

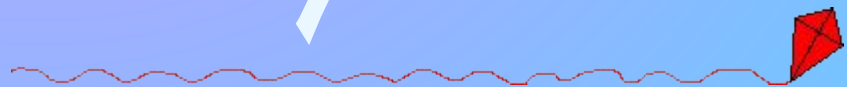
# Круги Эйлера

**Работу выполнили:  
учащиеся МОУ СОШ №3  
им. А.С.Макаренко  
Зубрилин А., Хоршева Е.,  
Рязанцева Т., Васильева В.,  
Козлова А., Сысоев И.  
Руководители:  
Старкова Н. В.  
Бородина Н. Н.**

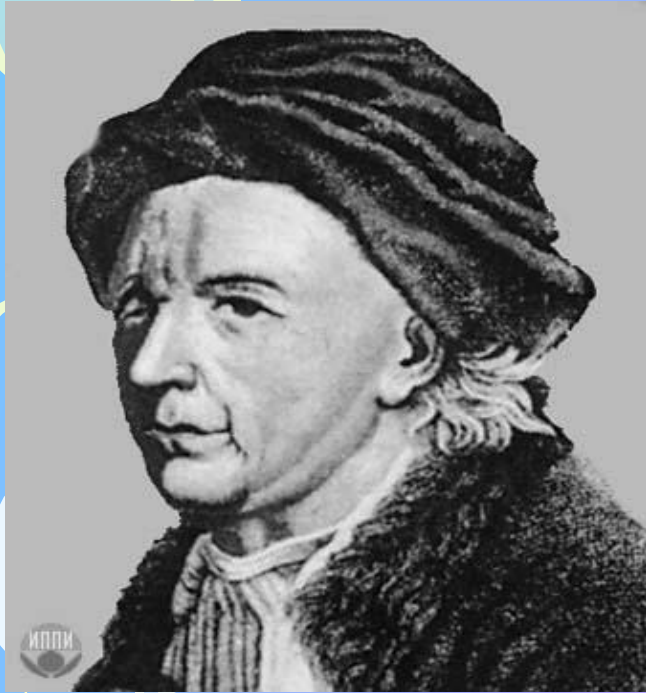


## Учебно-воспитательные цели.

Применение кругов Эйлера придает задачам алгебры наглядность и простоту. Круги Эйлера с успехом применяются также в логических задачах для изображения множеств истинности высказываний и во многих других случаях. Изображение условий задачи в виде кругов Эйлера, как правило, упрощает и облегчает путь к её решению. Данная тема, безусловно расширяет математический кругозор учащихся, обогащает арсенал средств, используемых в решении разнообразных задач.



# Биография



**Эйлер Леонард**

Родился 4 апреля 1707 г.,

г. Базель, Германия.

Математик, механик, физик.

Адъюнкт по физиологии, профессор физики,  
профессор высшей математики.

**Леонард Эйлер (1707-1783)**

Л. Эйлер — ученый необычайной широты интересов и творческой продуктивности. Автор свыше 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки. За время существования Академии наук в России, считается одним из самых знаменитых ее членов.






# Из истории

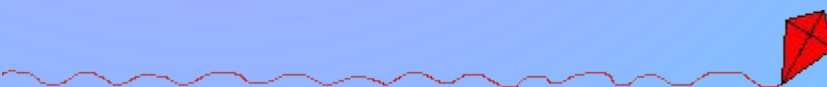
В математике рисунки в виде кругов, изображающих множества, используются очень давно. Одним из первых, кто пользовался этим методом, был выдающийся немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 - 1716). В его черновых набросках были обнаружены рисунки с такими кругами. Затем этот метод довольно основательно развил швейцарский математик Леонард Эйлер (1707 - 1783). Он долгие годы работал в Петербургской Академии наук. К этому времени относятся его знаменитые "Письма к немецкой принцессе", написанные в период с 1761 по 1768 год. В некоторых из этих "Писем..." Эйлер как раз и рассказывает о своем методе.







После Эйлера этот же метод разрабатывал чешский математик Бернард Больцано (1781 - 1848). Только в отличие от Эйлера он рисовал не круговые, а прямоугольные схемы. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнест Шредер (1841 - 1902). Этот метод широко используется в книге "Алгебра логики". Но наибольшего расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843 - 1923). С наибольшей полнотой этот метод изложен им в книге "Символическая логика", изданной в Лондоне в 1881 году. В честь Венна вместо кругов Эйлера соответствующие рисунки называют иногда диаграммами Венна; в некоторых книгах их называют также диаграммами (или кругами) Эйлера-Венна.



# Круги Эйлера – задачи на пересечение или объединение множеств

Это новый тип задач, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи.

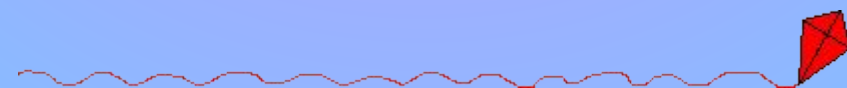
**Круги Эйлера**— геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

Метод Эйлера является незаменимым при решении некоторых задач, а также упрощает рассуждения. Однако, прежде чем приступить к решению задачи, нужно проанализировать условие. Иногда с помощью арифметических действий решить задачу легче.





# АЛГОРИТМ

- 1. ВНИМАТЕЛЬНО ИЗУЧИ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ**
  - 2. ПОСТРОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ**
  - 3. РАССТАВЬ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ**
  - 4. НАЙДИ НЕДОСТАЮЩИЕ ДАННЫЕ**
  - 5. ПРОВЕРЬ РЕШЕНИЕ**
- 

# СОКРОВИЩА ФЛИНТА



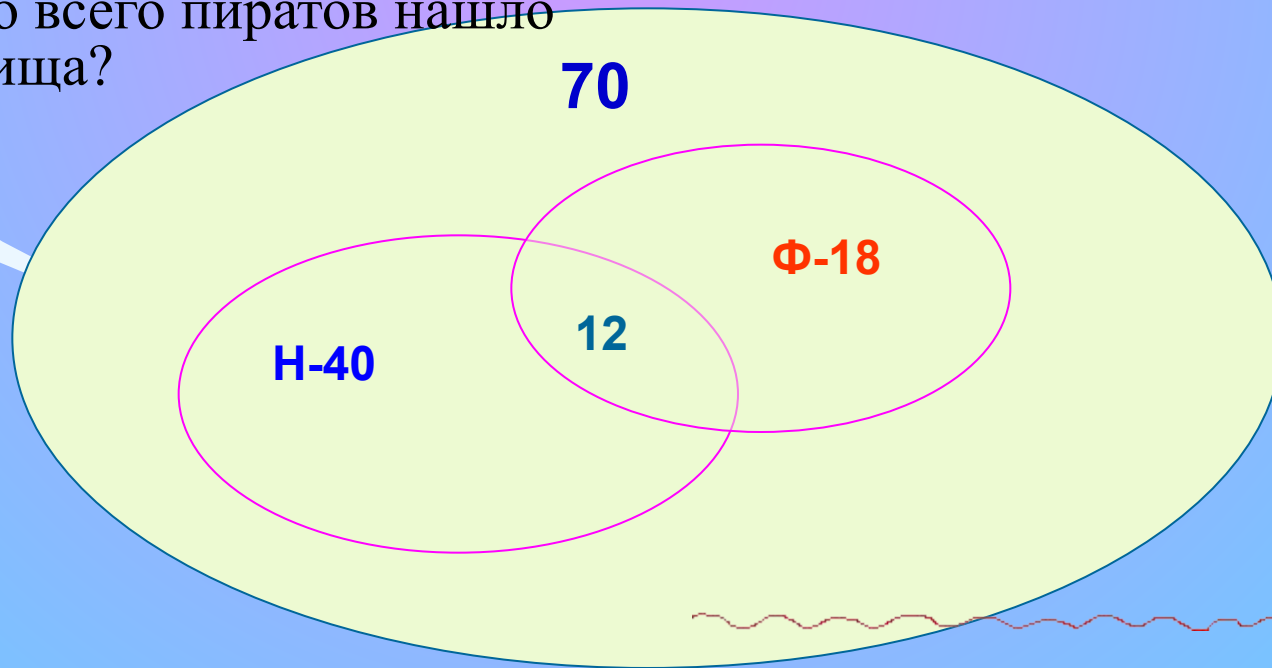
- Одноногий Сильвер со своей шайкой обнаружил клад, спрятанный самим Флинтам. Пираты были крайне нетерпеливы – всем хотелось скорее получить свою долю.
- 52 – достались настоящие пиастры, а 30 пиратов получили фальшивые. 12 – достались и фальшивые и настоящие.
- Сколько всего пиратов нашло сокровища?

**РЕШЕНИЕ**

$$52 - 12 = 40$$

$$30 - 12 = 18$$

**ИТОГО:**  $40 + 12 + 18 = 70$





# В ДЖУНГЛЯХ

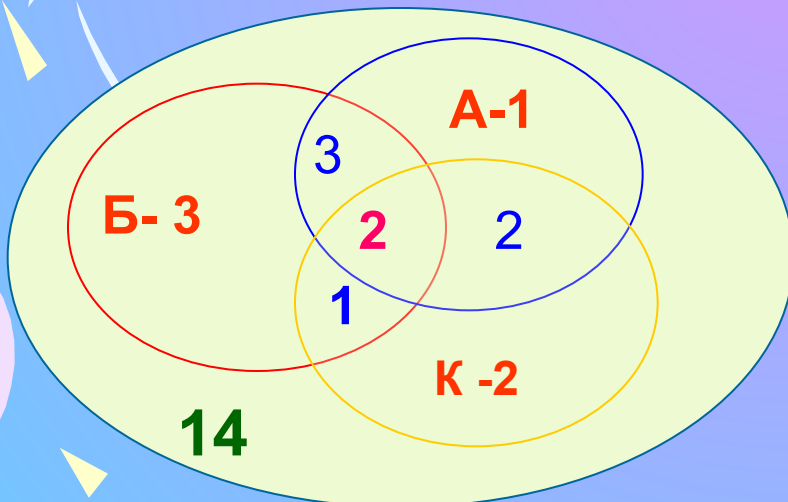
## РЕШЕНИЕ

$$5-2=3 \quad 4-2=2 \quad 3-2=1$$

$$9-6=3 \quad 8-7=1 \quad 7-5=2$$

## ВСЕГО ПИРАТОВ

$$3+1+2+3+2+2+1=14$$



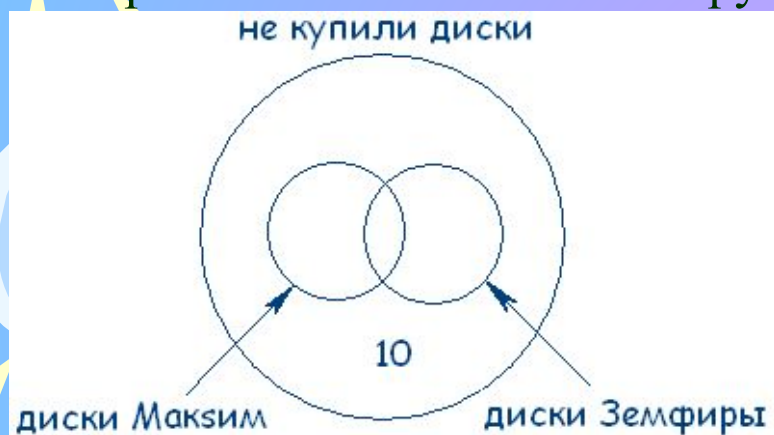
- Несколько пиратов высадились на берег, чтобы подкрепиться. Из них 9 – любят бананы, 8 – ананасы, 7 – кокос.
- 5 – любят и бананы и ананасы, 4 – ананасы и кокос, 3 – бананы и кокос. И только двое охотно ели бананы, кокос и ананасы. Сколько пиратов высадилось на берег?

## «Мир музыки»

В магазин «Мир музыки» пришло 35 покупателей. Из них 20 человек купили новый диск певицы Максим, 11 – диск Земфиры, 10 человек не купили ни одного диска. Сколько человек купили диски и Максим, и Земфиры?

### Решение

Изобразим эти множества на кругах Эйлера.



Теперь посчитаем: Всего внутри большого круга 35 покупателей, внутри двух меньших  $35 - 10 = 25$  покупателей. По условию задачи 20 покупателей купили новый диск певицы Максим, следовательно,  $25 - 20 = 5$  покупателей купили только диск Земфиры. А в задаче сказано, что 11 покупателей купили диск Земфиры, значит  $11 - 5 = 6$  покупателей купили диски и Максим

**Ответ:** 6 покупателей купили диски и Максим, и Земфиры

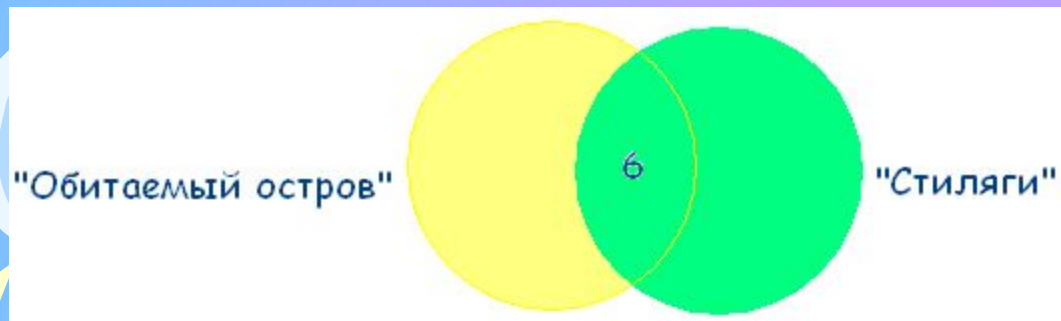


## "Обитаемый остров" и "Стиляги"

Некоторые ребята из нашего класса любят ходить в кино. Известно, что 15 ребят смотрели фильм «Обитаемый остров», 11 человек – фильм «Стиляги», из них 6 смотрели и «Обитаемый остров», и «Стиляги». Сколько человек смотрели только фильм «Стиляги»?

### Решение

Чертим два множества таким образом:

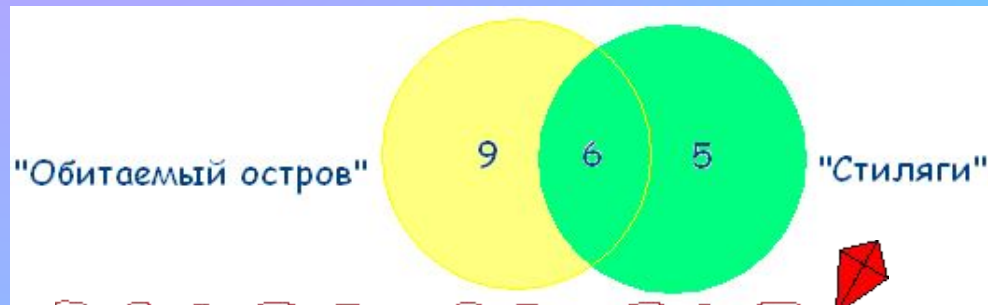


$15 - 6 = 9$  – человек, которые смотрели только «Обитаемый остров».

$11 - 6 = 5$  – человек, которые смотрели только «Стиляги».

6 человек, которые смотрели фильмы «Обитаемый остров» и «Стиляги», помещаем в пересечение множеств.

Получаем:



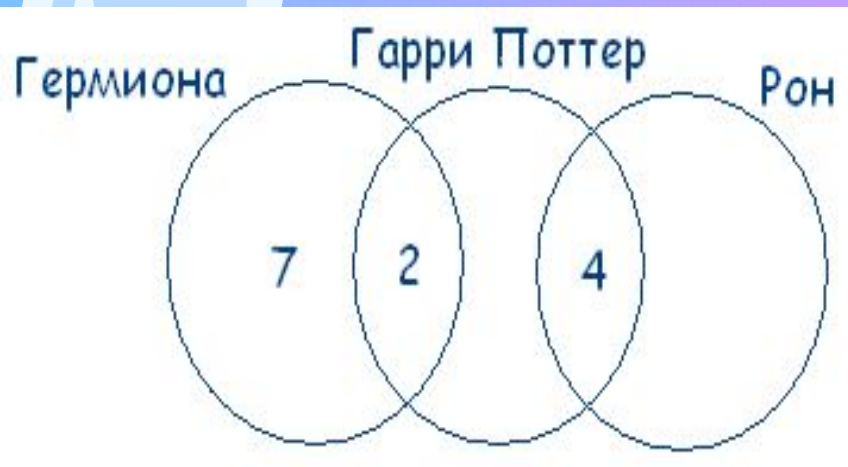
**Ответ.** 5 человек смотрели только «Стиляги».

## Гарри Поттер, Рон и Гермиона

На полке стояло 26 волшебных книг по заклинаниям. Из них 4 прочитал и Гарри Поттер, и Рон. Гермиона прочитала 7 книг, которых не читали ни Гарри Поттер, ни Рон, и две книги, которые читал Гарри Поттер. Всего Гарри Поттер прочитал 11 книг. Сколько книг прочитал Рон?

Решение

Учитывая условия задачи, чертеж будет таков:



Так как Гарри Поттер всего прочитал 11 книг, из них 4 книги читал Рон и 2 книги – Гермиона, то  $11 - 4 - 2 = 5$  – книг прочитал только Гарри. Следовательно,  $26 - 7 - 2 - 5 - 4 = 8$  – книг прочитал Рон.

*Ответ. 8 книг прочитал Рон.*

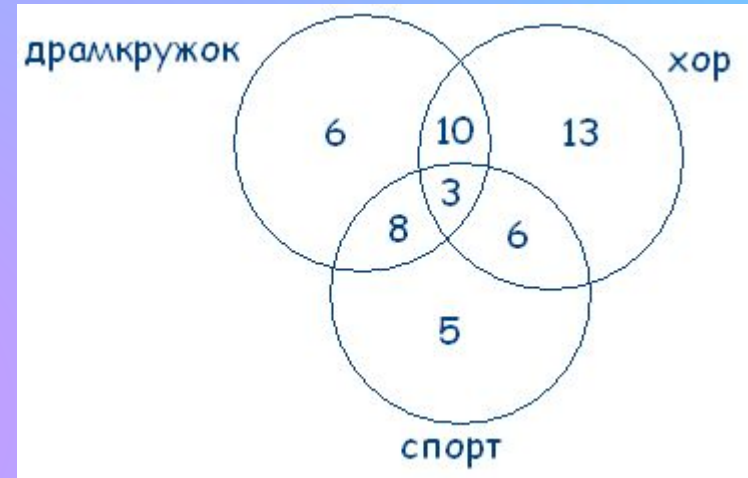


## «Пионерский лагерь»

В пионерском лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют, не увлекаются спортом, не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

## Решение

Изобразим множества следующим образом:



$70 - (6 + 8 + 10 + 3 + 13 + 6 + 5) = 19$  – ребят не поют, не увлекаются спортом, не занимаются в драмкружке. Только спортом заняты 5 человек.

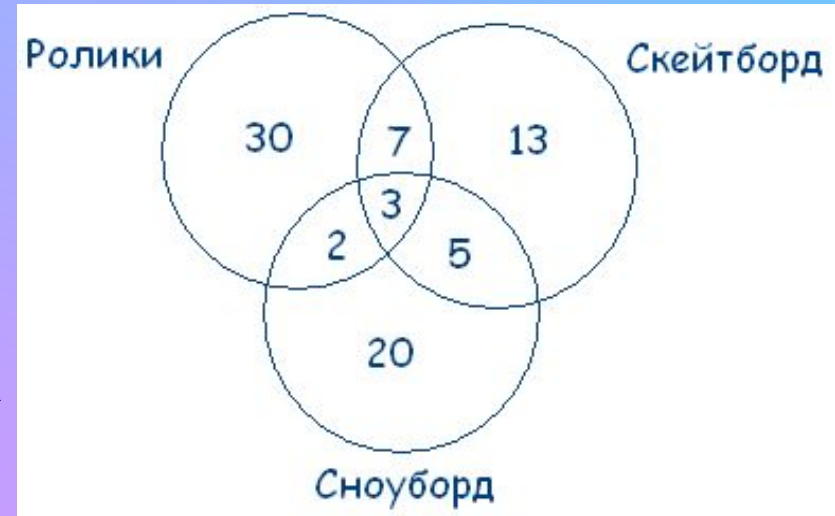
**Ответ. 5 человек заняты только спортом.**



## «Экстрим»

Из 100 ребят, отправляющихся в детский оздоровительный лагерь, кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на скейтборде – 28, на роликах – 42. На скейтборде и на сноуборде умеют кататься 8 ребят, на скейтборде и на роликах – 10, на сноуборде и на роликах – 5, а на всех трех – 3. Сколько ребят не умеют кататься ни на сноуборде, ни на скейтборде, ни на роликах?

## Решение



*Ответ. 20 человек не умеют кататься ни на одном спортивном*

Всеми тремя спортивными снарядами владеют три человека, значит, в общей части кругов вписываем число 3. На скейтборде и на роликах умеют кататься 10 человек, а 3 из них катаются еще и на сноуборде. Следовательно, кататься только на скейтборде и на роликах умеют  $10-3=7$  ребят. Аналогично получаем, что только на скейтборде и на сноуборде умеют кататься  $8-3=5$  ребят, а только на сноуборде и на роликах  $5-3=2$  человека. Внесем эти данные в соответствующие части. Определим теперь, сколько человек умеют кататься только на одном спортивном снаряде. Кататься на сноуборде умеют 30 человек, но  $5+3+2=10$  из них владеют и другими снарядами, следовательно, только на сноуборде умеют кататься 20 ребят. Аналогично получаем, что только на скейтборде умеют кататься 13 ребят, а только на роликах – 30 ребят. По условию задачи всего 100 ребят.  $20+13+30+5+7+2+3=80$  – ребят умеют кататься хотя бы на одном спортивном снаряде. Следовательно, 20 человек не умеют кататься ни на одном спортивном сна

## Спортивный класс

В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 - в хоккей, 18 - в футбол. Увлекаются двумя видами спорта - баскетболом и хоккеем - четверо, баскетболом и футболом - трое, футболом и хоккеем - пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом.

Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта?

Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?



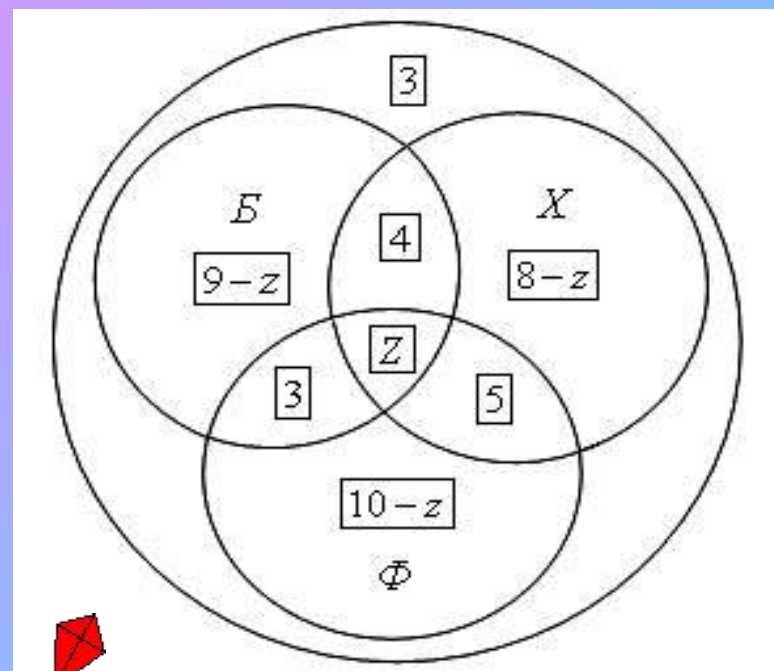
**Решение.**

Воспользуемся кругами Эйлера.

**Ответ.**

Двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта человека.

Увлекающихся лишь одним видом спорта: 21 человек.



Пусть большой круг изображает всех учащихся класса,  
а три меньших круга  $B$ ,  $X$  и  $\Phi$  изображают соответственно баскетболистов,  
хоккеистов и футболистов.

Тогда фигура  $Z$ , общая часть кругов  $B$ ,  $X$  и  $\Phi$ , изображает ребят, увлекающихся  
тремя видами спорта.

Из рассмотрения кругов Эйлера видно, что одним лишь видом спорта -  
баскетболом занимаются

$$16 - (4 + z + 3) = 9 - z;$$

одним лишь хоккеем

$$17 - (4 + z + 5) = 8 - z;$$

одним лишь футболом

$$18 - (3 + z + 5) = 10 - z.$$

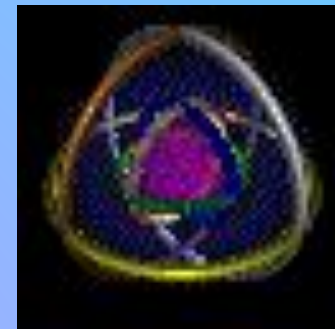
Составляем уравнение, пользуясь тем, что класс разбился на отдельные группы  
ребят; количества ребят в каждой группе обведены на рисунке рамочкам:

$$3 + (9 - z) + (8 - z) + (10 - z) + 4 + 3 + 5 + z = 38,$$
$$z = 2.$$

Таким образом, двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта.  
Складывая числа  $9 - z$ ,  $8 - z$  и  $10 - z$ , где  $z = 2$ , найдем количество ребят,  
увлекающихся лишь одним видом спорта: 21 человек.



# ЗАДАЧИ



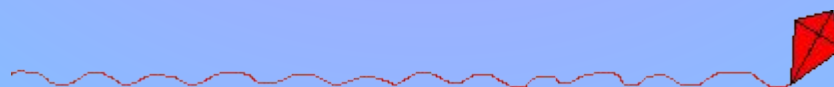
1. Известно, что каждый элемент множества  $A$  содержится в множестве  $B$ . Верно ли, что тогда

- $A \subset B$ ;
- $A = B$ ?

2. Из множества  $K = \{216, 546, 153, 171, 234\}$  выпишите числа, которые

- делятся на 3;
- делятся на 9;
- не делятся на 4;
- не делятся на 5.

Если ли среди полученных подмножеств такое, которое равно множеству  $K$ ?



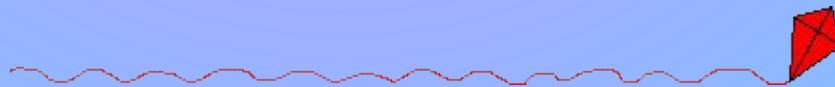


### 3. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами А и В, если:

- А – множество четных чисел
- В - множество чисел, кратных 3;
- А - множество квадратов,
- В - множество прямоугольников;
- А – множество квадратов,
- В - множество прямоугольников с равными сторонами.

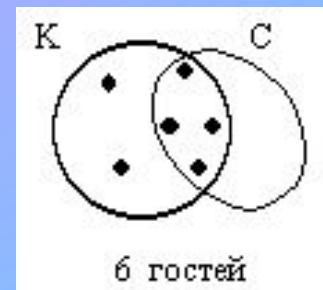
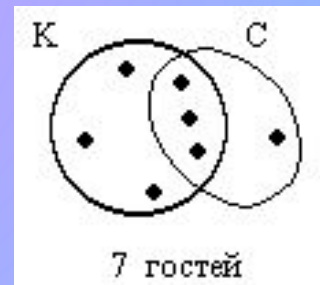
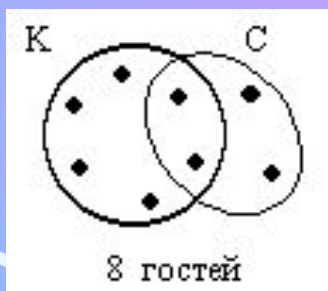
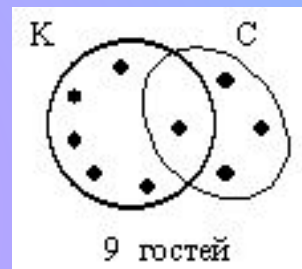
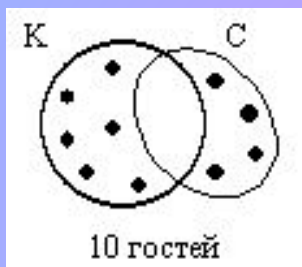
### 4. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами А, В, С, если известно, что:

- $A \subset B$  и  $B \subset C$  и  $C \subset M$ ;
- $A \subset B$ , С пересекается с В, но не пересекается с А.



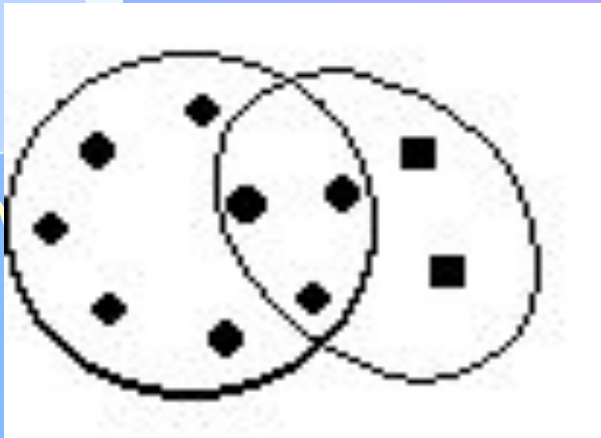


К Лене на день рождения пришли гости с подарками. Получилось так, что дарили только букеты цветов и воздушные шары. Шесть гостей подарили букеты цветов, четыре – воздушные шары. Сколько было гостей?





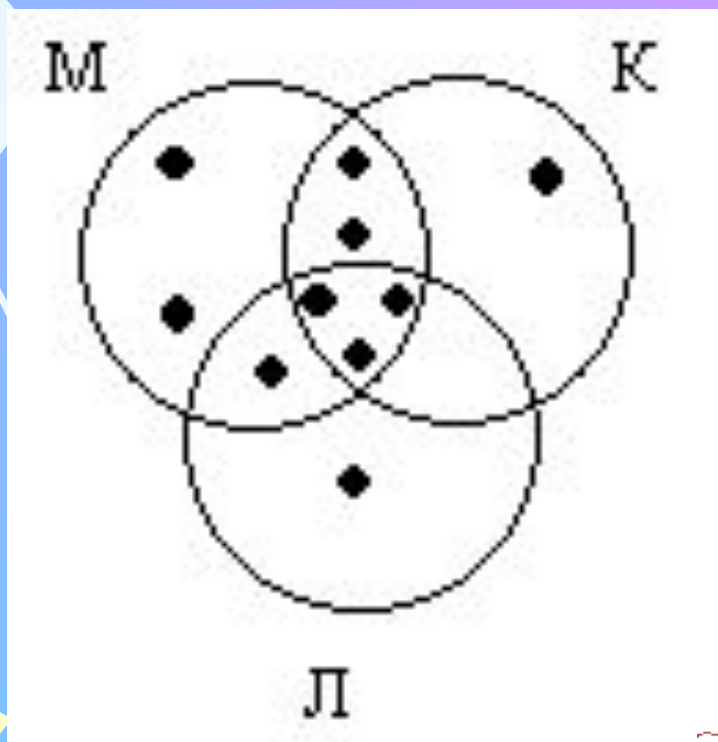
На лужайке расположились 10 крокодилов. Крокодилов в галстук было 6, а 4 крокодила были больны. Сколько было на лужайке здоровых крокодилов без галстука?



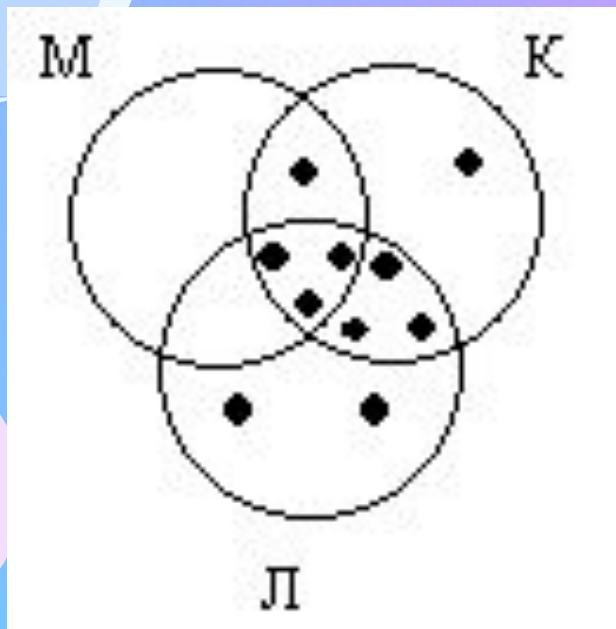
В коробке было 10 круглых или шоколадных конфет. Круглых конфет было 8. Сколько в коробке было шоколадных конфет, если только 3 из них были круглыми?



Миша, Коля, Лева вместе прочитали 3 книги. Миша и Коля вместе прочитали 5 книг; Миша и Лева вместе – 4 книги; Коля и Лева вместе – 3 книги. Миша прочитал 8 книг; Коля – 6 книг; Лева – 5 книг. Сколько книг прочитали дети?

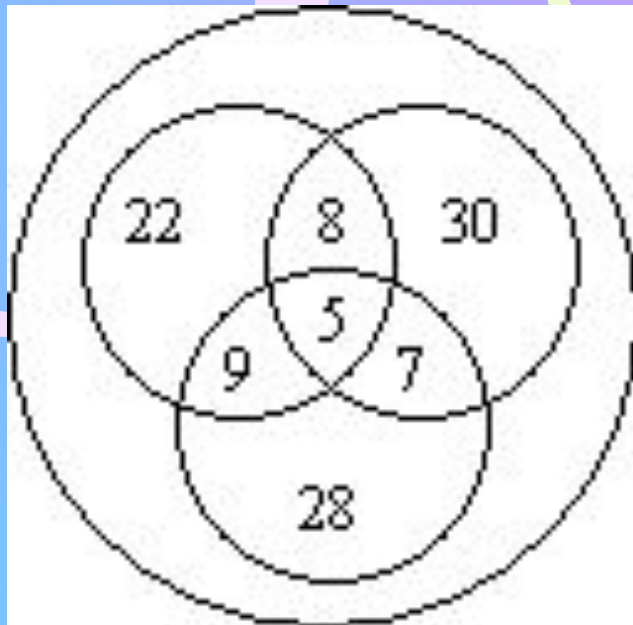


Миша, Коля и Лева прочитали вместе 3 книги. Только Миша и Коля вместе прочитали 1 книгу; только Миша и Лева вместе не прочитали ни одной книги; только Коля и Лева вместе прочитали 3 книги. Миша в одиночку книг не читал; Коля в одиночку прочитал лишь одну книгу, а Лева – 2. Кто из трех мальчиков прочитал книг меньше всех; кто больше всех?





Из 110 студентов английский язык изучают 44 человека, немецкий – 50 человек, французский – 49 человек, английский и немецкий – 13, английский и французский – 14, немецкий и французский – 12, все три языка изучают 5 человек. Сколько студентов изучают только один язык? Сколько студентов не изучают ни одного языка?



Заполняется постепенно с рассуждениями.

Только один язык.

$$22 + 28 + 30 = 80.$$

Ни одного.

$$110 - 80 - 29 = 1.$$



# СБОРНИК ЗАДАЧ

Каждый пятый среди исполнителей рок-музыки знаком с нотами. Каждый седьмой из тех, кто знает ноты, исполняет рок-музыку. Кого больше: рок-музыкантов или людей, знакомых с нотами?



В некотором царстве живут маги, чародеи и колдуны. Про них известно следующее:

- не все маги являются чародеями;
- если колдун не является чародеем, то он не маг.



Правда ли, что не все маги - колдуны?



3

Комната площадью  $12\text{м}^2$  покрыта тремя коврами. Площадь первого ковра  $5\text{м}^2$ , второго -  $4\text{м}^2$ , третьего -  $3\text{м}^2$ . Каждые два ковра перекрываются на площади  $1,5\text{м}^2$ , причем  $0,5\text{м}^2$  из этих  $1,5\text{м}^2$  закрыты всеми тремя коврами. Найдите площадь пола

- не покрытую коврами;
- покрытую лишь первым ковром.



4

Известно, что верны следующие утверждения:

- среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;
- люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?





5

В комнате несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один из трех языков. Шесть человек знают английский язык, шесть - немецкий, семь - французский. Четверо знают английский и немецкий, трое - немецкий и французский, двое - французский и английский. Один человек знает все три языка.



Сколько человек в комнате? Сколько из них знают только английский?



6

85% делегатов конференции знают английский язык, 75% испанский. Какая часть делегатов наверняка знает оба эти языка?



7

Два родных брата, Карп и Поликарп, получили в наследство 240 рублей. Карп и говорит Поликарпу: “Дай мне из своей доли 25 рублей и я стану вдвое богаче тебя.” “ Нашел простачка, ”- подумал Поликарп и не дал ему 25 рублей. Сколько денег досталось каждому из братьев?



8

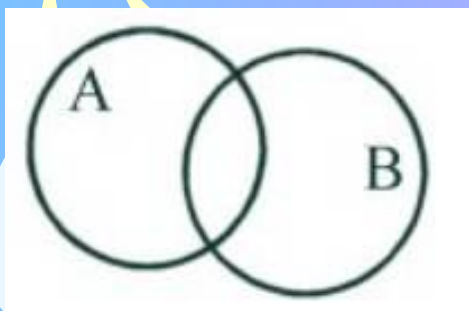
Один господин встретил во время прогулки знакомую семью, состоящую из деда, отца и сына. Он спросил их, сколько им лет. “Нам всем вместе 100 лет” - ответил дед. “Мне вместе с сыном 45 лет, ” -ответил отец, - “а сын на 25 лет моложе меня.” Так любопытному господину и не пришлось узнать, сколько лет каждому из них. Не сообразите ли вы?



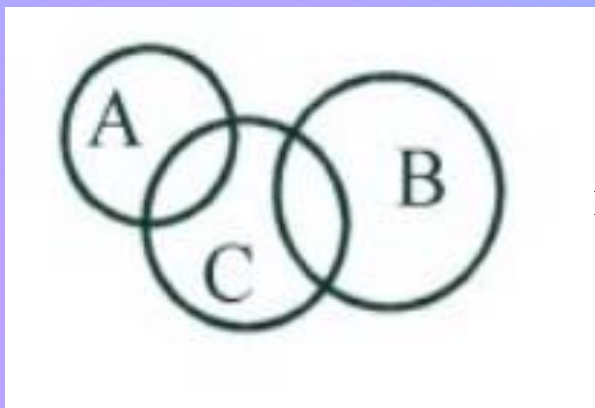


# Задачи для самостоятельной работы

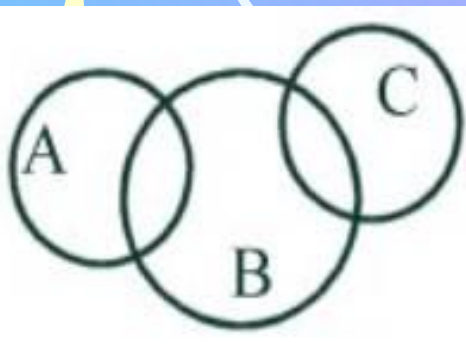
1. Заштрихуйте ту часть рисунка, которая соответствует множеству, полученному в результате действий над данными множествами (каждое из исходных множеств обозначено кругом):



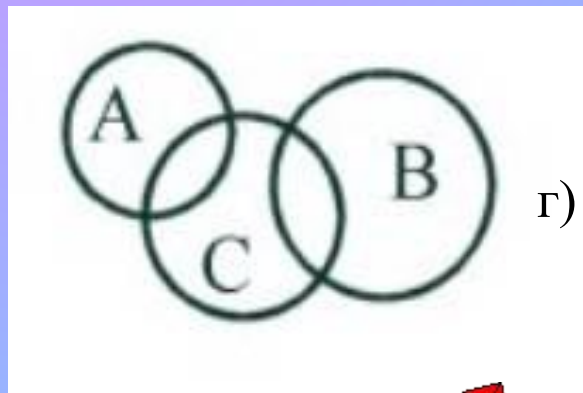
а)  $A \cap B$



в)  $(C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

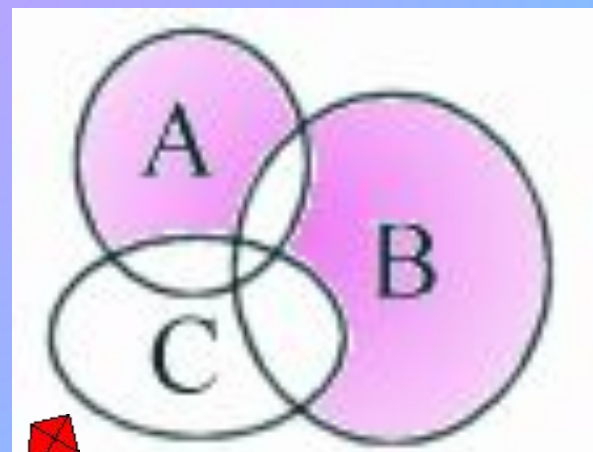
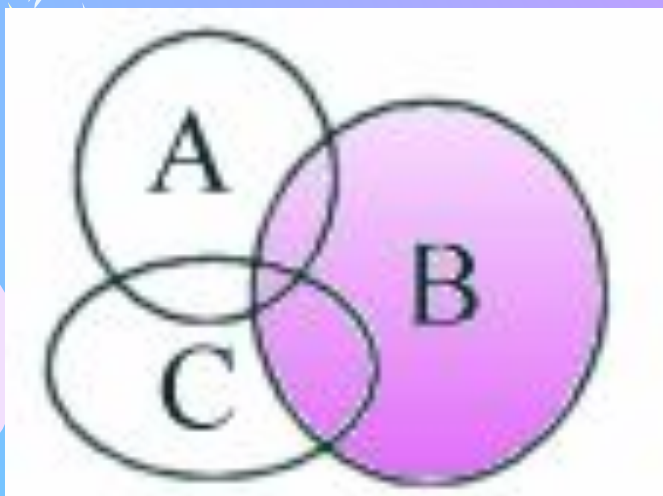
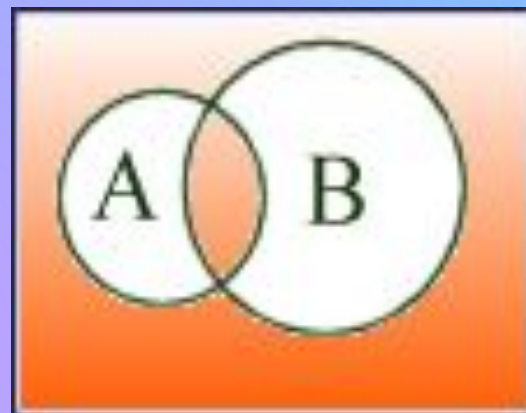
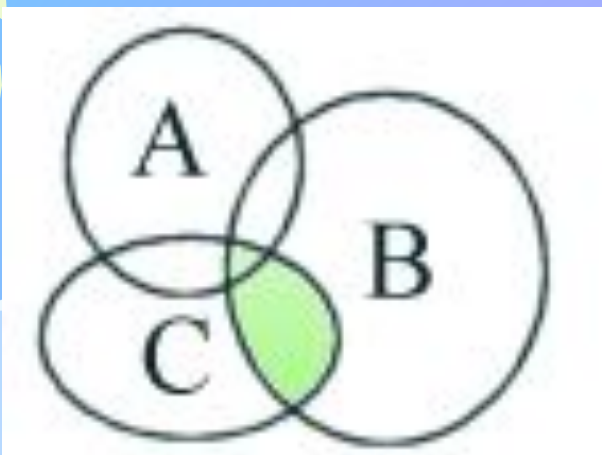


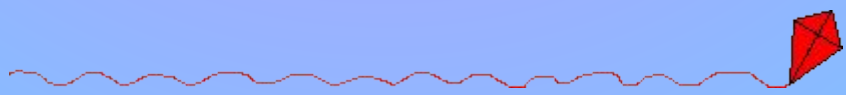
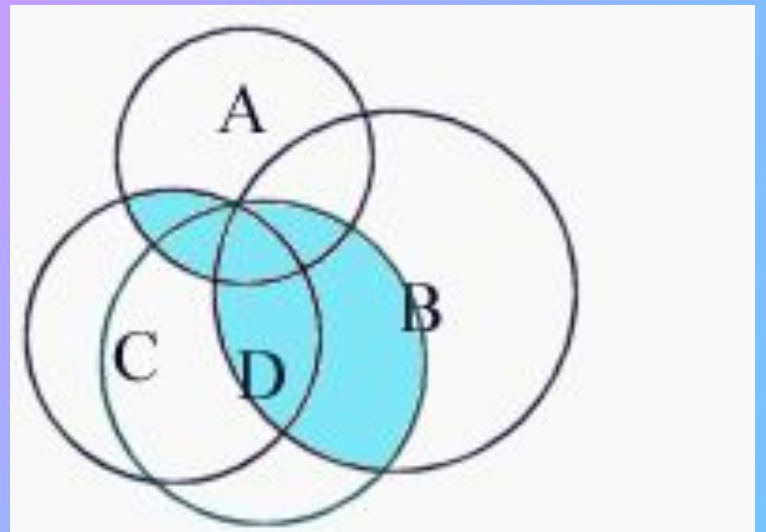
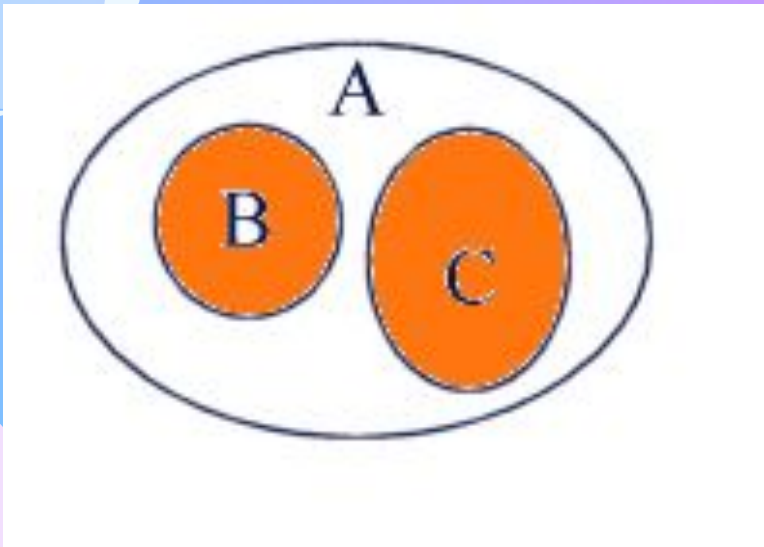
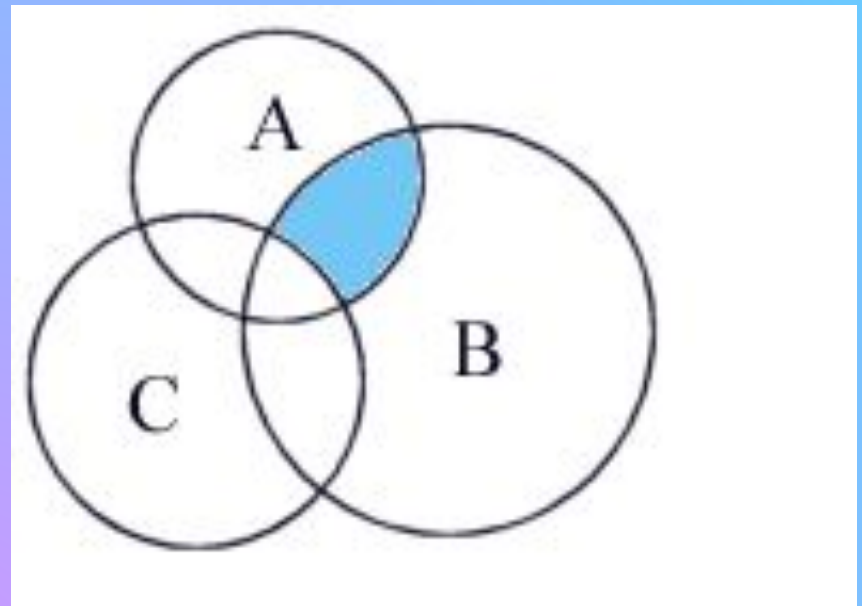
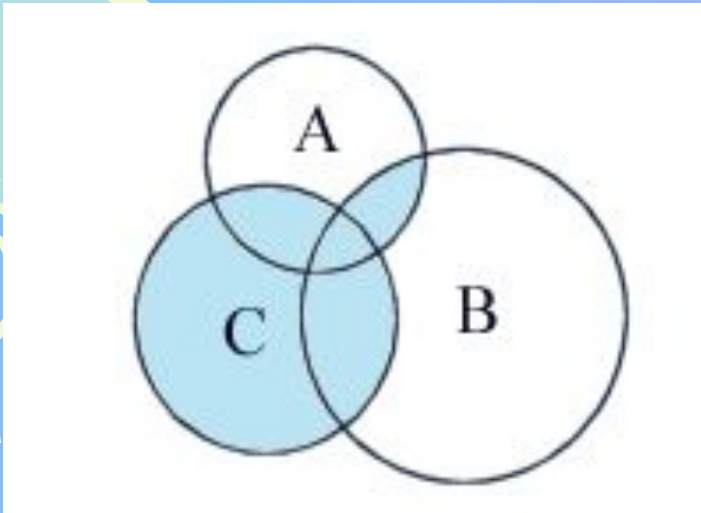
б)  $(A \cup B) \setminus C$



г)  $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

2. По следующим диаграммам попробуйте составить соответствующие им выражения:





# Интересные множества

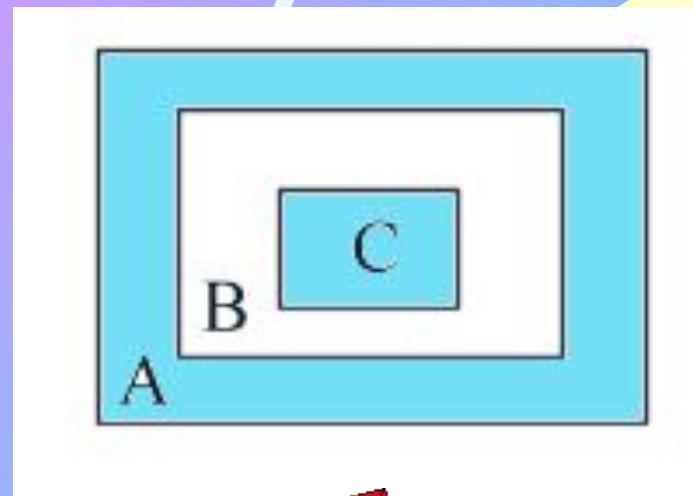
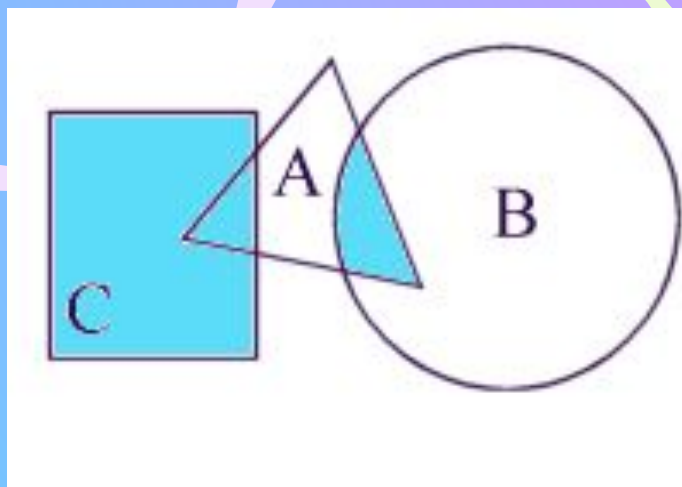
## Задания

1. Заштрихуйте ту часть рисунка, которая соответствует множеству, полученному в результате действий над данными множествами.

2. По следующим диаграммам попробуйте составить соответствующие им выражения:

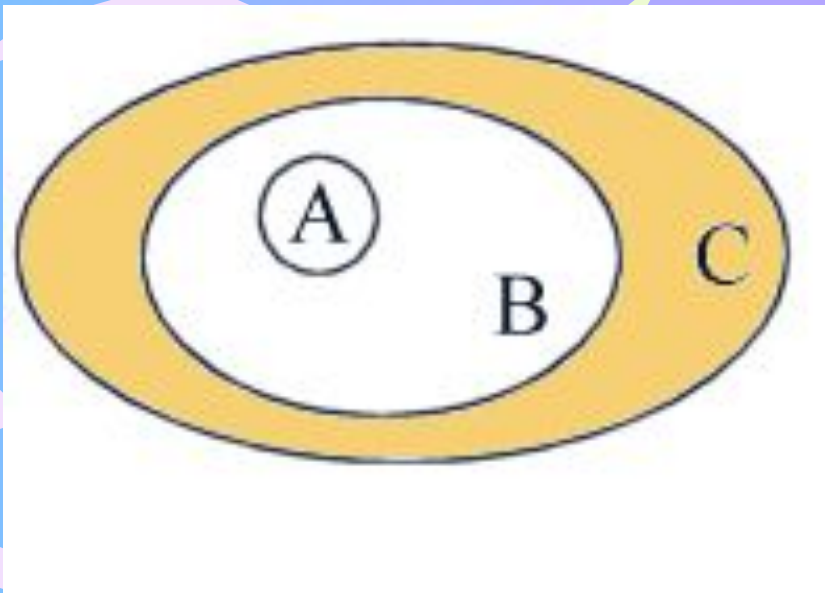
1.  $(A \cap B) \cup C$

2.  $(A \setminus B) \cup C$

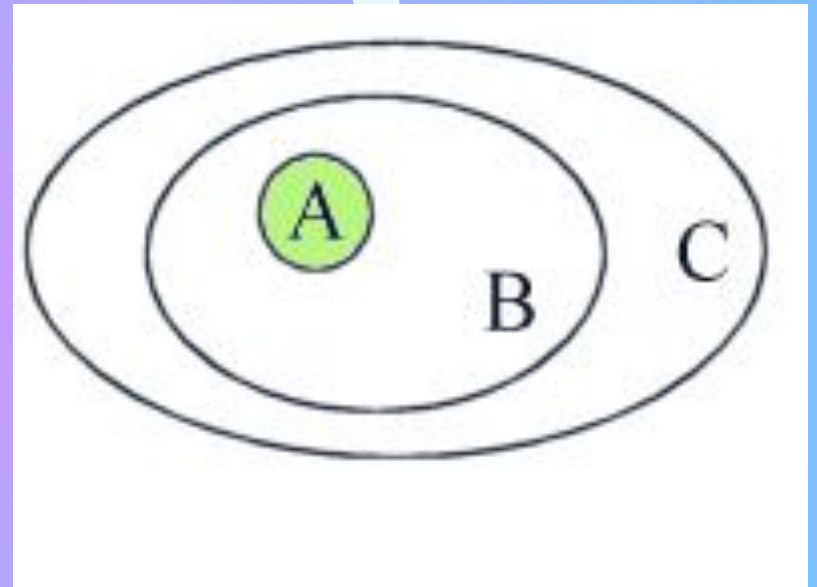




$$3. (C \cap B) \cap A$$



$$4. C \setminus (B \cup A)$$





**«Изучение трудов  
Эйлера  
остается лучшей  
школой  
в различных  
областях математики  
и не может быть  
заменено ничем другим»**

**Карл Гаусс**

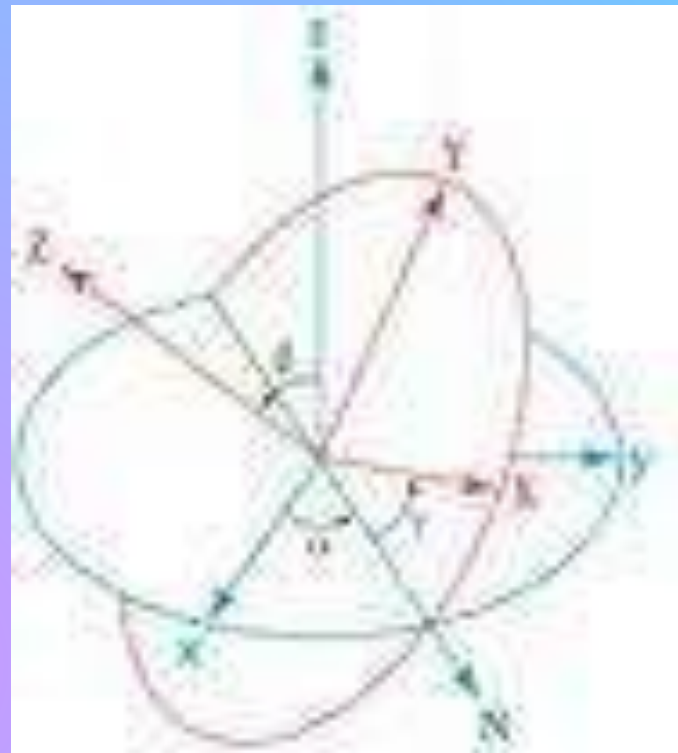


**Эйлер своим вкладом в науку**

**заслужил признание**

**и современников**

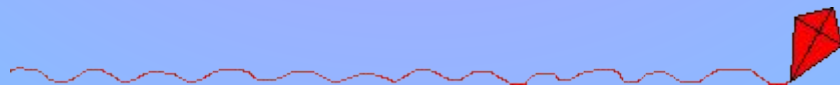
**и потомков.**



**И вправе называться  
самым  
продуктивным  
математиком  
XVIII века**



Чем быстрее меняю, тем быстрее получаю!



# Благодарим за внимание!

