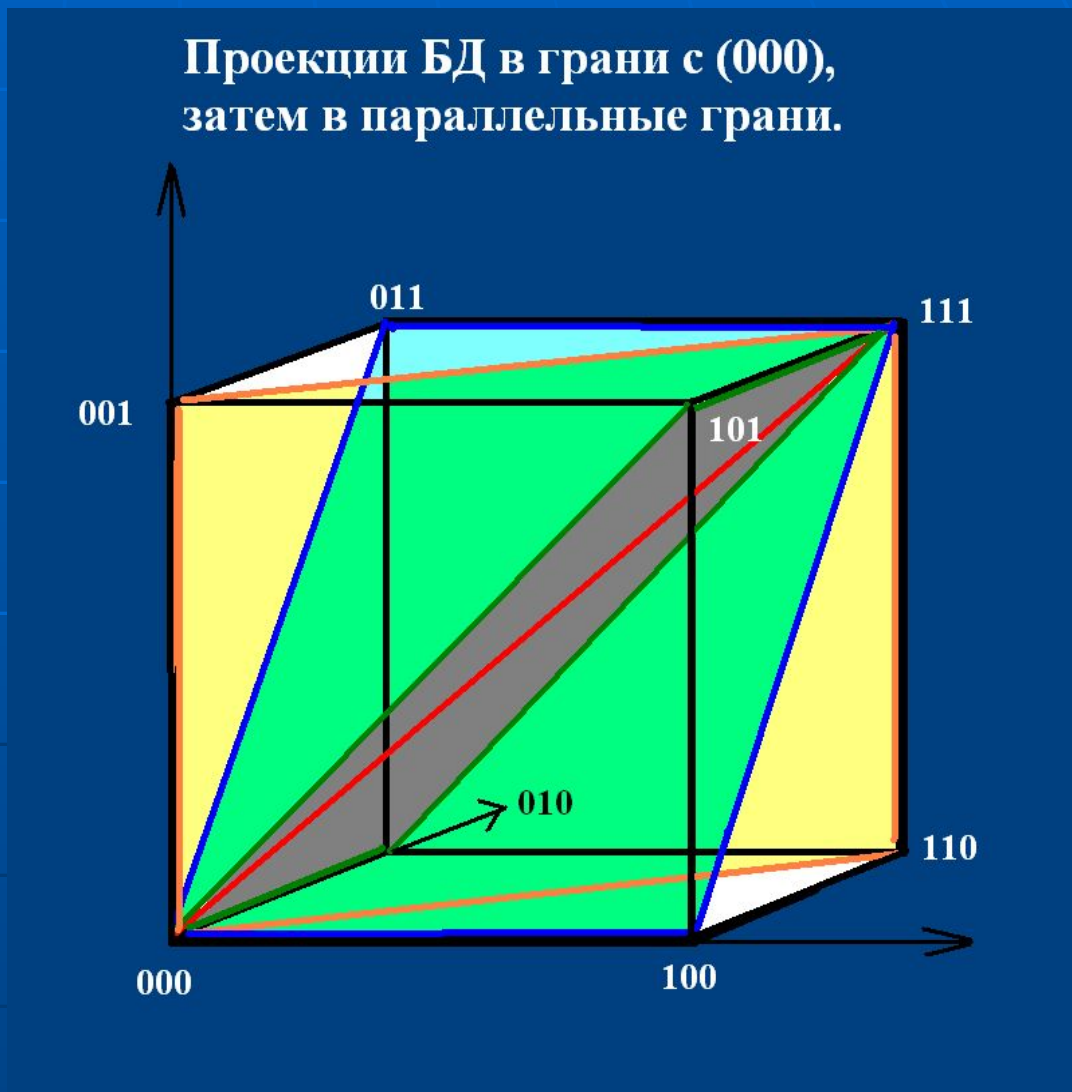
Все 3d звездчатые полиэдры (4 типа симплексов) на (Z_3, V_1) .



Пять различных типов сечения куба и соответствующие полиэдры:
St4, St5-транслируемые, St2, St3-конгруэнтные,
St1+St6-парно транслируемые.

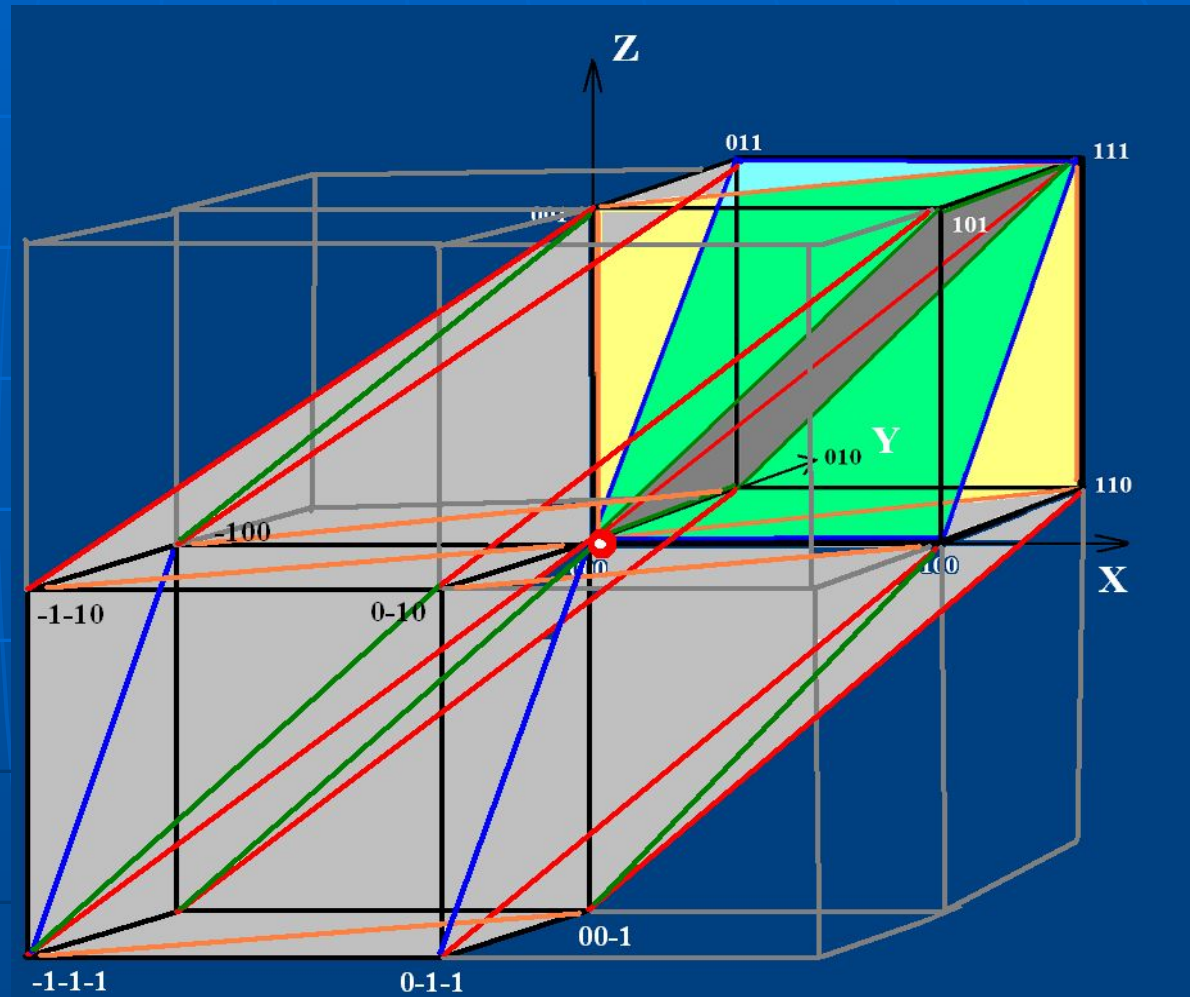
Разбиение кубов проекциями-транслируемая полиэдризация \mathbb{R}^3 .

- Разбиение единичного куба на 6 тетраэдров-симплексов.



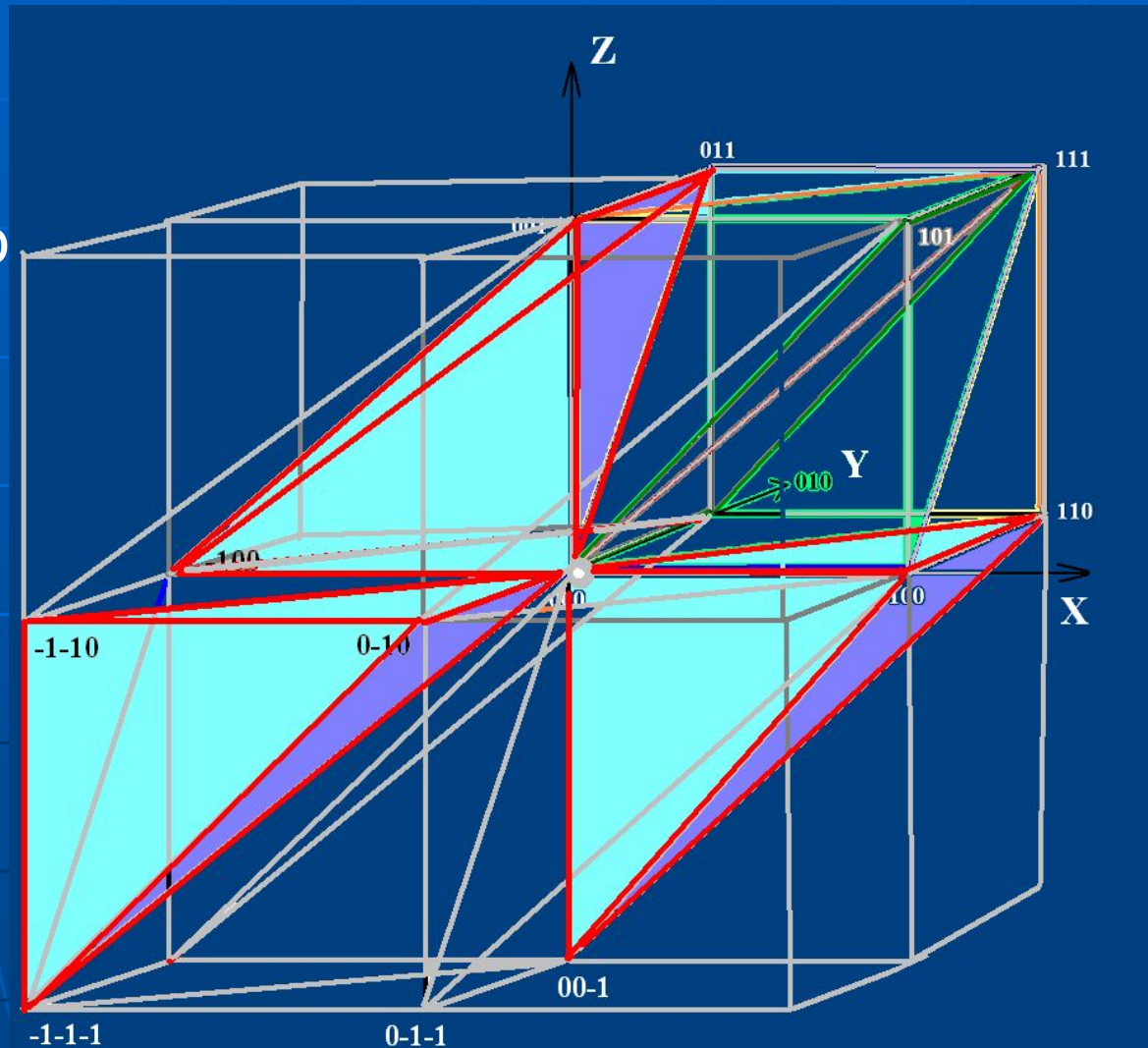
Ребра и грани вокруг $(0,0,0)$

- Трансляция построений во все кубы R_3 .
- Звездный полиэдр для $(0,0,0)$



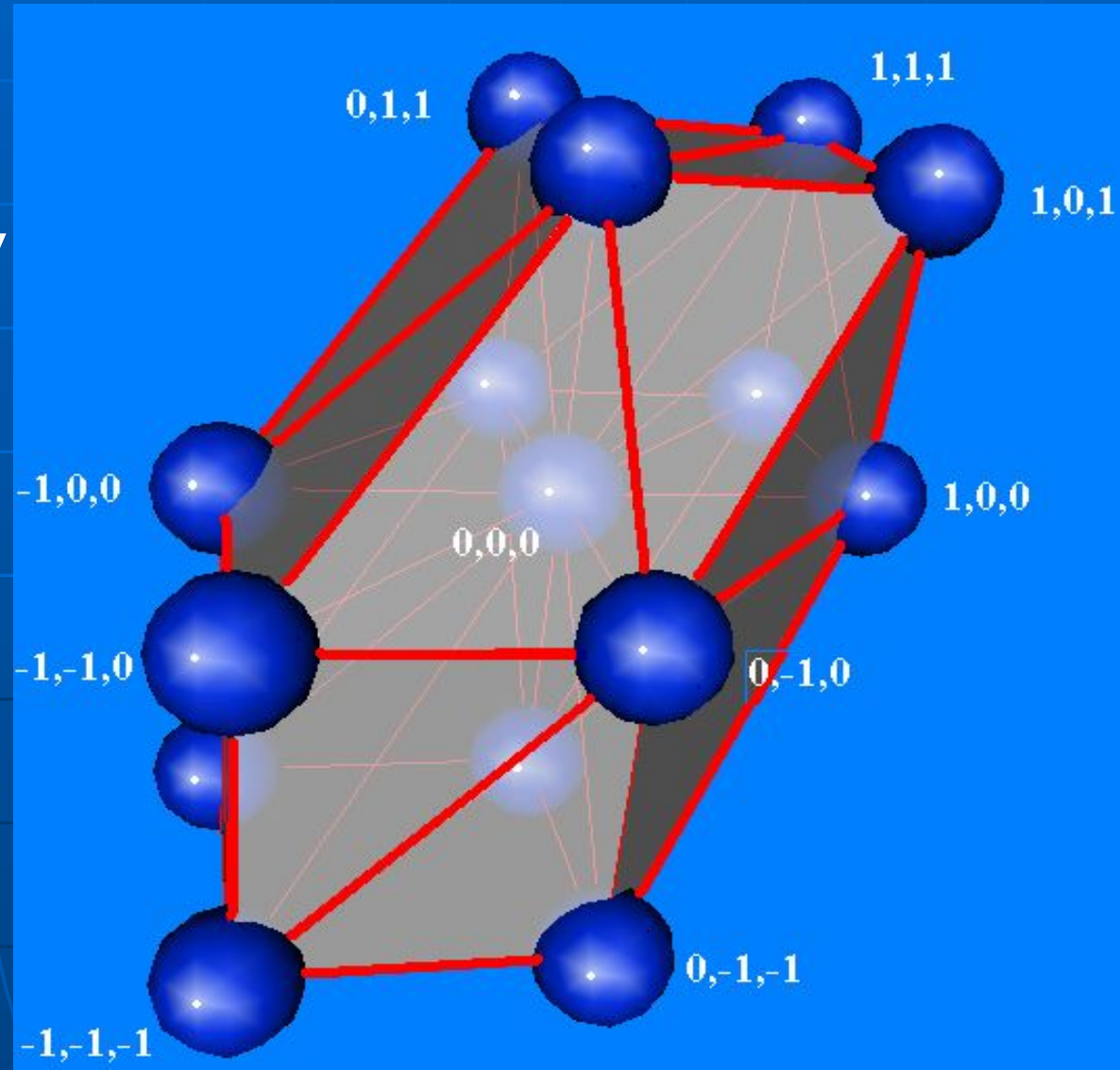
Структура полиэдра.

- 24 симплекса внутри транслируемого звездного полиэдра.
- Объем полиэдра $V=24 \times 1/6=4$.

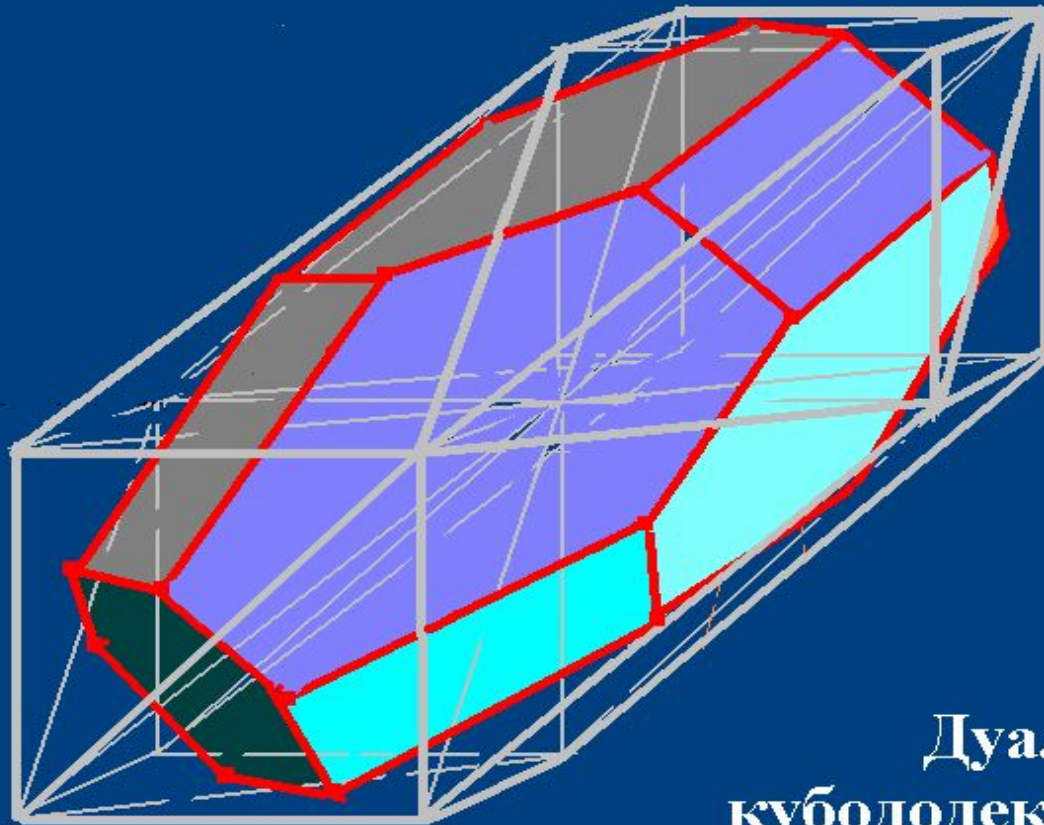


Транслируемый 3d звездчатый полиэдр MSP.

- Кубододекаэдр-14, 36, 24.
- Вершин-15 (1+14)
- Ребер- 50(14+36)
- Граней-48(24+24)
- 3d симплексов-24
- Объем=4
- Строго выпуклый (по Малеру)



Дуальный полиэдр.



Дуальный к
кубододекаэдру полиэдр

Построение транслируемых nd-полиэдров как отображение R^n на подпространства.

1. Отображение (проекция) n-куба с большой диагональю на k-грань $F_0(k)$, ортогональные n-k координатным осям и содержащим $(0,0,\dots,0)$. (C_n^k)

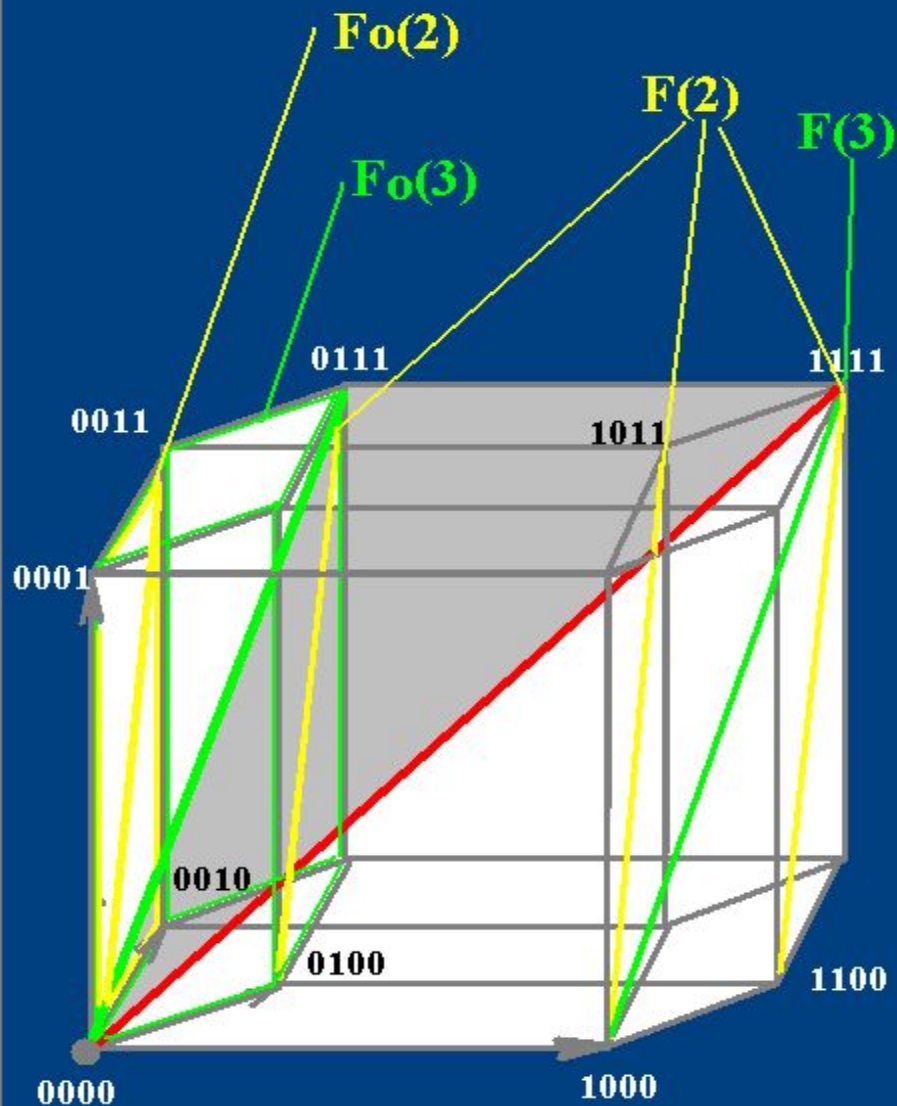
2. Трансляция каждой проекции в 2^{n-k} "параллельных" k-граней.

$$F_0(k) \perp e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-k}}$$

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & & & & & \\ & & 0 & \dots & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \dots & \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{--- } i_1 \\ \text{--- } i_2 \\ \text{--- } i_{n-k} \end{matrix}$$

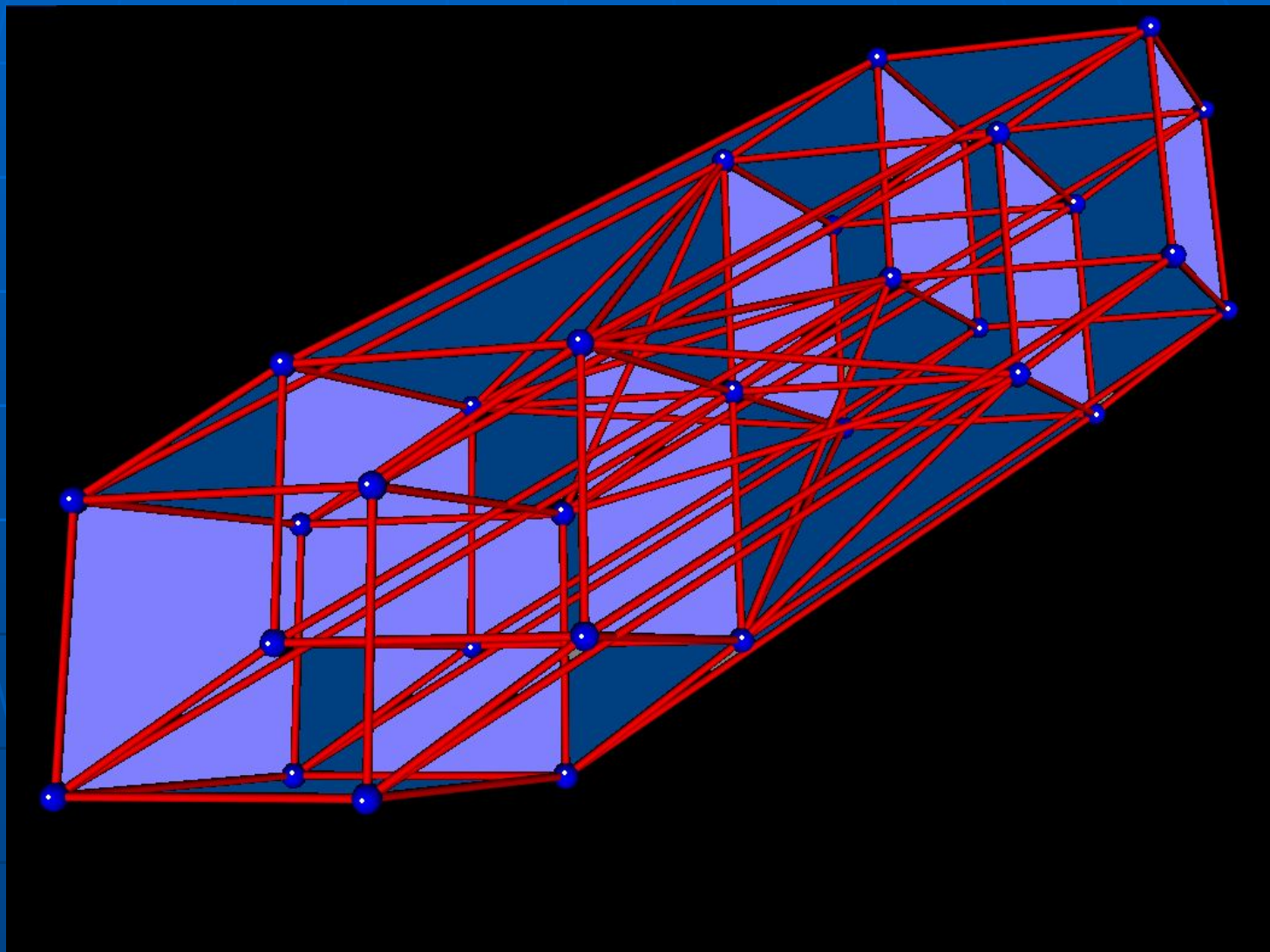
$$T_{ik} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \dots \ 1 \ 0 \dots \ 1 \ 0)$$

$i_1 \quad i_2 \quad i_{n-k}$



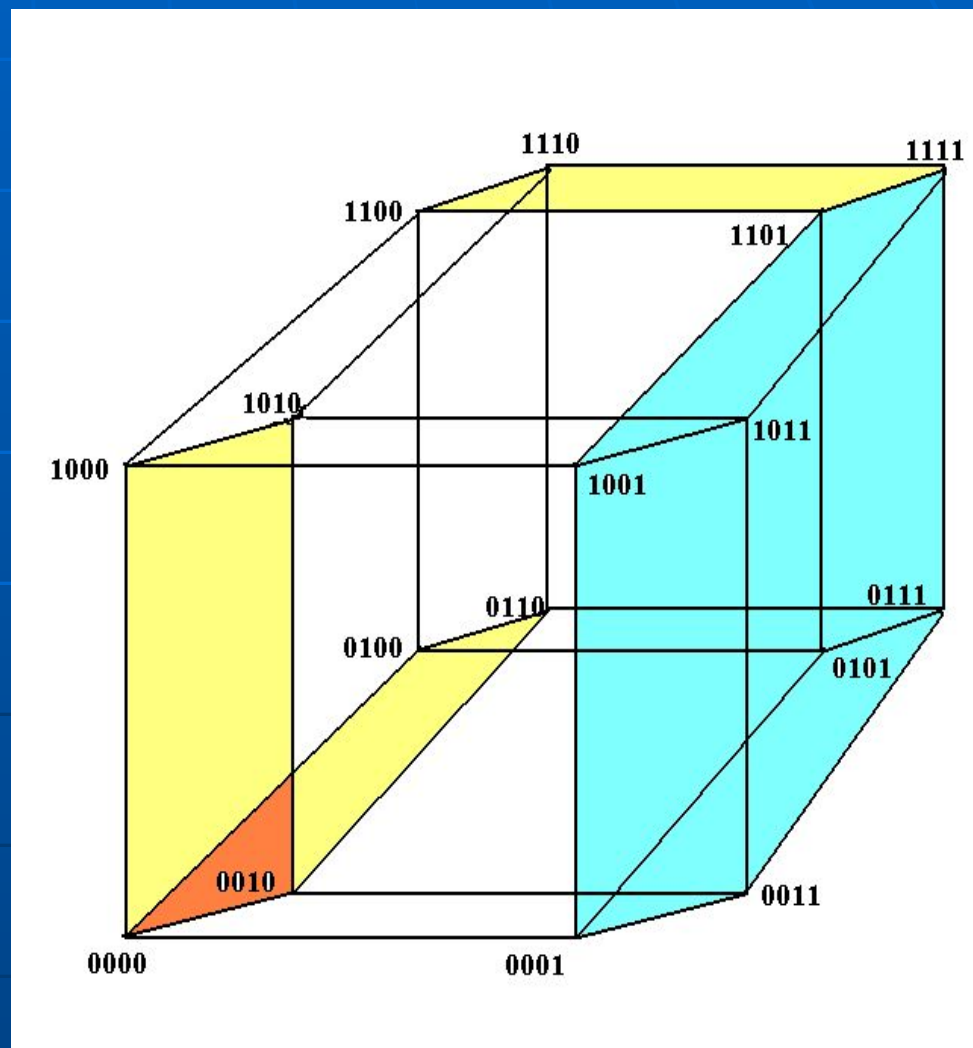
Транслируемый 4d зв. полиэдр.

Два полярных
4d куба с
одной общей
вершиной и
доп. ребрами.



Структура n-куба.

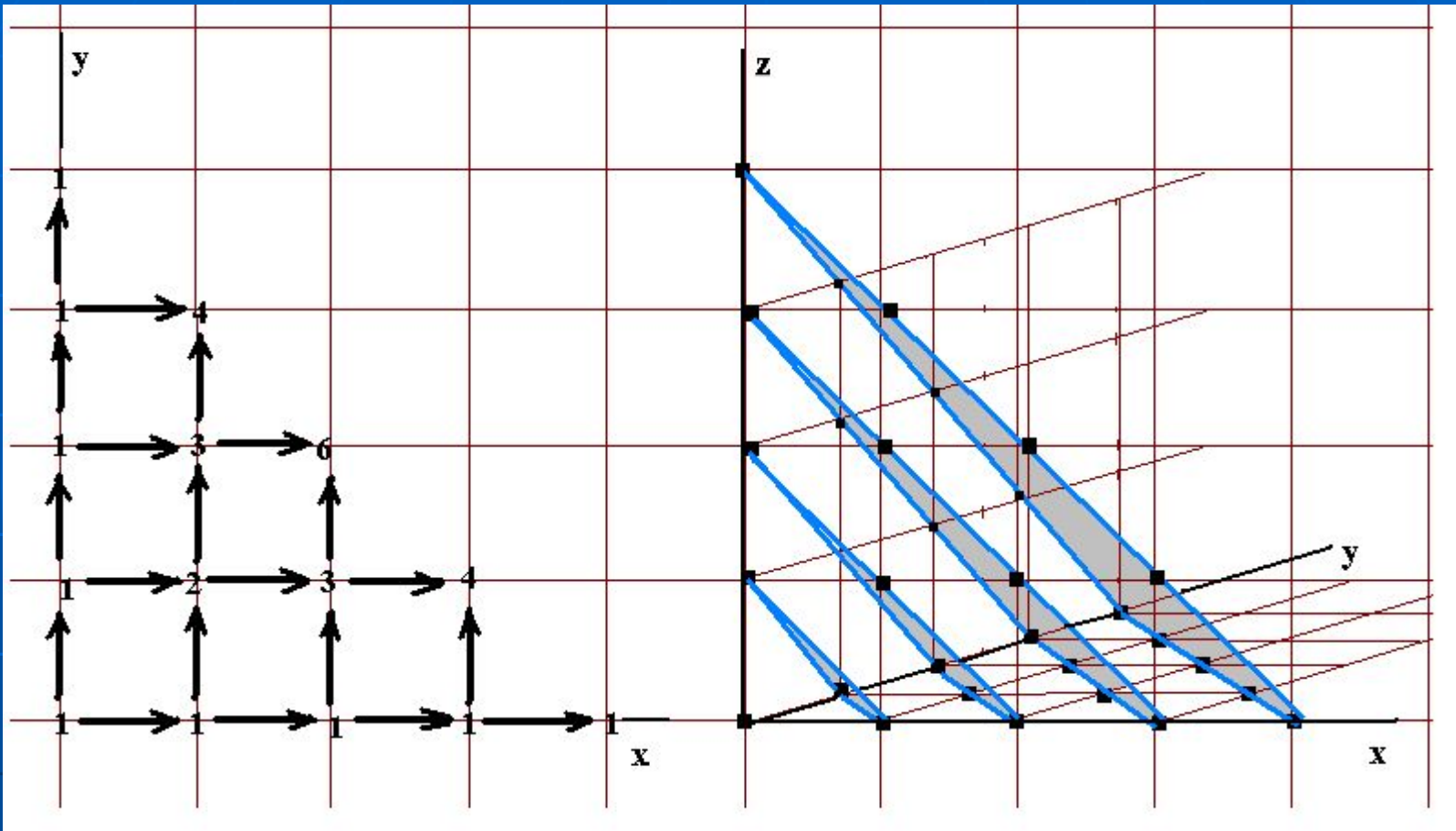
- $f(I^n) = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n)$ – вектор граней.
- f_0 – число вершин;
- f_1 – число ребер;
- f_2 – число квадратов;
- f_3 – число кубов; ...
- $f_n = I^n$;
- $f_k = C(n, k) 2^{n-k}$;
- $f(I^4) = (16, 32, 24, 8, 1)$;



Характеристика Эйлера-Пуанкаре

- Формула Эйлера: $V - P + \Gamma = 2$
- Топологический инвариант
- $\chi = f_0 - f_1 + f_2 - f_3 + \dots + (-1)^{n-1} f_{n-1};$

Треугольник и пирамида Паскаля.



- Треугольник $C(x,y)=C(x-1,y)+C(x,y-1); C(0,0)=1;$
- Пирамида $V(x,y,z)=V(x-1,y,z)+V(x,y-1,z)+V(x,y,z-1); V(0,0,0)=1;$

Триномиальные коэффициенты.

$$(a+b+c)^n$$

$$V(n,k,l)a^l b^k c^{n-k-l}$$

$$l=x; k=y; n=x+y+z;$$

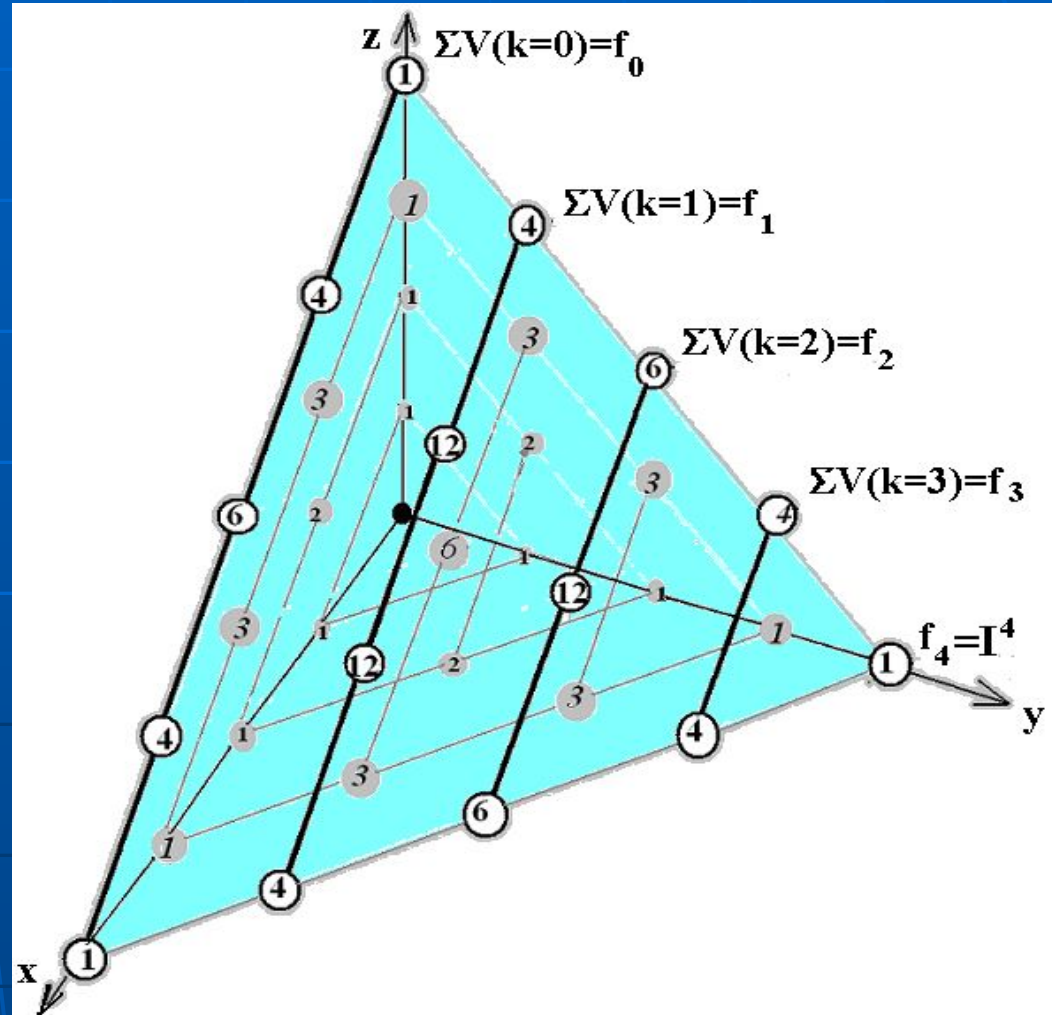
$$V(n,k,l) = \frac{n!}{l!k!(n-k-l)!}$$

$$\sum V(n,k,l) = C(n,k)2^{n-k};$$

$$l=1-(n-k);$$

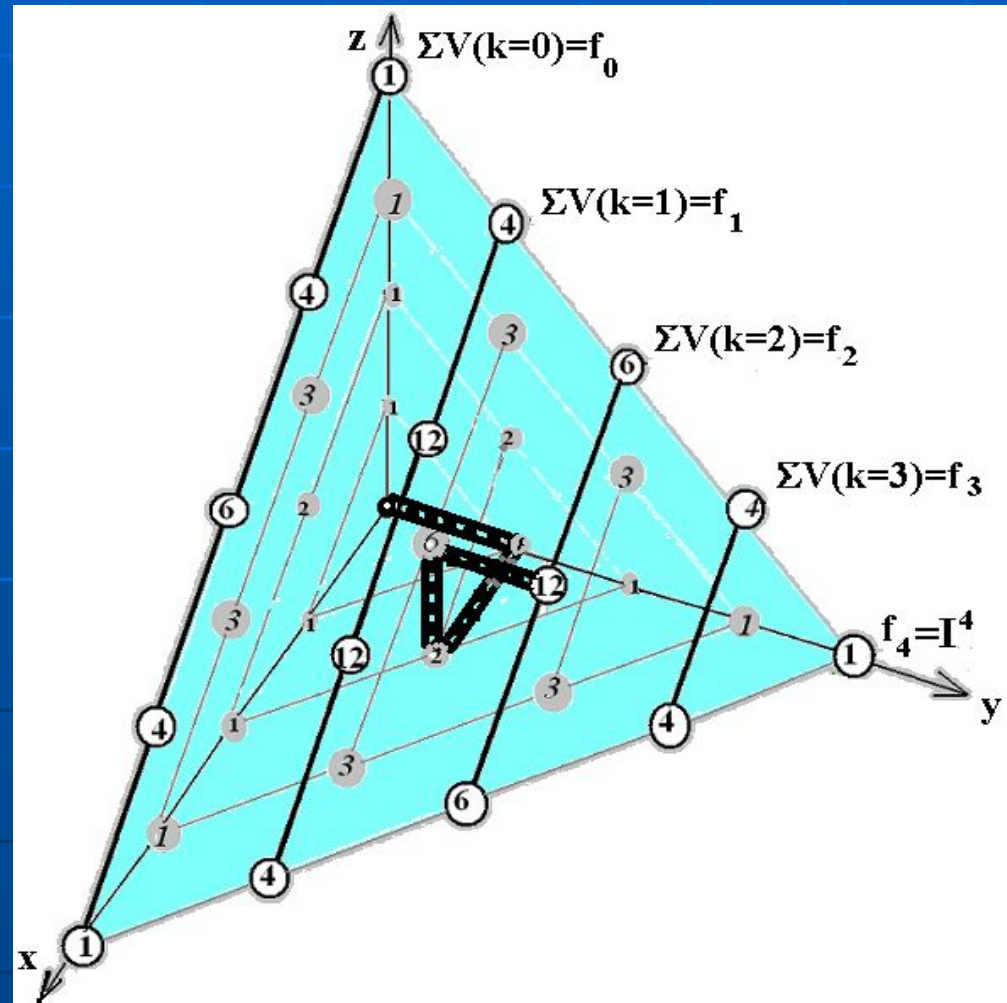
$$\sum V(n,k,l) = f_k;$$

$$(16, 32, 24, 8)$$



Кодирование k-граней.

- Каждой k-гранни соответствует кратчайший путь по решетке в вершину слоя n с $y=k$;
- Каждый путь кодируется троичным кодом. $\{0,1,2\}$

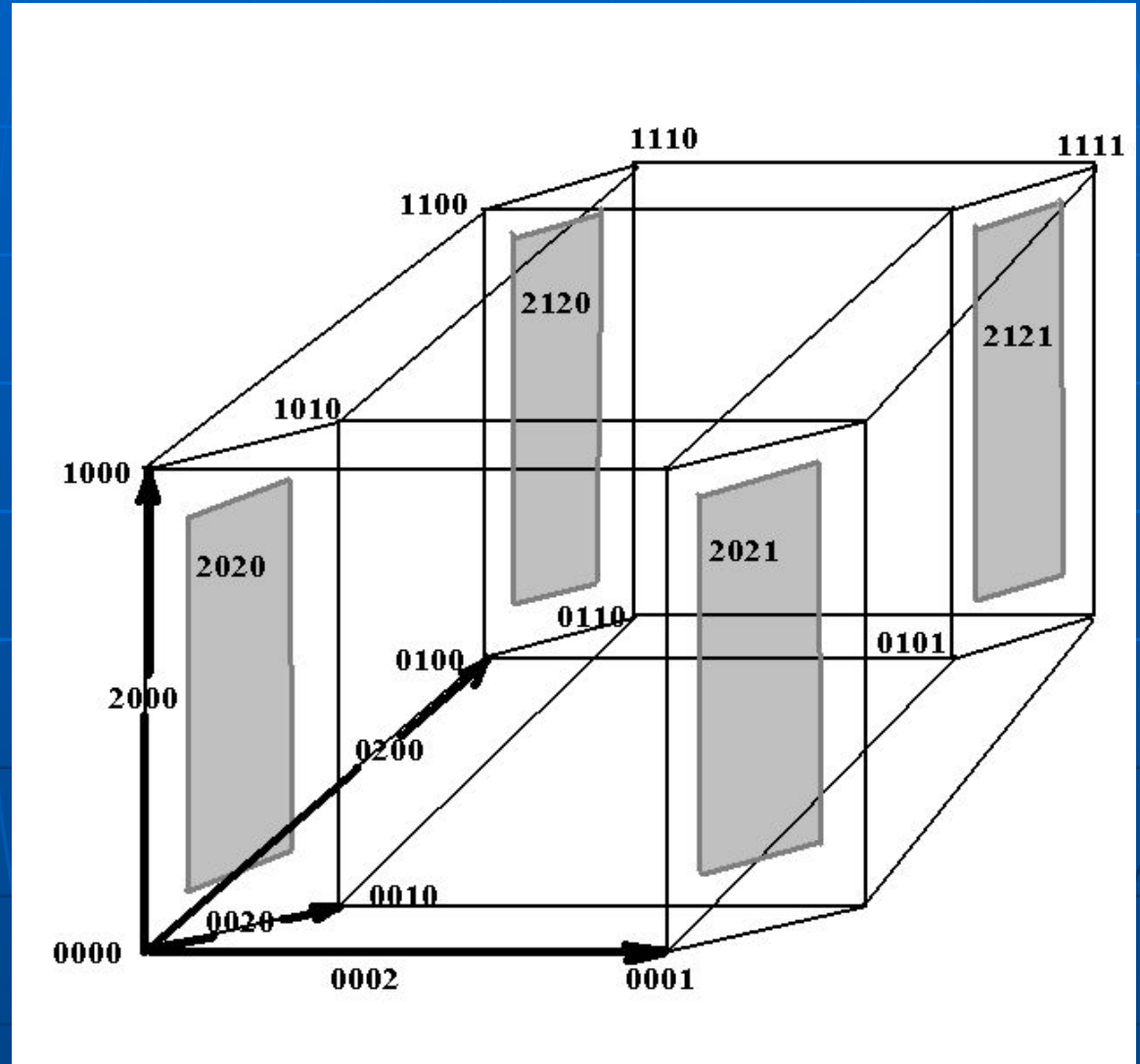


Кодировка I^4

- 0000 в 0001 в 0002 р 0010 в 0011 в 0012 р
 - 0020 р 0021 р 0022 к 0100 в 0101 в 0102 р
 - 0200 р 0201 р 0202 к 0210 р 0211 р 0212 к
 - 0220 к ... 2220 г 2221 г 2222 I^4
-
- Вершины- традиционная кодировка.
 - Ребра- коды с одной «двойкой»
 - К-границы- с к «двойками»

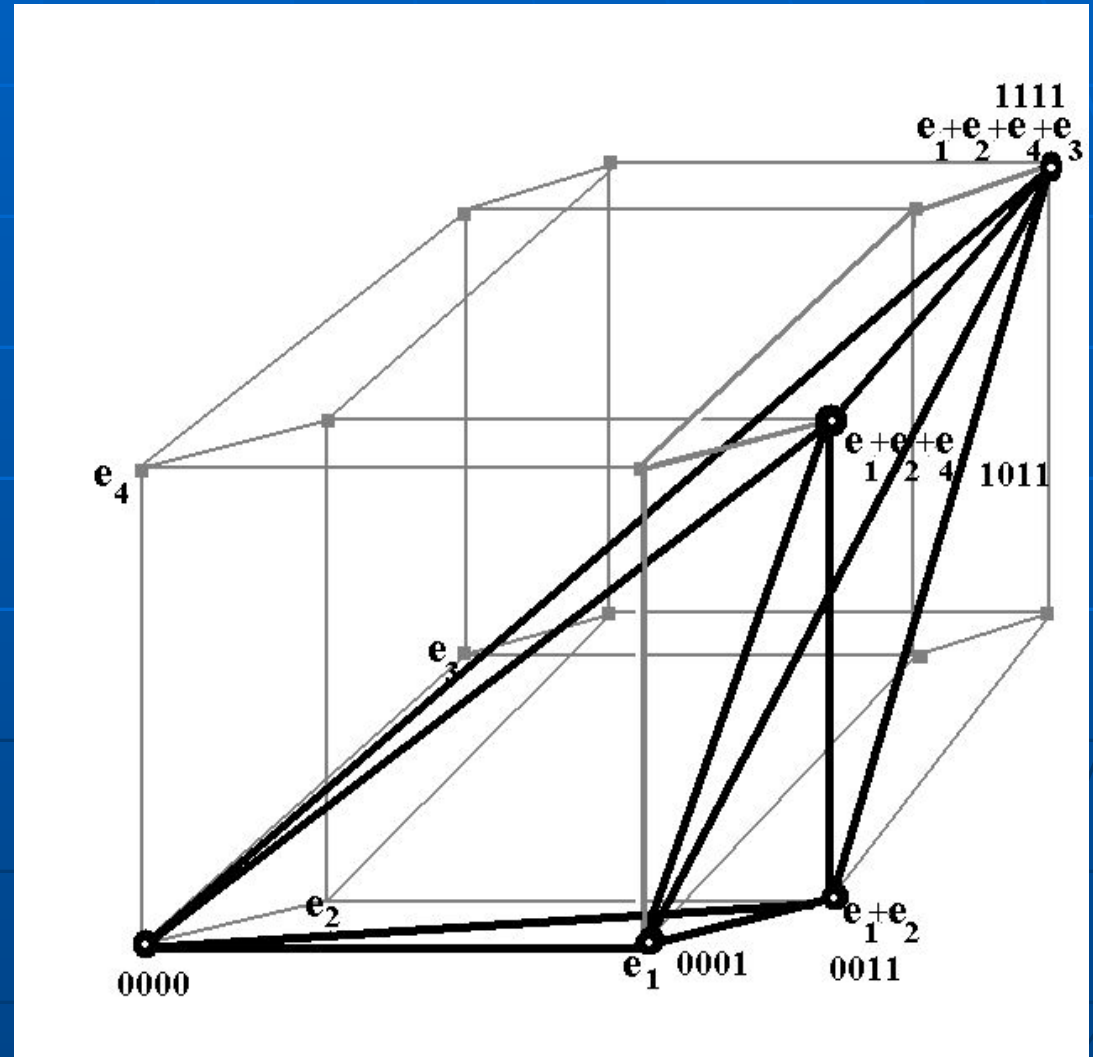
Геометрическая интерпретация

- Код 2120
- Ребра 0020 и 2000 -> грань 2020
- Грань 2020 транслируется из (0000) в (0100)



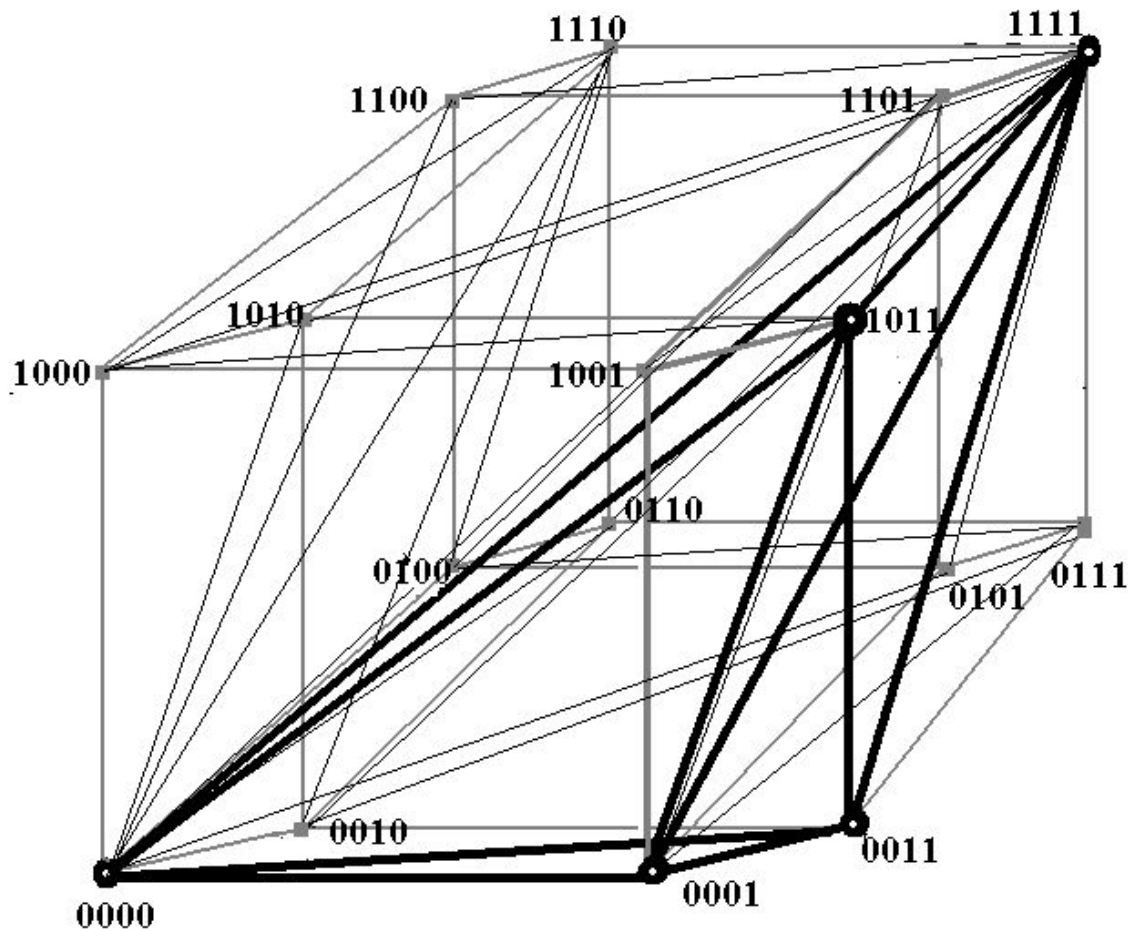
Генерация примитивной триангуляции (путевые симплексы)

- Симметрическая группа подстановок S_n .
- $s_i \in S_n$
- $\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \end{array} \right|$
- $e_{a_{i1}}, e_{a_{i1}} + e_{a_{i2}}, e_{a_{i1}} + e_{a_{i2}} + e_{a_{i3}}, \dots$ - последовательные вершины симплекса
- Рис. $\rightarrow 1\ 2\ 4\ 3$

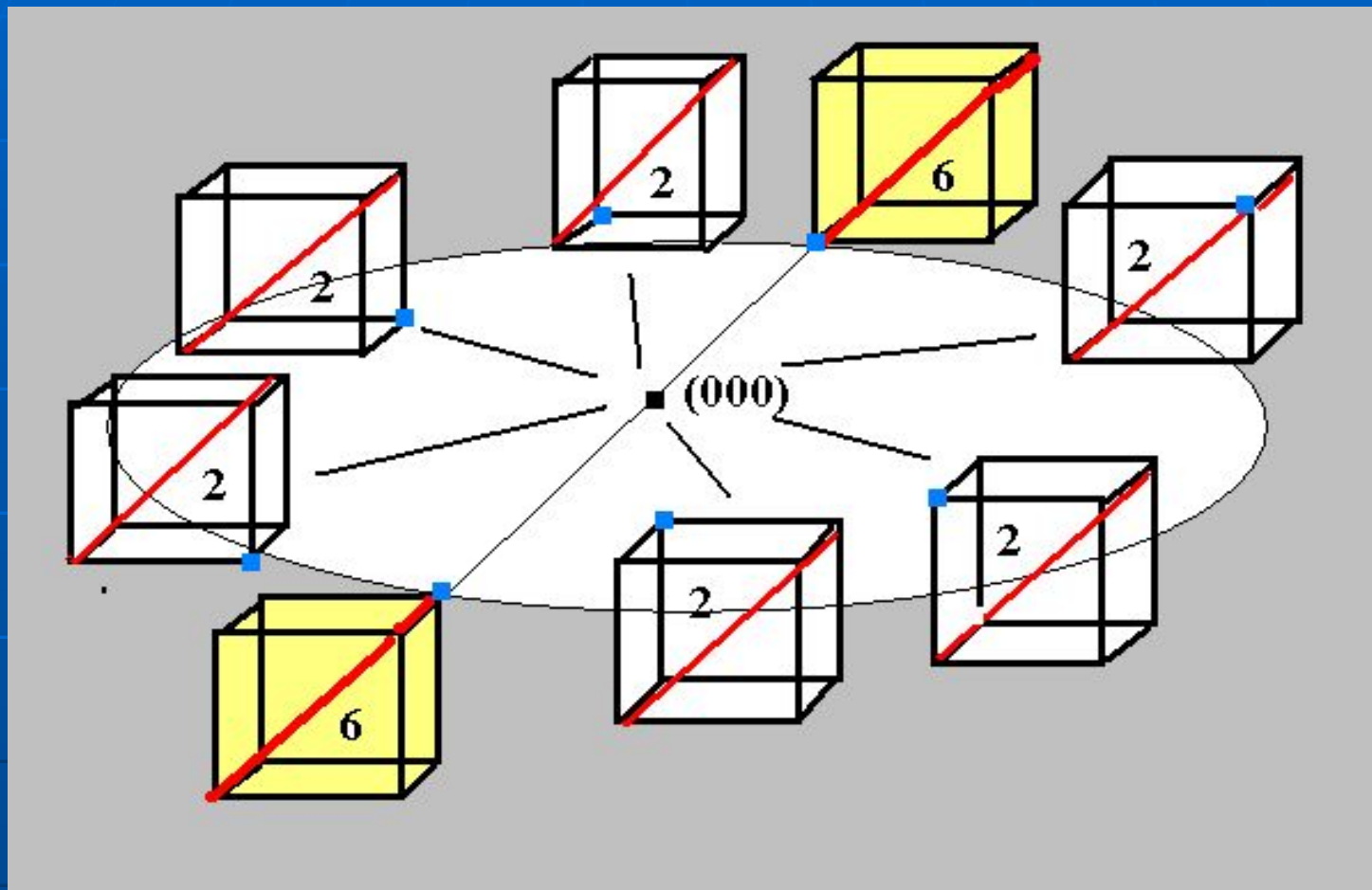


Примитивная триангуляция I^4 .

- 24 симплекса могут быть закодированы 5-ью двоичными разрядами.



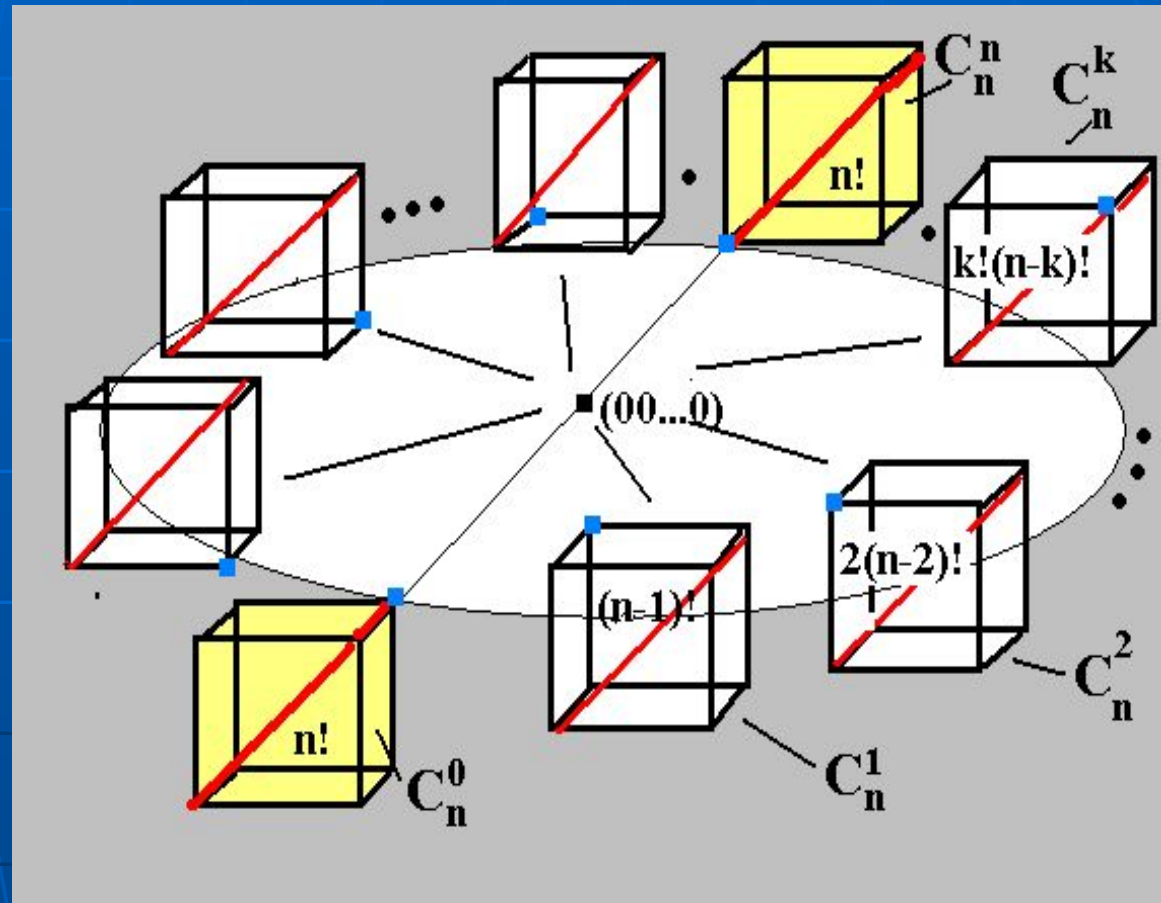
3d звезда-полиэдр и ее симплексы.



- Вклад кубов (по числу симплексов) из 8 октантов, содержащих (000) .

Симплициальная структура транслируемого n d звезды-полиэдра

- $W(k)$ -число симплексов с вершиной $r=k$
- $S(k)$ -число n -кубов с вершиной $r=k$ в $(00\dots 0)$
- $W(k)=k!(n-k)!$;
- $S(k)=C(n,k)$;
- $S=\sum W(k)S(k)=(n+1)!$;
- $V(P)=n+1$;



Кодирование симплексов .

- 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432,
0 1 2 3 4 5
- 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431,
5 7 8 9 10 11
- 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421,
12 13 14 15 16 17
- 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321
18 19 20 21 22 23
- $a_0 n! + a_1 (n-1)! + \dots + a_{n-2} 2! + a_{n-1} 1! = N^0; a_k < k+1;$
- $21 = (3, 1, 1) \rightarrow 4231: 3+1=4, 1+1=2$ -ая из ост. $\rightarrow 2,$
 $1+1=2$ -ая из ост. $\rightarrow 3;$ и ост. 1

Транслируемые звездчатые nd-полиэдры.

■		2d	3d	4d	5d	6d	7d
■ B	6	14	30	62	126	254	
■ S	6	24	120	720	5040	40320	
■ V	3	4	5	6	7	8	

Гомотопные расширения и сжатия комплексов-сумма преобразований MSP на границе комплексов.

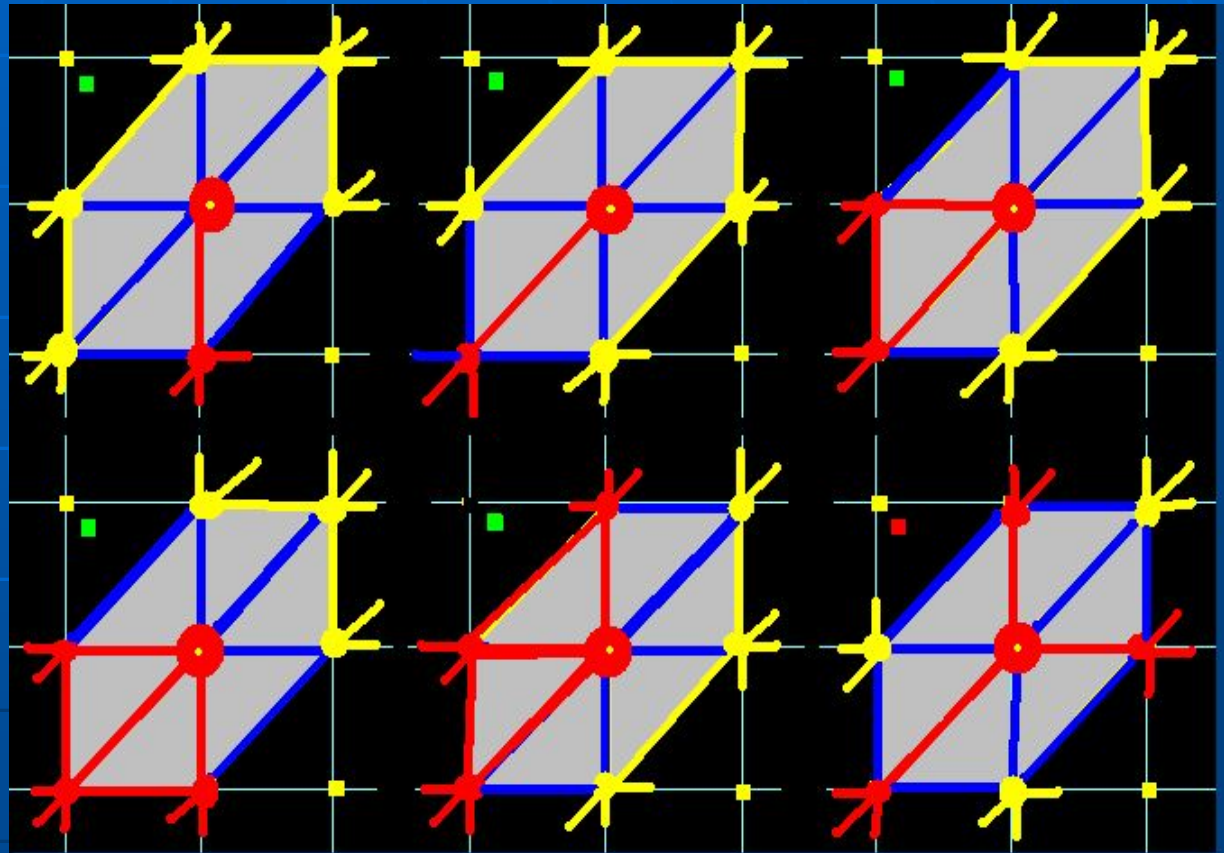
Топологический контроль-проверка
связности в MSP до и после
преобразования.

Для общего 3d случая объем вычислений
 $Q \sim N^3 \times V \times E \times N$ (для $N = 10^3$ $Q = \mathbf{10^{14}}$
память $M = \mathbf{100 Гб}$)

Для топол. процессора $Q = \mathbf{10^{11}}$ $M = \mathbf{1 Гб}$

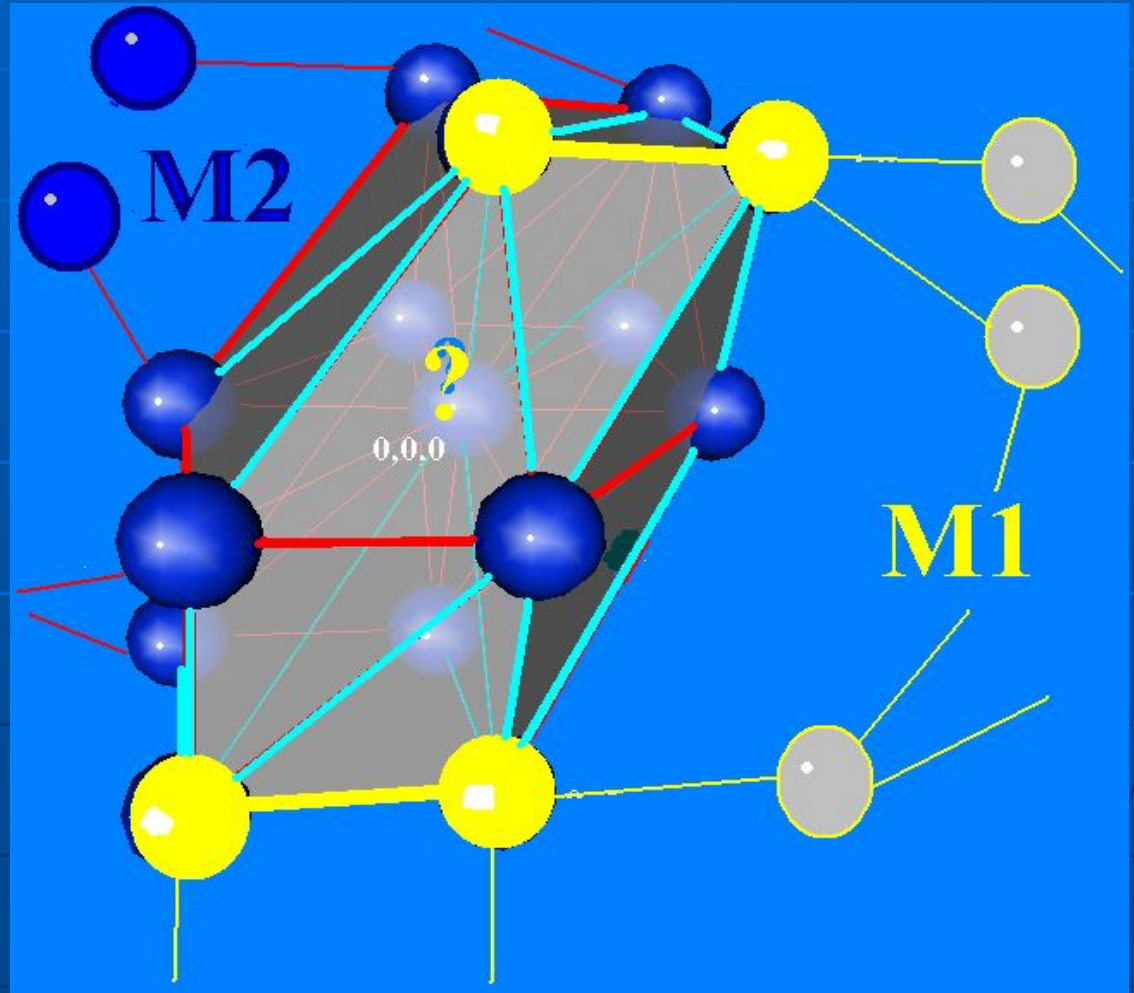
Допустимые преобразования без склеек и разрывов.

- Расширение «желтого» без склеек и разрывов «желтого» и «красного» зависит только от ситуации в «выколоте» зв.полиэдре.

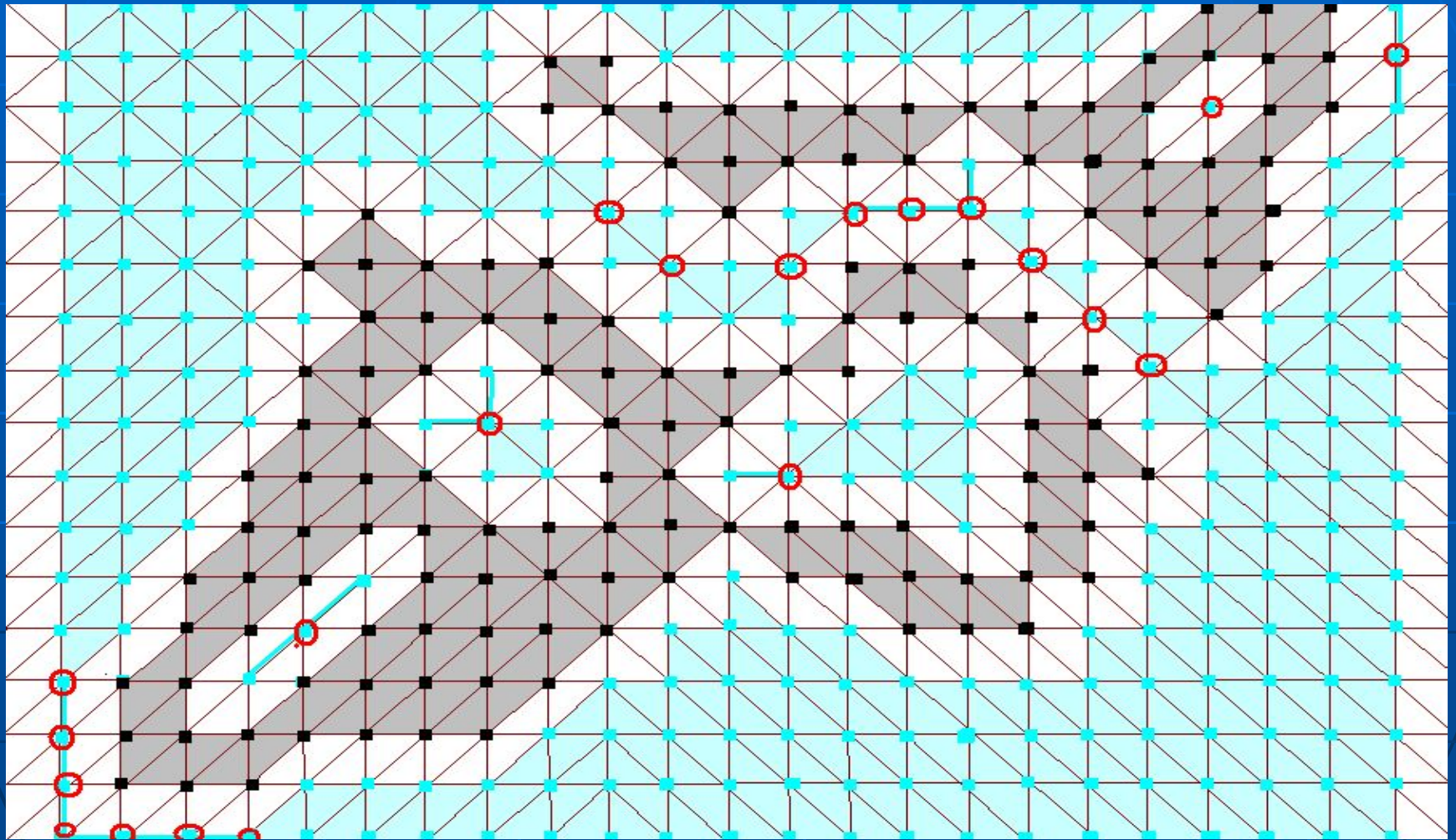


Анализ связности множеств M1 и M2 на границе полиэдра.

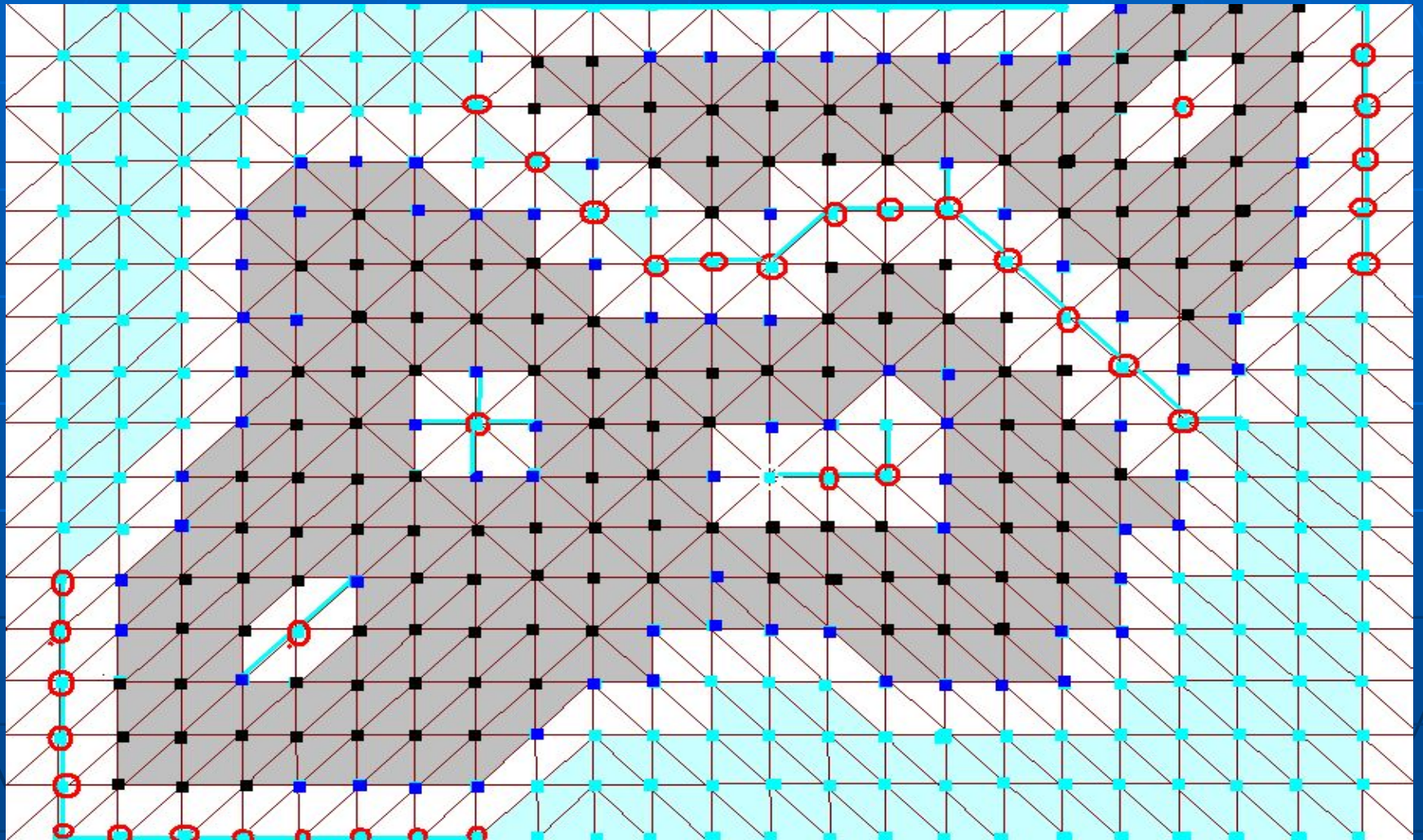
- M1 на границе несвязно.
- M2 на границе связно.
- Если переход (000) в M1, то M1 и M2 связны-изменения в связностях недопустимы!



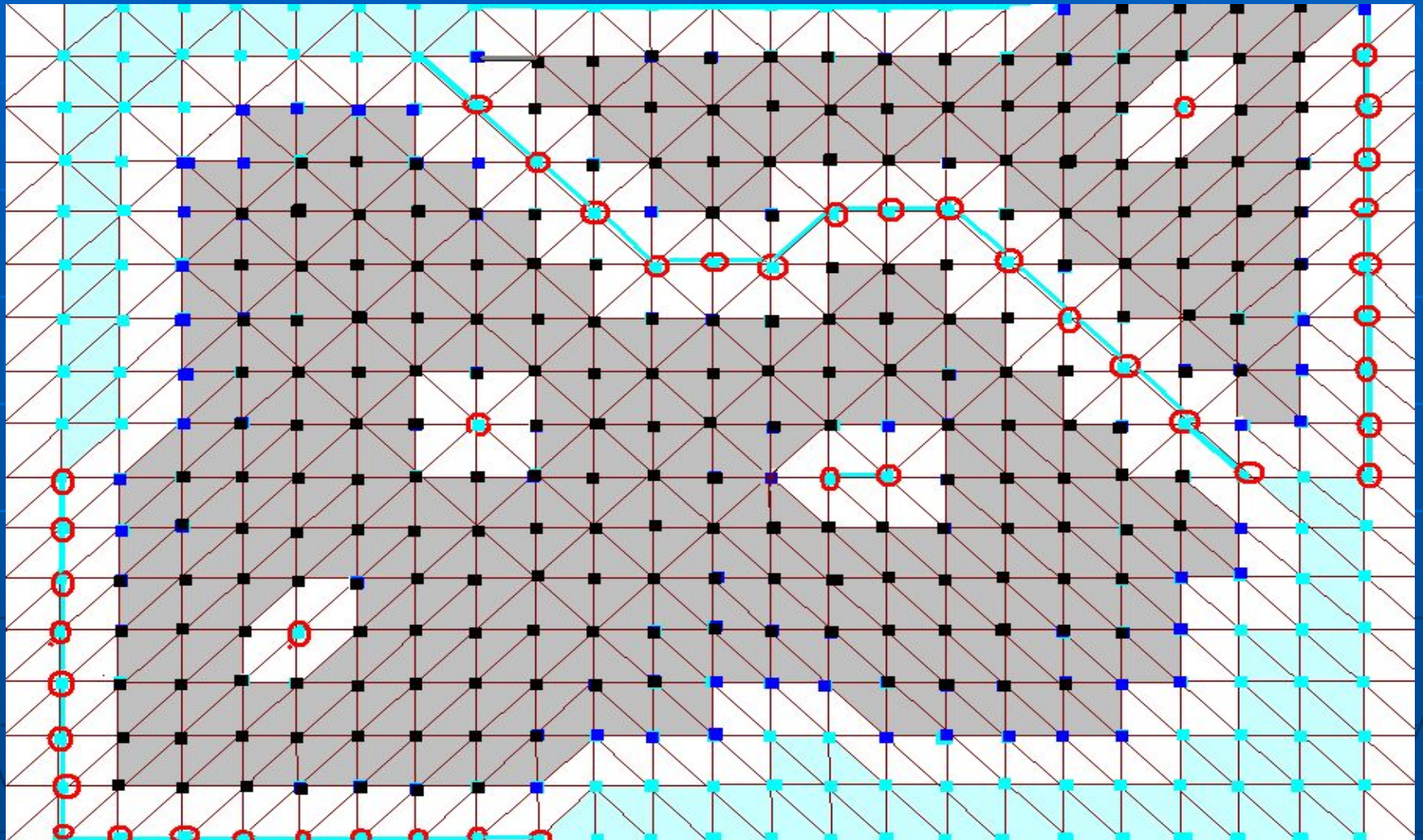
Три 2d комплекса



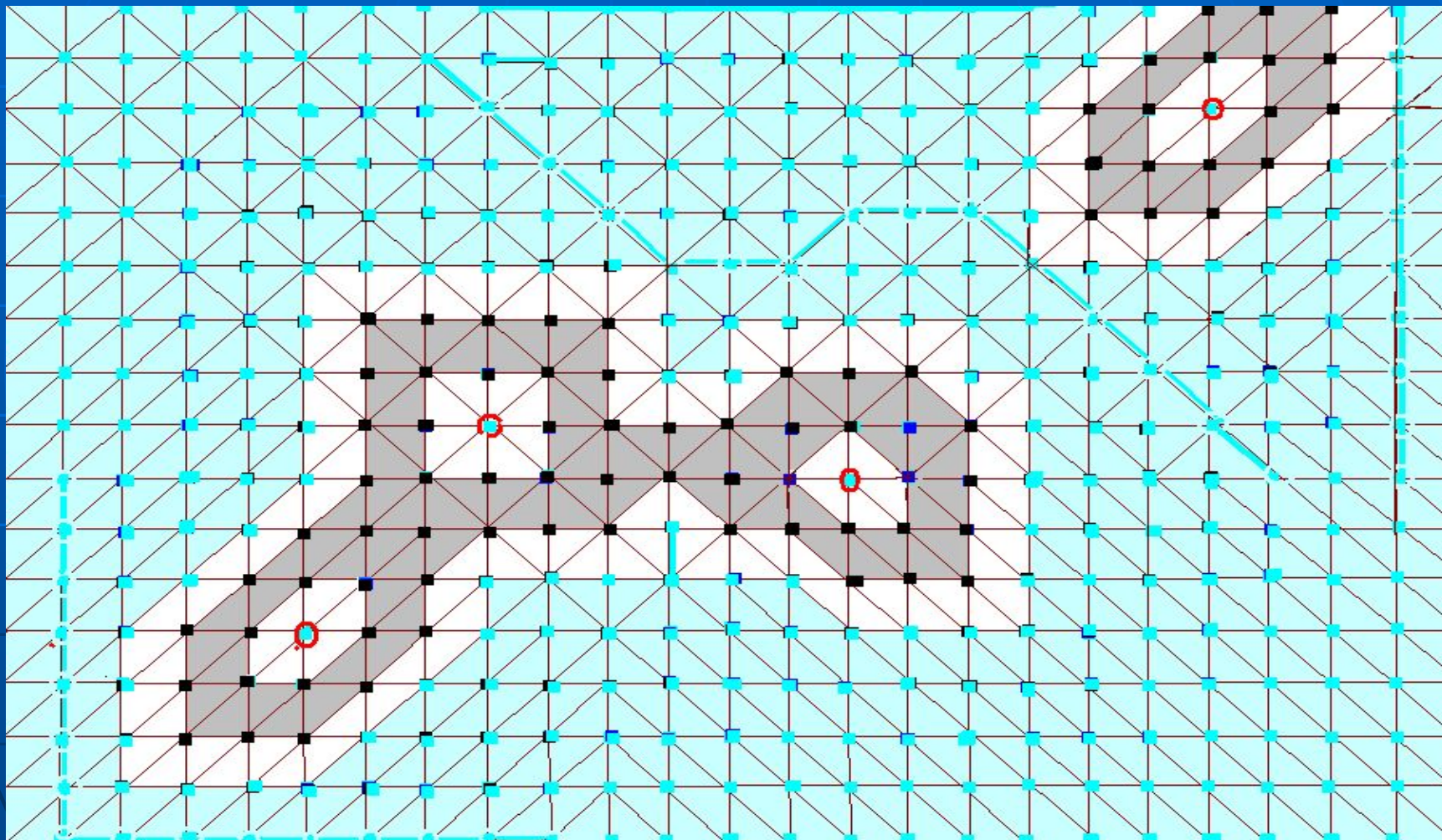
Расширение черного.



Расширение черного.



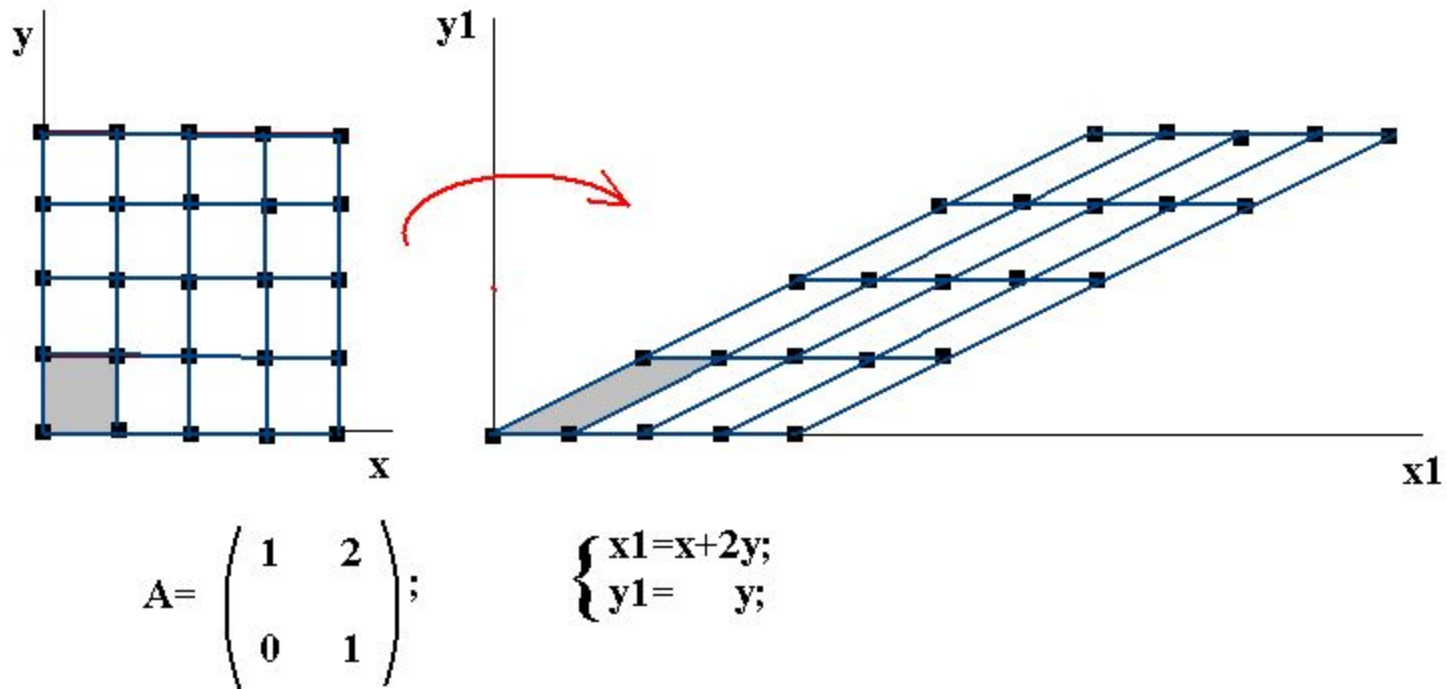
Сжатие черного.



Приближение к евклидовой метрике на Z_n .

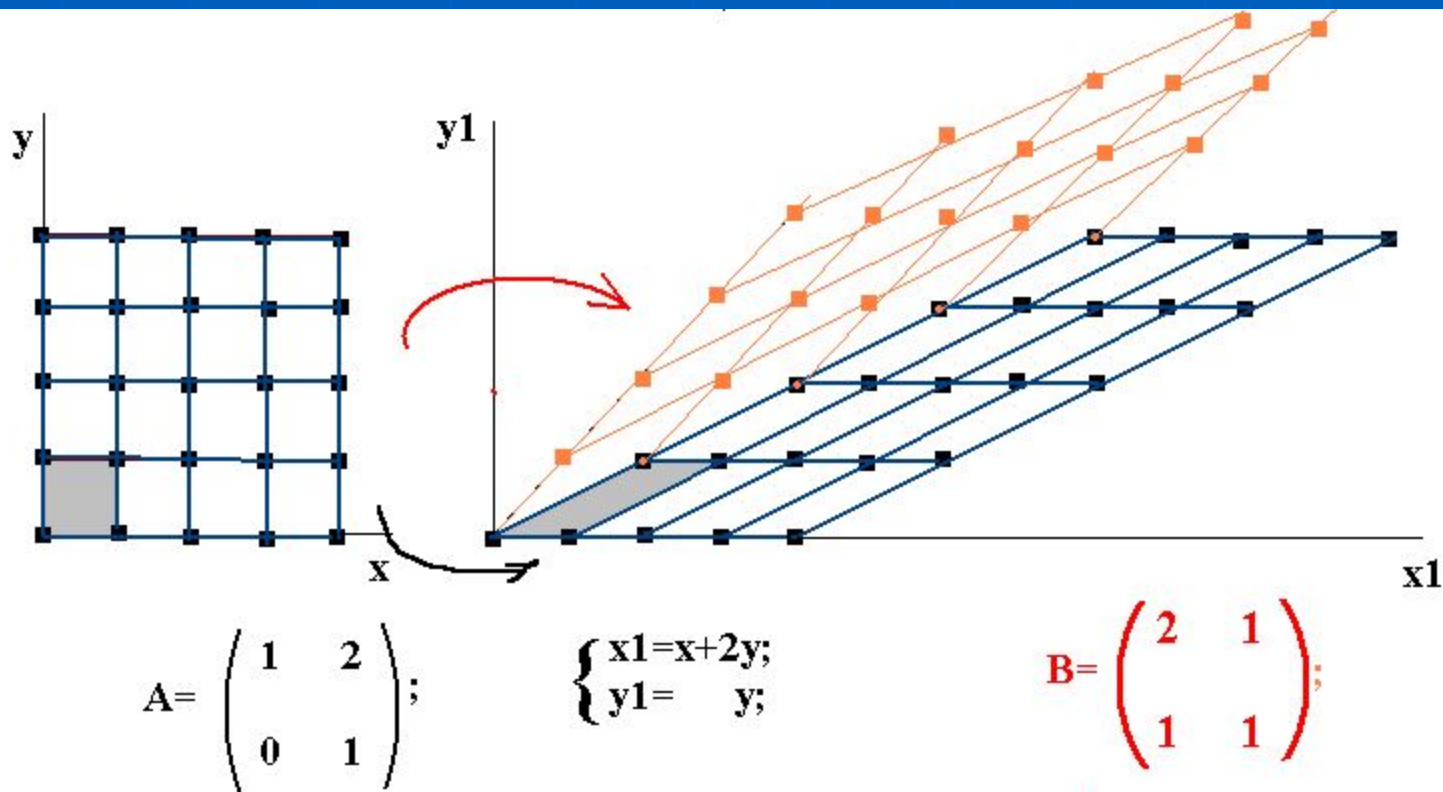
- Метрика на ребрах звездчатых полиэдров (многогранная метрика) далека от евклидовой.
- Расширить множество простых ребер (увеличить норму) в зависимости от заданной погрешности приближения.

Линейные преобразования на решетках.



- Унимодулярные матрицы- модуль определителя = 1.
- Линейные унимодулярные преобразования сохраняют площадь (объем) фигур(тел).

Составление веера.



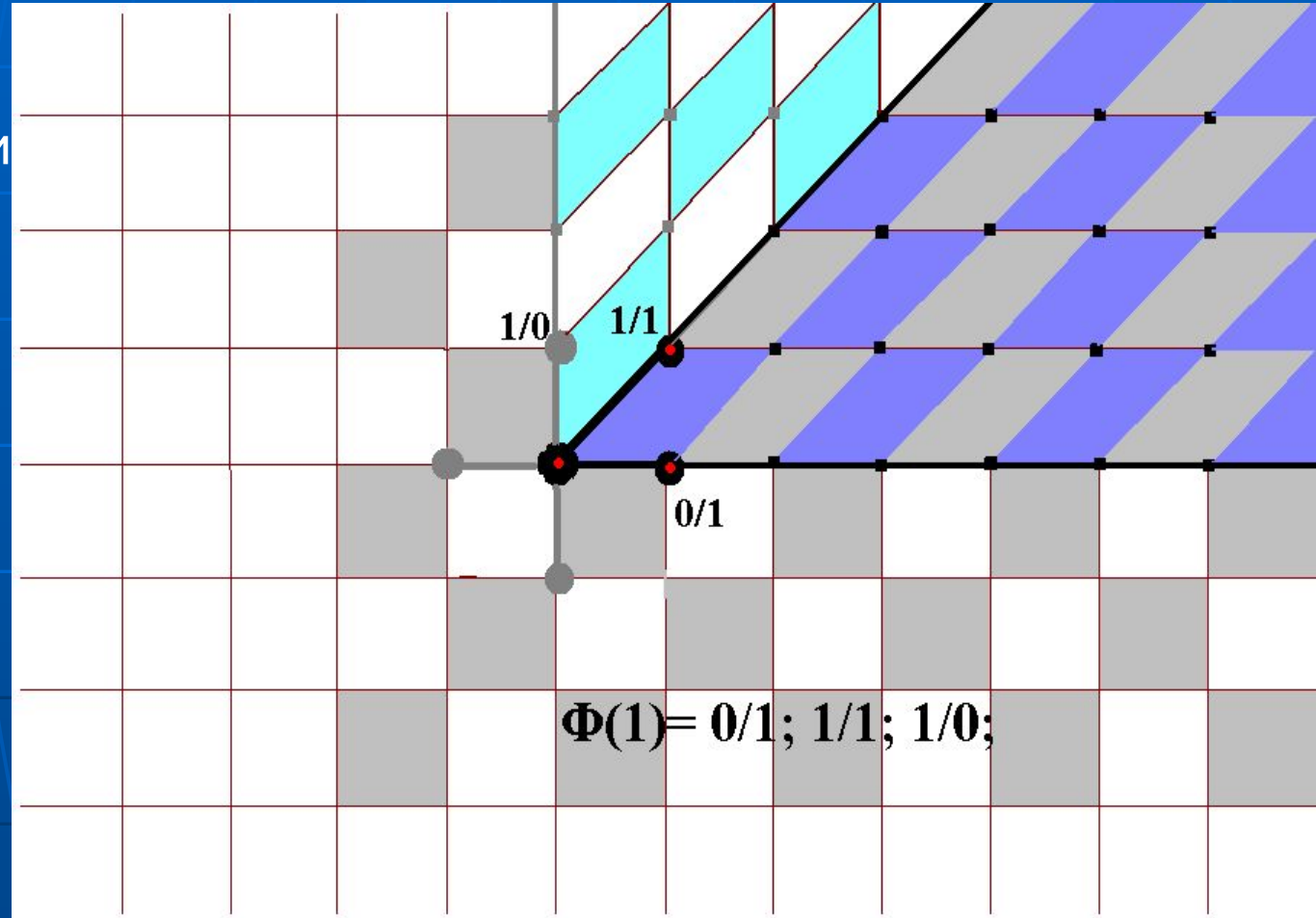
- Стыковку секторов веера обеспечивают «соседние» унимодулярные матрицы.

Несократимые дроби и простые ребра (веер Фаррея).

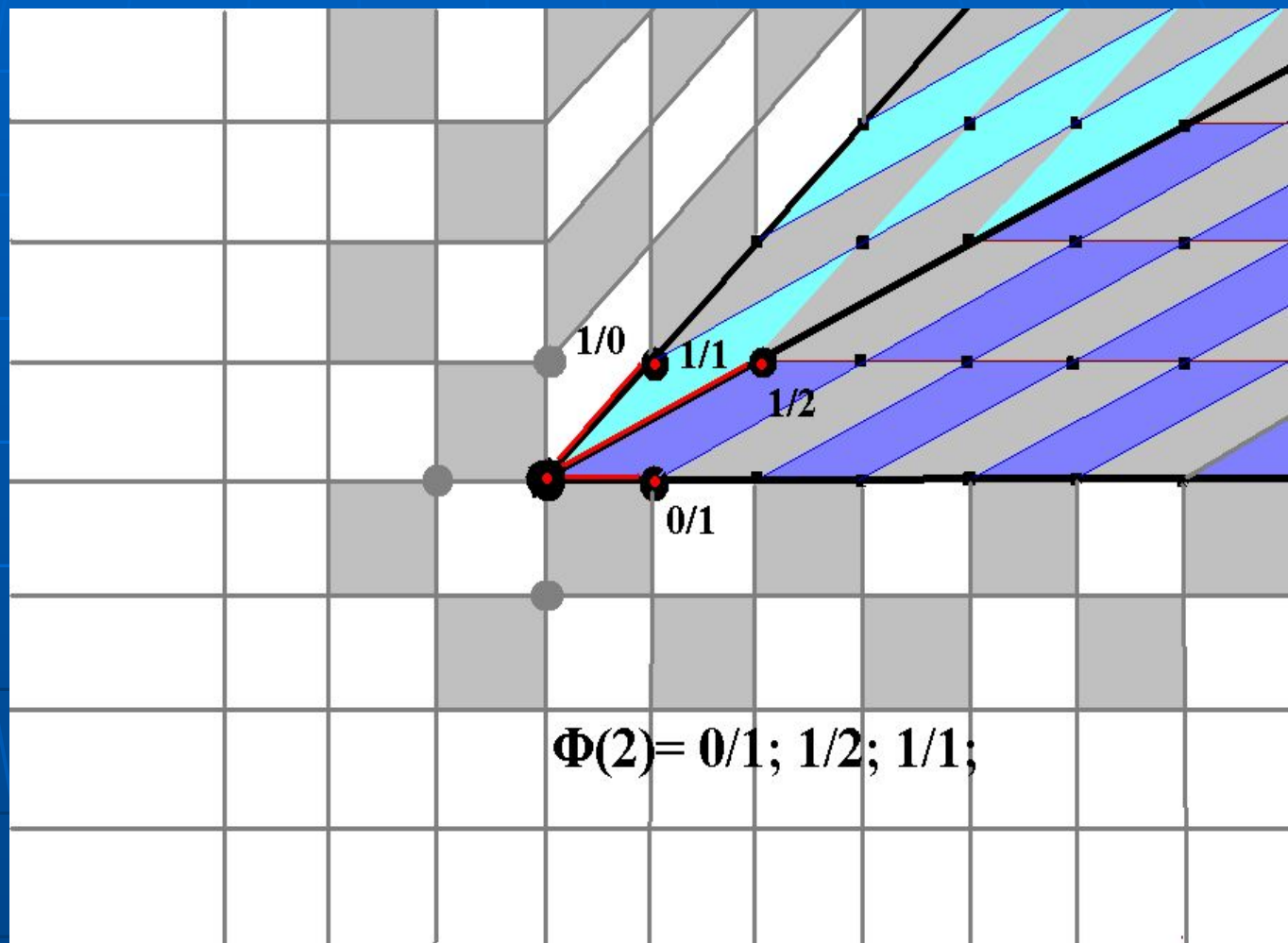
В каждом секторе
целые точки
образуют решетки
с базисами
 $\{(0,1), (1,1)\};$
 $\{(1,1), (1,0)\}.$

С увеличением
порядка $\Phi(k)$
длина по ребрам
решеток
приближается к
евклидовой.

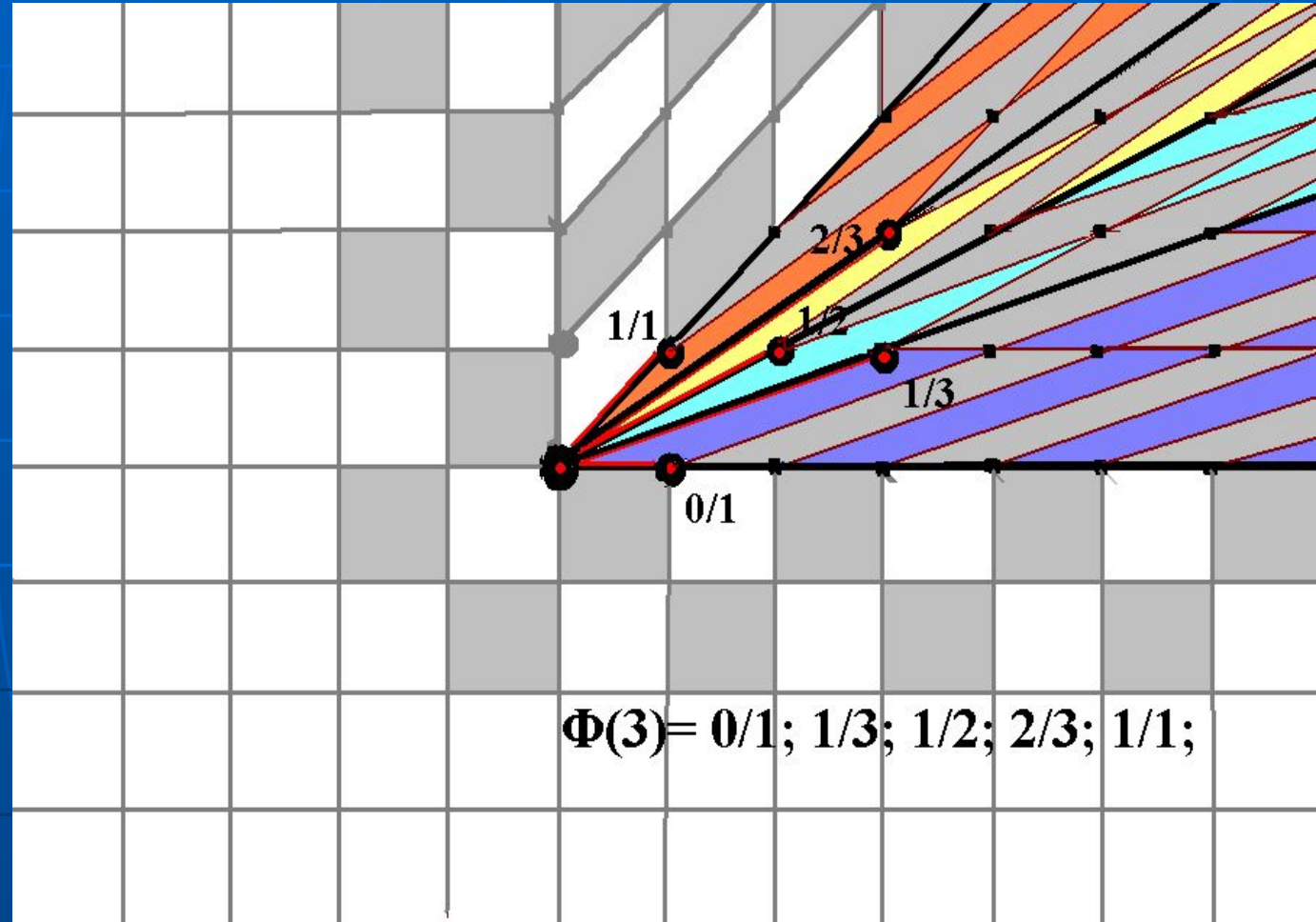
$$\Delta = L - L_e / L_e = \sim \varphi^2 / 4 + o(\varphi^4);$$



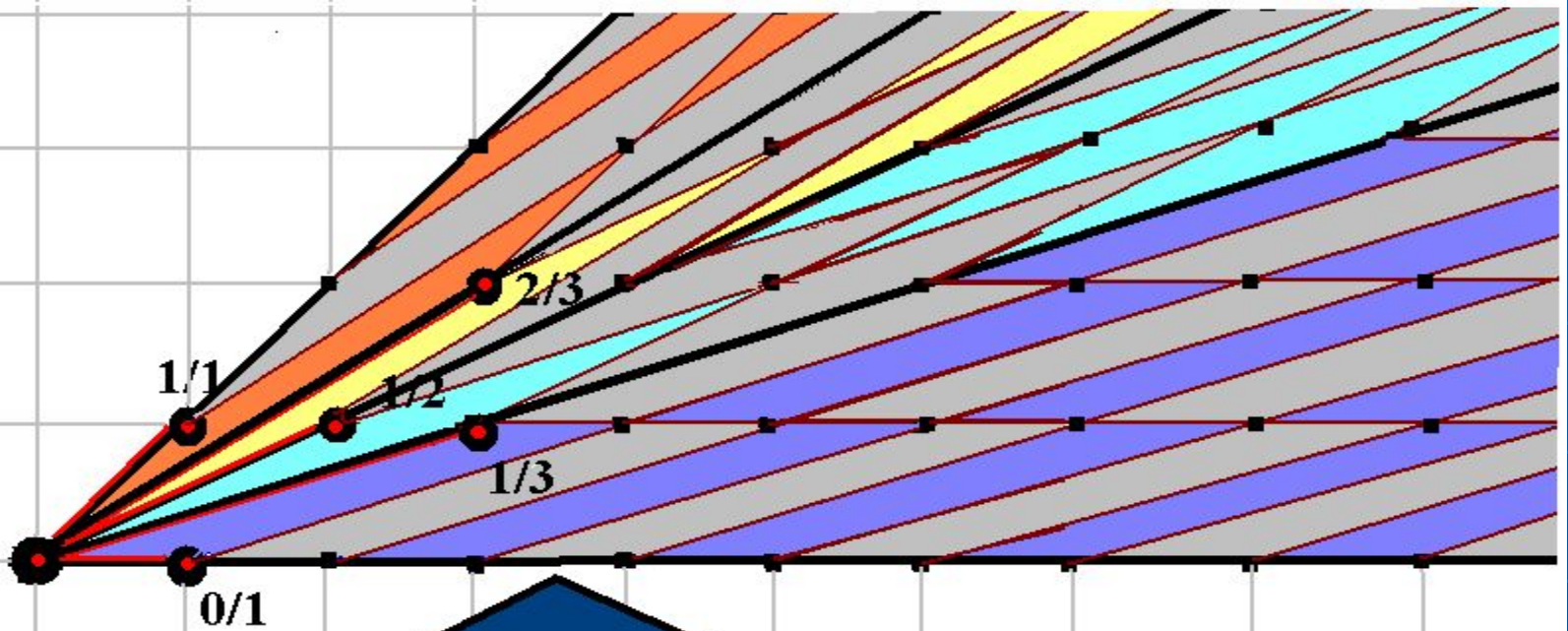
Увеличение порядка $\Phi(k)$.



Увеличение порядка $\Phi(k)$.



Отображения $Z^2(0, \pi/2)$ на $Z^2(i, i+1)$

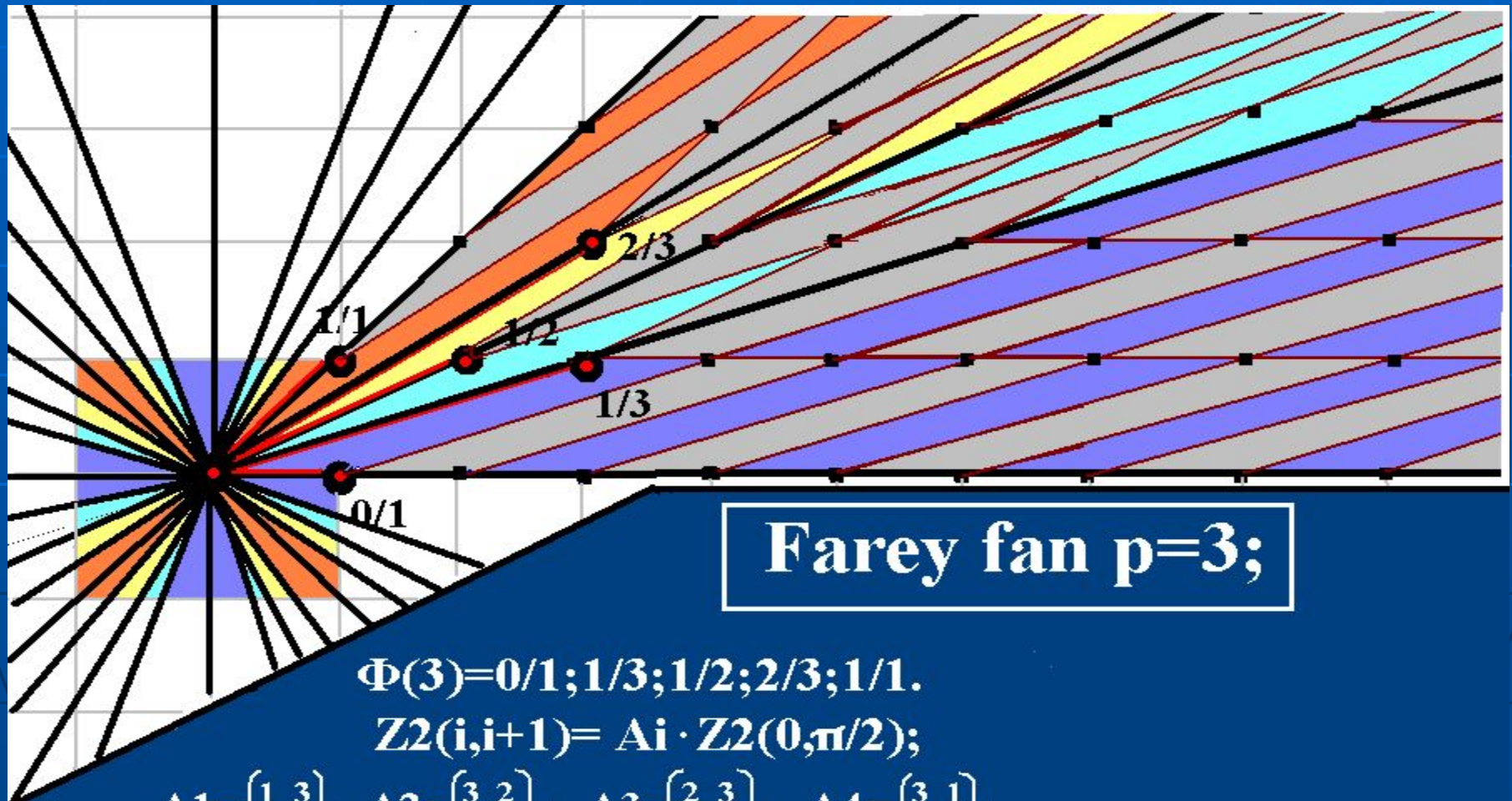


$$\Phi(3) = 0/1; 1/3; 1/2; 2/3; 1/1.$$

$$Z^2(i, i+1) = A_i \cdot Z^2(0, \pi/2);$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

Веер Фарея 3-го порядка.



$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

Неравномерность уменьшения углов в секторах веера.

- Для веера $\Phi(3)$:
- Сектор $((0/1)(1/3)) \sim 1/3$.
- Сектор $((1/3)(1/2)) \sim 1/6$.
- Коррекция процедуры генерации несократимых дробей-наибольшие углы разбивать чаще.

Приближение к евклидовой метрике.

- Для сектора веера с базисом b_i, b_j и углом φ :
- $L = \lambda_1 \rho(b_i) + \lambda_2 \rho(b_j)$; на решетке,
- L_e - евклидова длина между этими точками.
- Максимальная отн. погрешность в секторе:
- $\Delta m(\varphi) = L - L_e / L_e = \varphi^2 / 4 + O(\varphi^4 / 16)$;

Для построения веера в R^n .

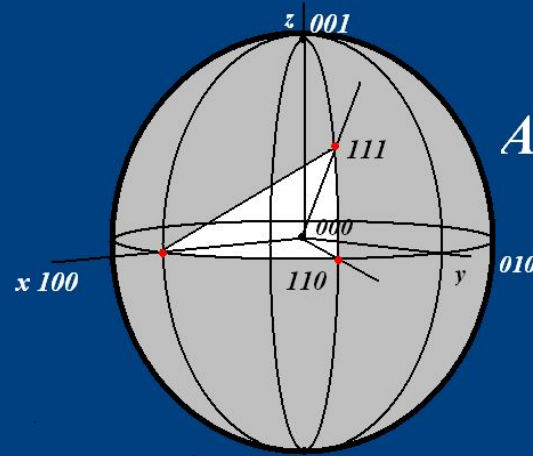
- Множество целочисленных квадратных матриц: $\{A_i\}$.
- $|A_i| = 1$ сохраняет объемы.
- Бесконечная группа с E -ед.диагон.м.
- **Аналог несократимых дробей-простые целые n -мерные вектора (компоненты вектора, как целые числа не имеют общего делителя > 1).**

Построение 3d веера для заданной Δ -итерационная процедура на 1/48 сферы.

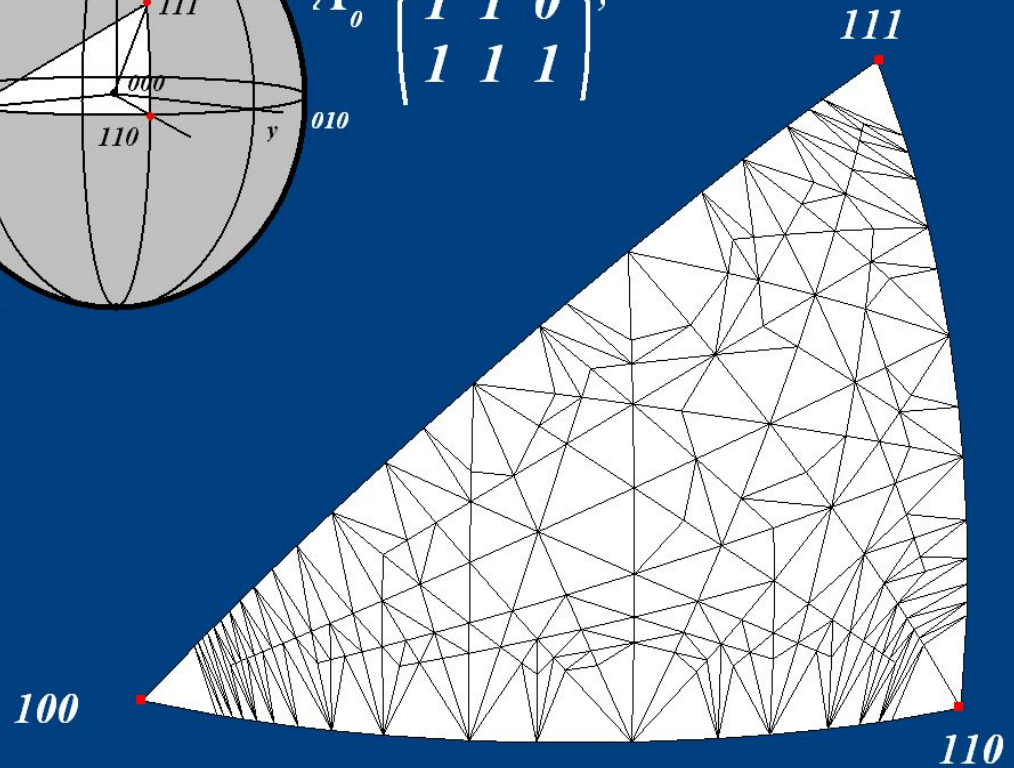
Вырезанному сектору соответствует матрица A_0 из простых векторов.

$|A_0| = 1$;

Замена строки в матрице суммой строки с другой не меняет основных свойств матрицы.

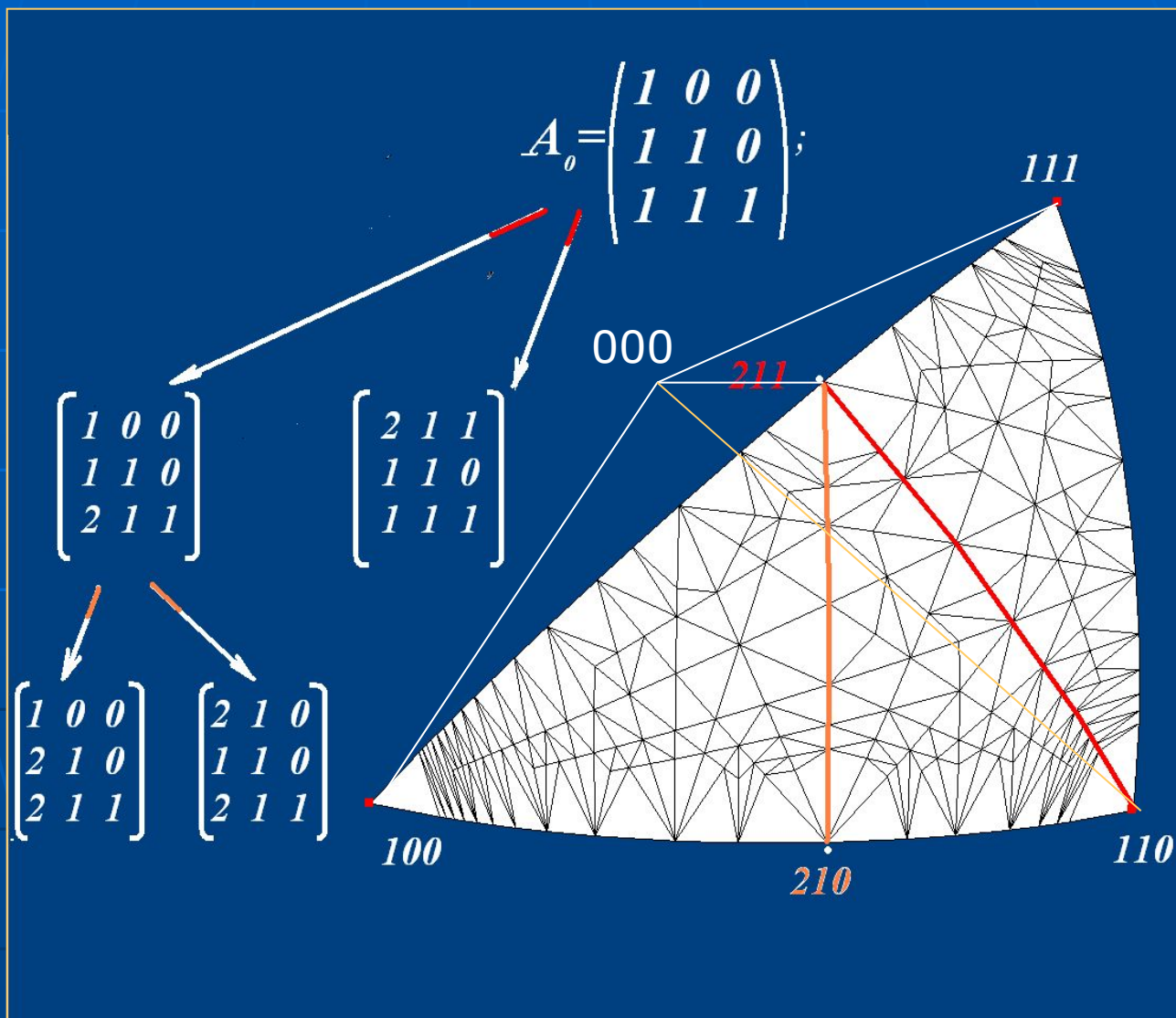


$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$



Веерная триангуляция.

Определение грани(ребра) с макс. углом и разбиение ребра сложением векторов (строк матрицы).
Продолжение процедуры, пока макс. угол $< \varphi_0(\Delta)$.
Затем зеркальные отображения на всю сферу.

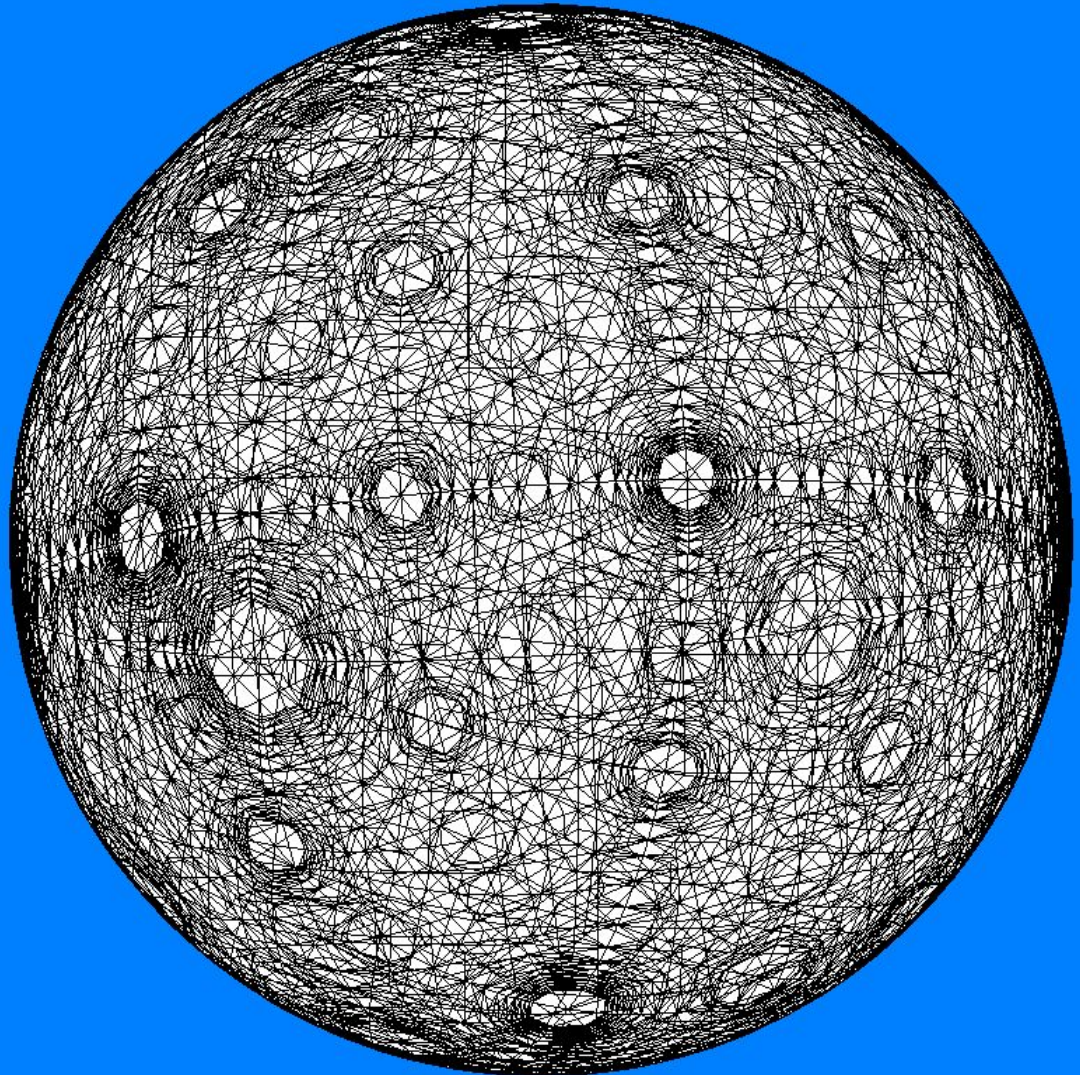


Nd-случай.

- Для nd случая триангулируется (а затем и хранится в памяти) $1/2^n n!$ – часть nd сферы.
- Вся nd сфера может покрываться зеркальными отображениями.

Проекция 3d веера на сферу (для $\Delta=L-L_e/L_e=0,001$)

- После зеркальных отображений 1/48 части на всю сферу.
- Веер содержит 7610 ребер.



Сравнение по числу ребер 3d веера Фарея и решеточного расслоения .

■ K	2	3	4	5	6	...	19
■ $\Delta(\%)$	4,85	2,41	1,44	1,17	0,76	...	0,1
■ N(k)	98	290	578	1154	1730	...	50114 ($\sim k^3$)
■ N*	74	194	266	530	722	...	7610 ($\sim k^2$)

Основные операции прототипа топологического процессора.

- Задание решетки и метода полиэдризации.
- Задание границ и преград.
- Задание комплексов. Индексные массивы(1:128)
- Определение связности комплексов и характеристики Эйлера-Пуанкаре.
- Задание преобразований и их режимов(целевых функций).
- Проведение преобразований. Анализ MSP-один такт!
- Выделение триангулированной границы.
- Генерация решеточного веера по заданной погрешности.
- Прогон метрической волны от множества-источника и построение эквидистантного графа.
- Операции над эквидистантными графами.
- Все операции эмулированы и верифицированы на решетках до 200x200x200.
- Видеопоказ на <http://www.vizcom.srcc.msu.ru>

Построение «сферы» как 2d многообразия.

Заданы центр «сферы» и
преграды(2пластины).

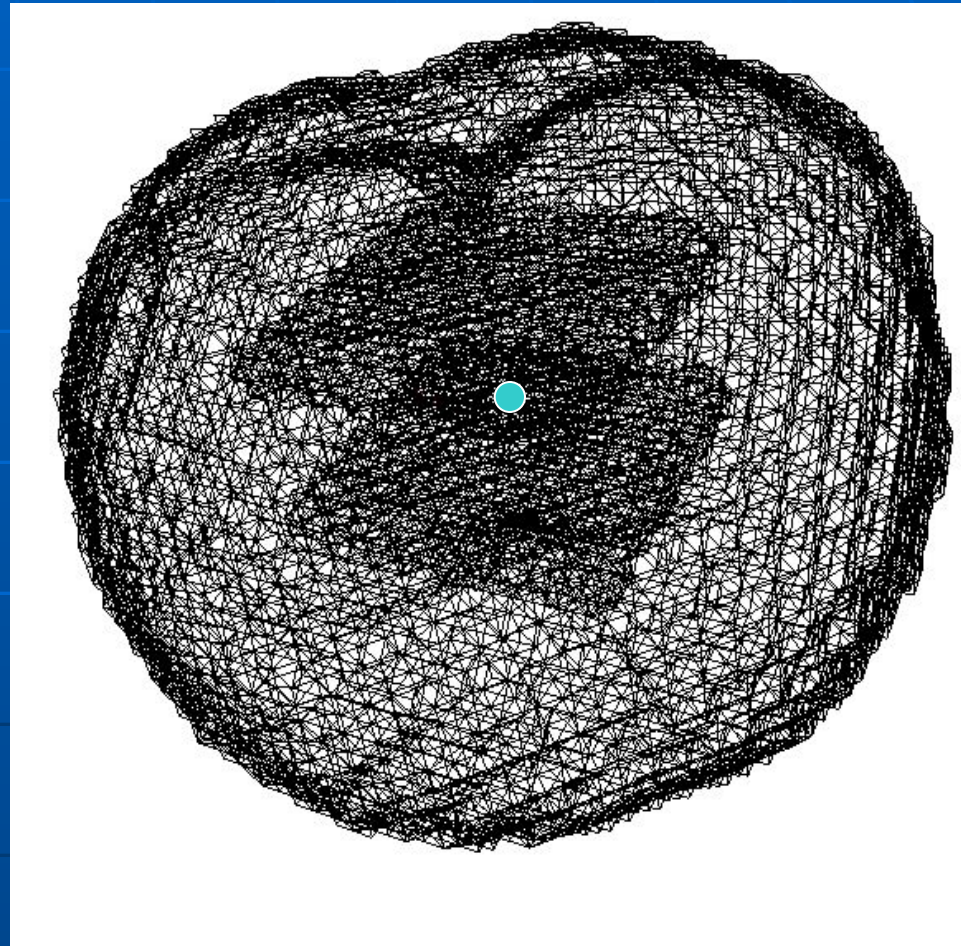
Построить «сферу»
минимального радиуса.

Условие: преграды
внутри «сферы», $\Delta =$
0,01;

Схема решения-
генерация веера для
 $\Delta=0,01$; метрическая
волна и эквидистантный
граф; сжатие комплекса
до преград; выделение
трианг. границы.

(750 000 симплексов)

$T(2\text{ГГц}, 512\text{Мб})=2\text{мин.}$



Ближайшие задачи.

- Перенос комплекса на кластер НИВЦ МГУ с целями:
 - 1. Решение задач на решетках: $3d-2000^3$, $4d-500^4$, $5d-200^5$, $6d-50^6$.
 - 2. Использование распараллеливания, потенциально близкого к клеточным автоматам.
 - 3. Полиэкранная визуализация сечений многомерных комплексов.

ОСНОВНЫЕ ССЫЛКИ.

- **Л.С.Понтрягин. Основы комбинаторной топологии.**
- П.С.Александров. Комбинаторная топология.
- Б.Н.Делоне. Теория стереоэдров.
- К.Чандрасекхаран. Введение в аналитическую теорию чисел.
- Д.Касселс. Введение в геометрию чисел.
- И.М.Гельфанд. Лекции по линейной алгебре.
- В.А.Ковалевский. Конечная топология.
- Ж.Бертран, М.Купри. Гомотопные преобразования.
- И.Кенмочи, А.Имийя. Глобальная полиэдризация.
- Г.Г.Рябов. Метрические и топологические волны на решетках.
- О.Д.Авраамова. Язык VRML.

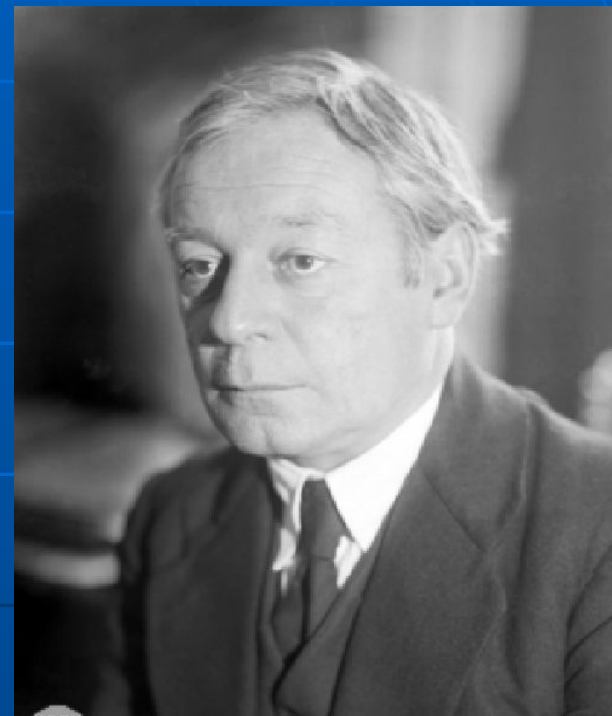
Поклон корифеям!



■ П.С.Александров



Л.С.Понтрягин



Б.Н.Делоне