

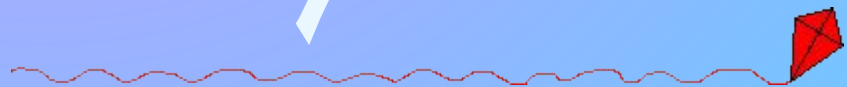
Круги Эйлера

**Работу выполнили:
учащиеся МОУ СОШ №3
им. А.С.Макаренко
Зубрилин А., Хоршева Е.,
Рязанцева Т., Васильева В.,
Козлова А., Сысоев И.
Руководители:
Старкова Н. В.
Бородина Н. Н.**

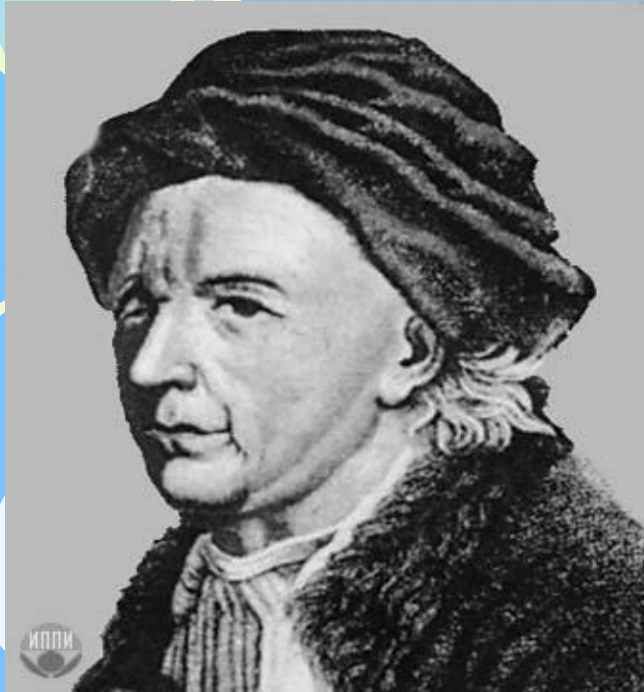


Учебно-воспитательные цели.

Применение кругов Эйлера придает задачам алгебры наглядность и простоту. Круги Эйлера с успехом применяются также в логических задачах для изображения множеств истинности высказываний и во многих других случаях. Изображение условий задачи в виде кругов Эйлера, как правило, упрощает и облегчает путь к её решению. Данная тема, безусловно расширяет математический кругозор учащихся, обогащает арсенал средств, используемых в решении разнообразных задач.



Биография



Эйлер Леонард

Родился 4 апреля 1707 г.,

г. Базель, Германия.

Математик, механик, физик.

Адъюнкт по физиологии, профессор физики,
профессор высшей математики.

Леонард Эйлер (1707-1783)


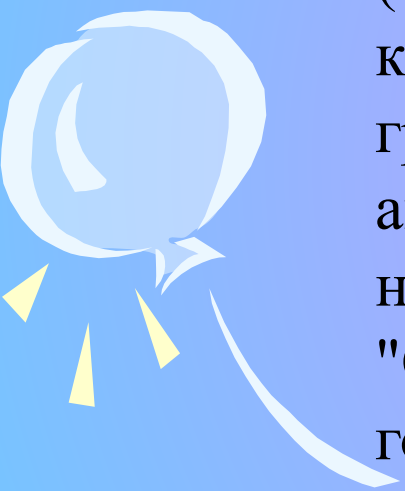

Л. Эйлер — ученый необычайной широты интересов и творческой продуктивности. Автор свыше 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и других, оказавших значительное влияние на развитие науки. За время существования Академии наук в России, считается одним из самых знаменитых ее членов.



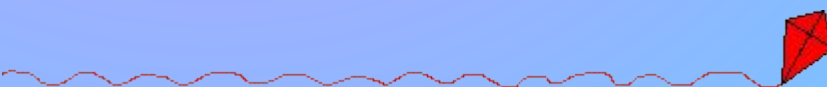
Из истории

В математике рисунки в виде кругов, изображающих множества, используются очень давно. Одним из первых, кто пользовался этим методом, был выдающийся немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 - 1716). В его черновых набросках были обнаружены рисунки с такими кругами. Затем этот метод довольно основательно развил швейцарский математик Леонард Эйлер (1707 - 1783). Он долгие годы работал в Петербургской Академии наук. К этому времени относятся его знаменитые "Письма к немецкой принцессе", написанные в период с 1761 по 1768 год. В некоторых из этих "Писем..." Эйлер как раз и рассказывает о своем методе.





После Эйлера этот же метод разрабатывал чешский математик Бернард Больцано (1781 - 1848). Только в отличие от Эйлера он рисовал не круговые, а прямоугольные схемы. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнест Шредер (1841 - 1902). Этот метод широко используется в книге "Алгебра логики". Но наибольшего расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843 - 1923). С наибольшей полнотой этот метод изложен им в книге "Символическая логика", изданной в Лондоне в 1881 году. В честь Венна вместо кругов Эйлера соответствующие рисунки называют иногда диаграммами Венна; в некоторых книгах их называют также диаграммами (или кругами) Эйлера-Венна.

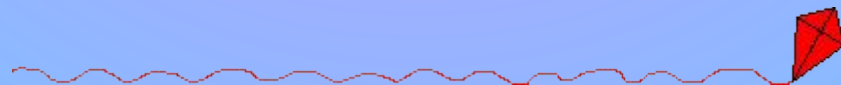


Круги Эйлера – задачи на пересечение или объединение множеств

Это новый тип задач, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение, соблюдая условия задачи.

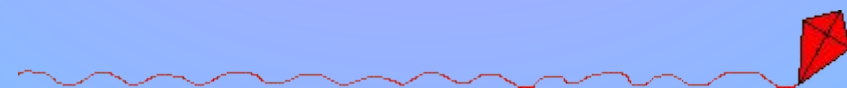
Круги Эйлера— геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

Метод Эйлера является незаменимым при решении некоторых задач, а также упрощает рассуждения. Однако, прежде чем приступить к решению задачи, нужно проанализировать условие. Иногда с помощью арифметических действий решить задачу легче.





АЛГОРИТМ

- 1. ВНИМАТЕЛЬНО ИЗУЧИ УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ**
 - 2. ПОСТРОЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОЖЕСТВ**
 - 3. РАССТАВЬ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ**
 - 4. НАЙДИ НЕДОСТАЮЩИЕ ДАННЫЕ**
 - 5. ПРОВЕРЬ РЕШЕНИЕ**
- 

СОКРОВИЩА ФЛИНТА



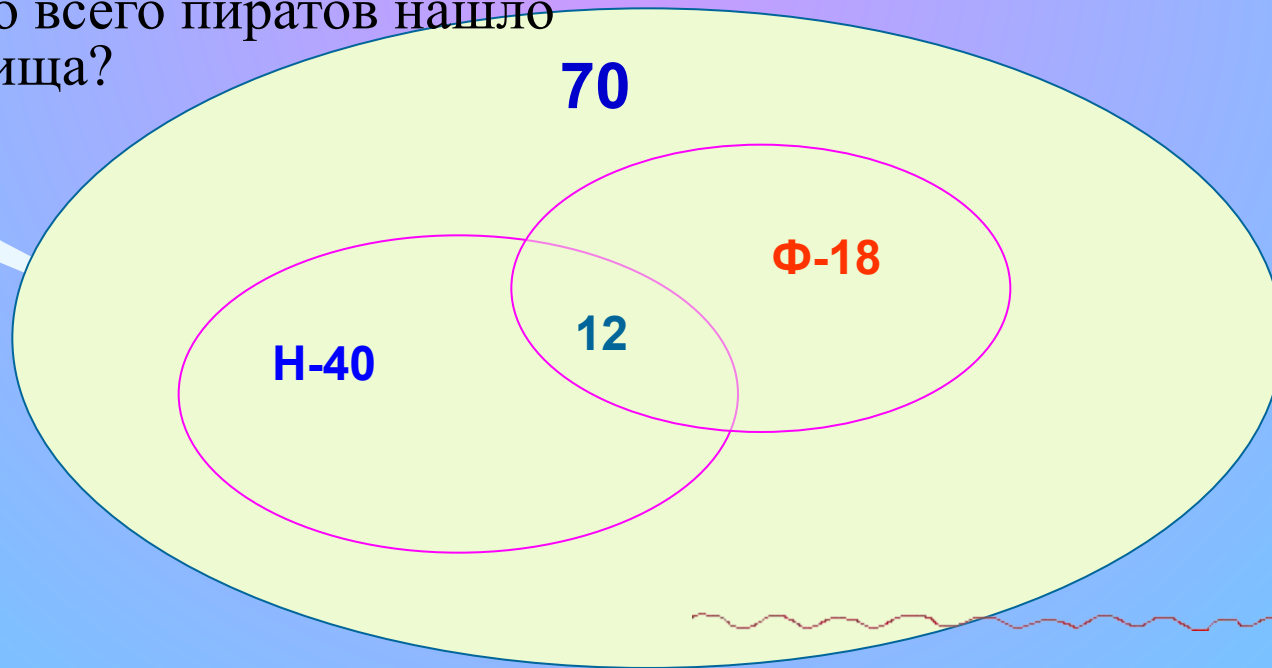
- Одноногий Сильвер со своей шайкой обнаружил клад, спрятанный самим Флинтам. Пираты были крайне нетерпеливы – всем хотелось скорее получить свою долю.
- 52 – достались настоящие пиастры, а 30 пиратов получили фальшивые. 12 – достались и фальшивые и настоящие.
- Сколько всего пиратов нашло сокровища?

РЕШЕНИЕ

$$52 - 12 = 40$$

$$30 - 12 = 18$$

ИТОГО: $40 + 12 + 18 = 70$



В ДЖУНГЛЯХ

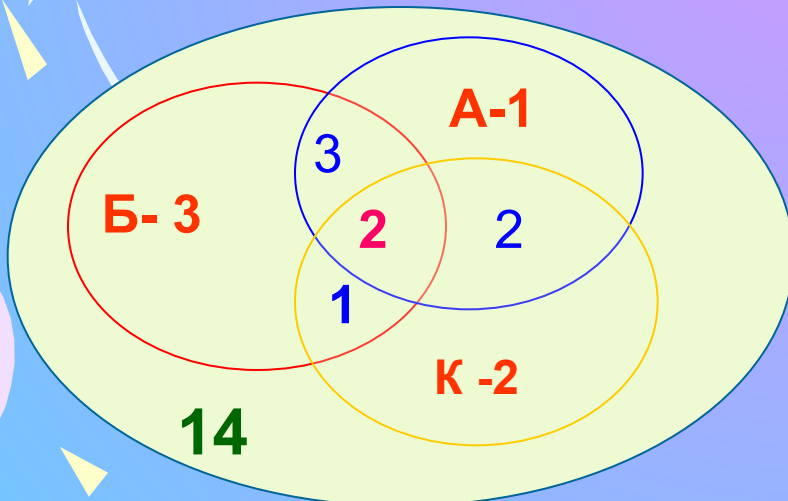
РЕШЕНИЕ

$$5-2=3 \quad 4-2=2 \quad 3-2=1$$

$$9-6=3 \quad 8-7=1 \quad 7-5=2$$

ВСЕГО ПИРАТОВ

$$3+1+2+3+2+2+1=14$$



- Несколько пиратов высадились на берег, чтобы подкрепиться. Из них 9 – любят бананы, 8 – ананасы, 7 – кокос.
- 5 – любят и бананы и ананасы, 4 – ананасы и кокос, 3 – бананы и кокос. И только двое охотно ели бананы, кокос и ананасы. Сколько пиратов высадилось на берег?

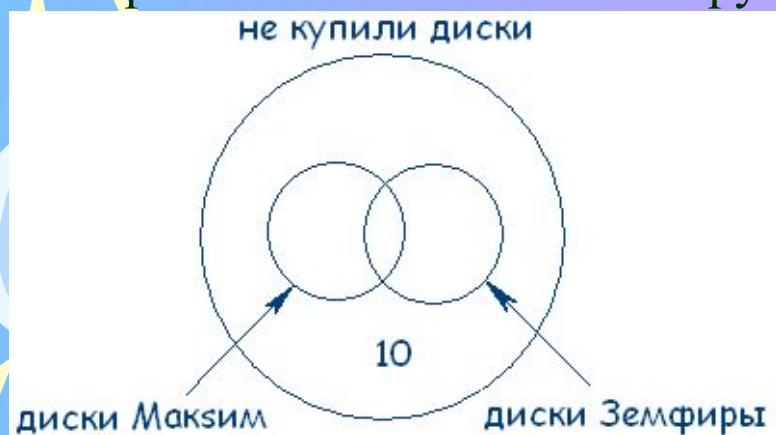


«Мир музыки»

В магазин «Мир музыки» пришло 35 покупателей. Из них 20 человек купили новый диск певицы Максим, 11 – диск Земфиры, 10 человек не купили ни одного диска. Сколько человек купили диски и Максим, и Земфиры?

Решение

Изобразим эти множества на кругах Эйлера.



Теперь посчитаем: Всего внутри большого круга 35 покупателей, внутри двух меньших $35 - 10 = 25$ покупателей. По условию задачи 20 покупателей купили новый диск певицы Максим, следовательно, $25 - 20 = 5$ покупателей купили только диск Земфиры. А в задаче сказано, что 11 покупателей купили диск Земфиры, значит $11 - 5 = 6$ покупателей купили диски и Максим

Ответ: 6 покупателей купили диски и Максим, и Земфиры

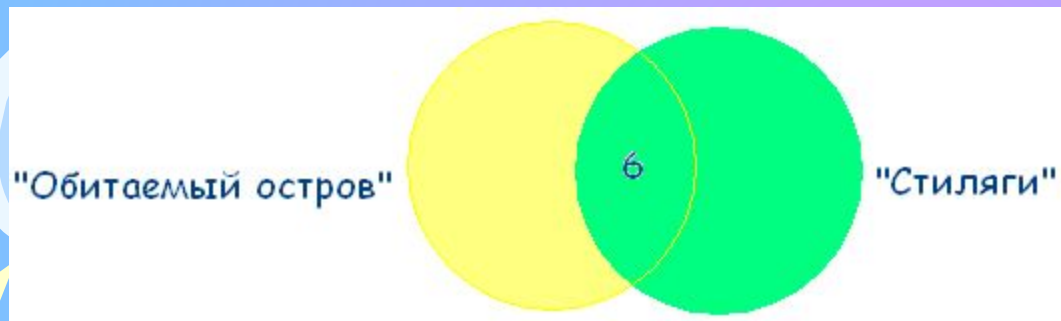


"Обитаемый остров" и "Стиляги"

Некоторые ребята из нашего класса любят ходить в кино. Известно, что 15 ребят смотрели фильм «Обитаемый остров», 11 человек – фильм «Стиляги», из них 6 смотрели и «Обитаемый остров», и «Стиляги». Сколько человек смотрели только фильм «Стиляги»?

Решение

Чертим два множества таким образом:

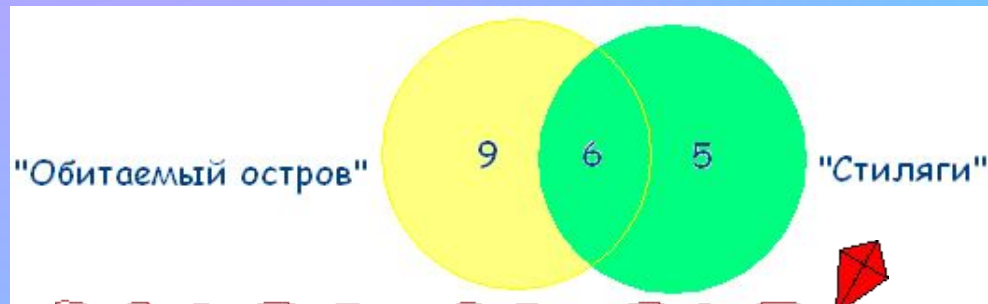


$15 - 6 = 9$ – человек, которые смотрели только «Обитаемый остров».

$11 - 6 = 5$ – человек, которые смотрели только «Стиляги».

6 человек, которые смотрели фильмы «Обитаемый остров» и «Стиляги», помещаем в пересечение множеств.

Получаем:



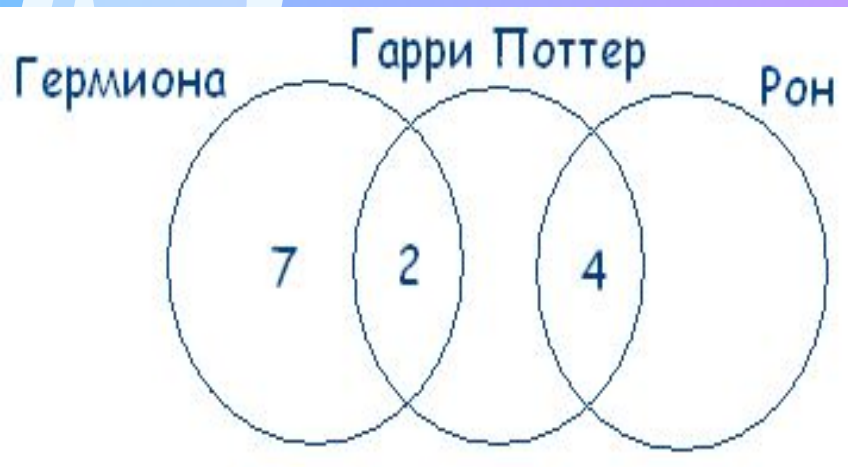
Ответ. 5 человек смотрели только «Стиляги».

Гарри Поттер, Рон и Гермиона

На полке стояло 26 волшебных книг по заклинаниям. Из них 4 прочитал и Гарри Поттер, и Рон. Гермиона прочитала 7 книг, которых не читали ни Гарри Поттер, ни Рон, и две книги, которые читал Гарри Поттер. Всего Гарри Поттер прочитал 11 книг. Сколько книг прочитал Рон?

Решение

Учитывая условия задачи, чертеж будет таков:



Так как Гарри Поттер всего прочитал 11 книг, из них 4 книги читал Рон и 2 книги – Гермиона, то $11 - 4 - 2 = 5$ – книг прочитал только Гарри. Следовательно, $26 - 7 - 2 - 5 - 4 = 8$ – книг прочитал Рон.

Ответ. 8 книг прочитал Рон.

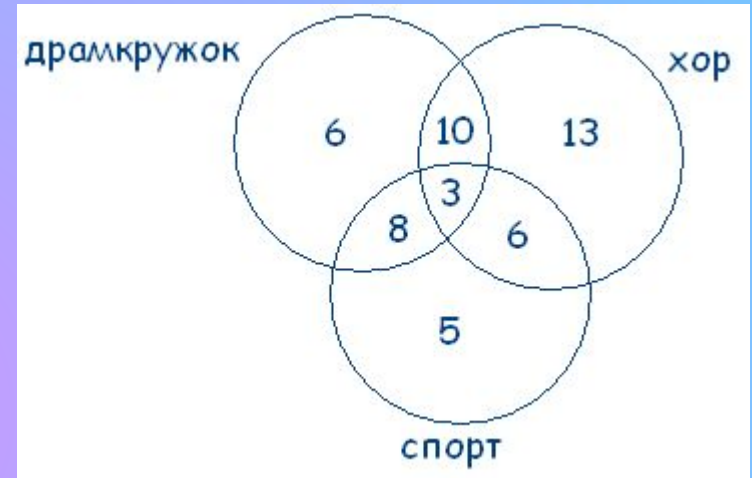


«Пионерский лагерь»

В пионерском лагере 70 ребят. Из них 27 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов; 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют, не увлекаются спортом, не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

Решение

Изобразим множества следующим образом:



$70 - (6 + 8 + 10 + 3 + 13 + 6 + 5) = 19$ – ребят не поют, не увлекаются спортом, не занимаются в драмкружке. Только спортом заняты 5 человек.

Ответ. 5 человек заняты только спортом.

«Экстрим»

Из 100 ребят, отправляющихся в детский оздоровительный лагерь, кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на скейтборде – 28, на роликах – 42. На скейтборде и на сноуборде умеют кататься 8 ребят, на скейтборде и на роликах – 10, на сноуборде и на роликах – 5, а на всех трех – 3. Сколько ребят не умеют кататься ни на сноуборде, ни на скейтборде, ни на роликах?

Решение



Ответ. 20 человек не умеют кататься ни на одном спортивном

Всеми тремя спортивными снарядами владеют три человека, значит, в общей части кругов вписываем число 3. На скейтборде и на роликах умеют кататься 10 человек, а 3 из них катаются еще и на сноуборде. Следовательно, кататься только на скейтборде и на роликах умеют $10-3=7$ ребят. Аналогично получаем, что только на скейтборде и на сноуборде умеют кататься $8-3=5$ ребят, а только на сноуборде и на роликах $5-3=2$ человека. Внесем эти данные в соответствующие части. Определим теперь, сколько человек умеют кататься только на одном спортивном снаряде. Кататься на сноуборде умеют 30 человек, но $5+3+2=10$ из них владеют и другими снарядами, следовательно, только на сноуборде умеют кататься 20 ребят. Аналогично получаем, что только на скейтборде умеют кататься 13 ребят, а только на роликах – 30 ребят. По условию задачи всего 100 ребят. $20+13+30+5+7+2+3=80$ – ребят умеют кататься хотя бы на одном спортивном снаряде. Следовательно, 20 человек не умеют кататься ни на одном спортивном сна

Спортивный класс

В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 - в хоккей, 18 - в футбол. Увлекаются двумя видами спорта - баскетболом и хоккеем - четверо, баскетболом и футболом - трое, футболом и хоккеем - пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом.

Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта?

Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?



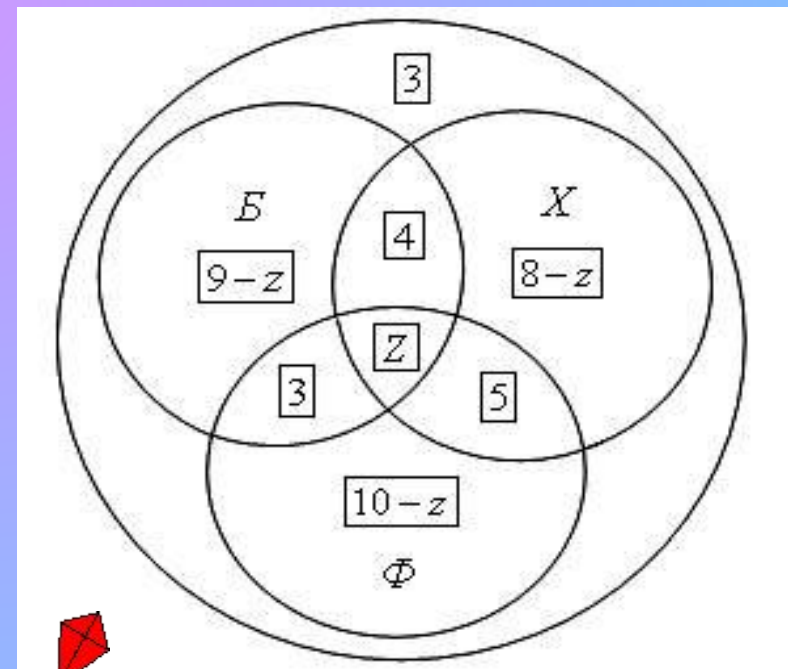
Решение.

Воспользуемся кругами Эйлера.

Ответ.

Двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта человека.

Увлекающихся лишь одним видом спорта: 21 человек.



Пусть большой круг изображает всех учащихся класса,
а три меньших круга B , X и Φ изображают соответственно баскетболистов,
хоккеистов и футболистов.

Тогда фигура Z , общая часть кругов B , X и Φ , изображает ребят, увлекающихся
тремя видами спорта.

Из рассмотрения кругов Эйлера видно, что одним лишь видом спорта -
баскетболом занимаются

$$16 - (4 + z + 3) = 9 - z;$$

одним лишь хоккеем

$$17 - (4 + z + 5) = 8 - z;$$

одним лишь футболом

$$18 - (3 + z + 5) = 10 - z.$$

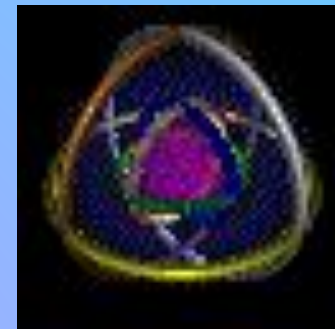
Составляем уравнение, пользуясь тем, что класс разбился на отдельные группы
ребят; количества ребят в каждой группе обведены на рисунке рамочкам:

$$3 + (9 - z) + (8 - z) + (10 - z) + 4 + 3 + 5 + z = 38,$$

$$z = 2.$$

Таким образом, двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта.
Складывая числа $9 - z$, $8 - z$ и $10 - z$, где $z = 2$, найдем количество ребят,
увлекающихся лишь одним видом спорта: 21 человек.

ЗАДАЧИ



1. Известно, что каждый элемент множества A содержится в множестве B . Верно ли, что тогда

- $A \subset B$;
- $A = B$?

2. Из множества $K = \{216, 546, 153, 171, 234\}$ выпишите числа, которые

- делятся на 3;
- делятся на 9;
- не делятся на 4;
- не делятся на 5.

Если ли среди полученных подмножеств такое, которое равно множеству K ?

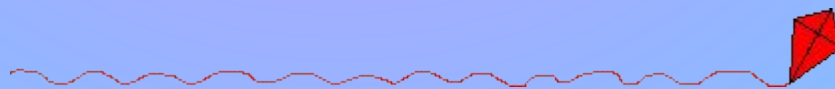


3. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами А и В, если:

- А – множество четных чисел
- В - множество чисел, кратных 3;
- А - множество квадратов,
- В - множество прямоугольников;
- А – множество квадратов,
- В - множество прямоугольников с равными сторонами.

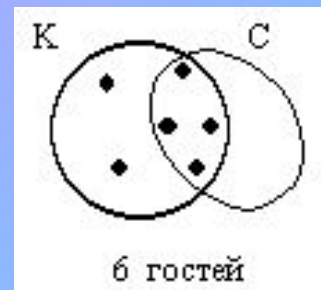
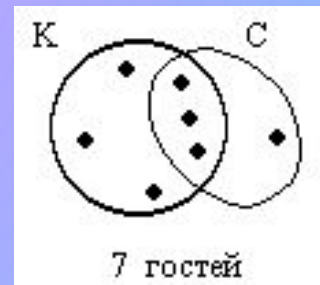
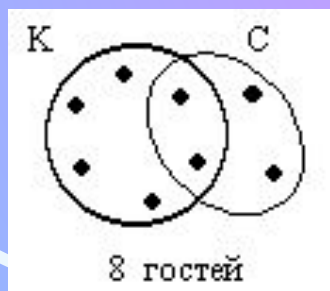
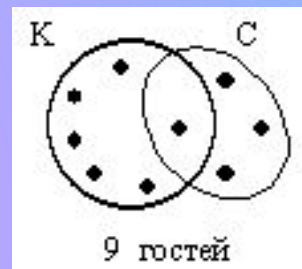
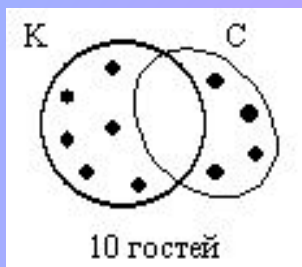
4. Изобразите при помощи кругов Эйлера отношения между множествами А, В, С, если известно, что:

- $A \subset B$ и $B \subset C$ и $C \subset M$;
- $A \subset B$, С пересекается с В, но не пересекается с А.



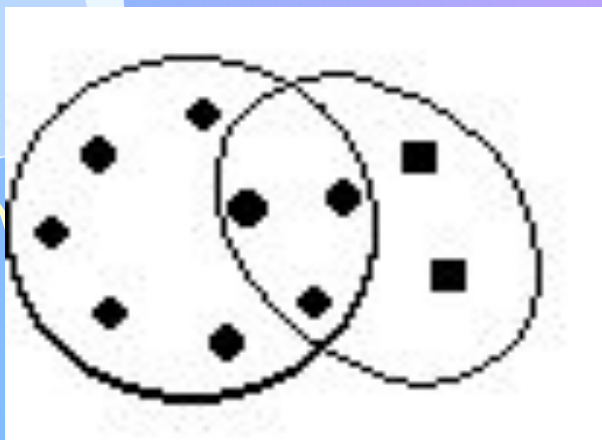


К Лене на день рождения пришли гости с подарками. Получилось так, что дарили только букеты цветов и воздушные шары. Шесть гостей подарили букеты цветов, четыре – воздушные шары. Сколько было гостей?





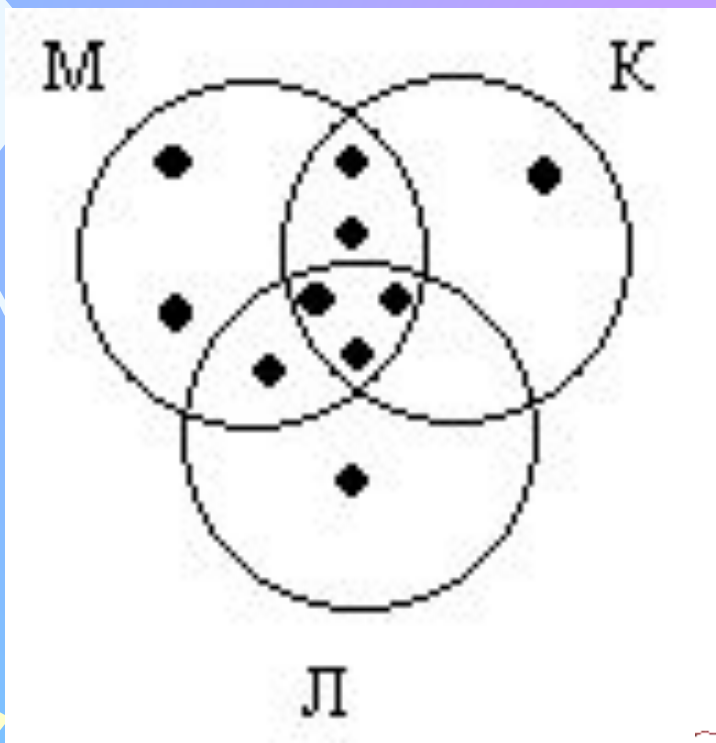
На лужайке расположились 10 крокодилов. Крокодилов в галстук было 6, а 4 крокодила были больны. Сколько было на лужайке здоровых крокодилов без галстука?



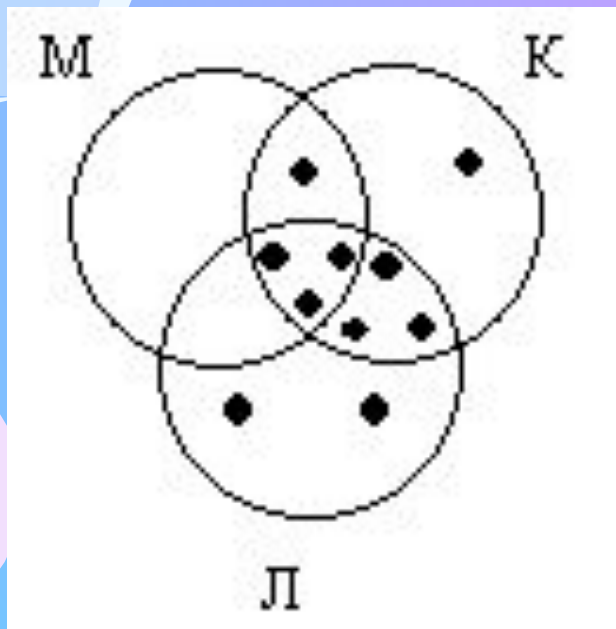
В коробке было 10 круглых или шоколадных конфет. Круглых конфет было 8. Сколько в коробке было шоколадных конфет, если только 3 из них были круглыми?



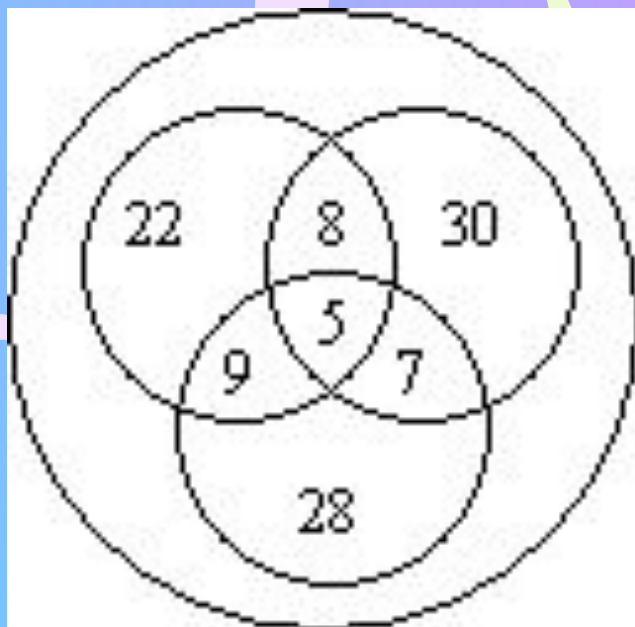
Миша, Коля, Лева вместе прочитали 3 книги. Миша и Коля вместе прочитали 5 книг; Миша и Лева вместе – 4 книги; Коля и Лева вместе – 3 книги. Миша прочитал 8 книг; Коля – 6 книг; Лева – 5 книг. Сколько книг прочитали дети?



Миша, Коля и Лева прочитали вместе 3 книги. Только Миша и Коля вместе прочитали 1 книгу; только Миша и Лева вместе не прочитали ни одной книги; только Коля и Лева вместе прочитали 3 книги. Миша в одиночку книг не читал; Коля в одиночку прочитал лишь одну книгу, а Лева – 2. Кто из трех мальчиков прочитал книг меньше всех; кто больше всех?



Из 110 студентов английский язык изучают 44 человека, немецкий – 50 человек, французский – 49 человек, английский и немецкий – 13, английский и французский – 14, немецкий и французский – 12, все три языка изучают 5 человек. Сколько студентов изучают только один язык? Сколько студентов не изучают ни одного языка?



Заполняется постепенно с рассуждениями.

Только один язык.

$$22 + 28 + 30 = 80.$$

Ни одного.

$$110 - 80 - 29 = 1.$$



СБОРНИК ЗАДАЧ

Каждый пятый среди исполнителей рок-музыки знаком с нотами. Каждый седьмой из тех, кто знает ноты, исполняет рок-музыку. Кого больше: рок-музыкантов или людей, знакомых с нотами?



В некотором царстве живут маги, чародеи и колдуны. Про них известно следующее:

- не все маги являются чародеями;
- если колдун не является чародеем, то он не маг.



Правда ли, что не все маги - колдуны?



3

Комната площадью 12 м^2 покрыта тремя коврами. Площадь первого ковра 5 м^2 , второго - 4 м^2 , третьего - 3 м^2 . Каждые два ковра перекрываются на площади $1,5\text{ м}^2$, причем $0,5\text{ м}^2$ из этих $1,5\text{ м}^2$ закрыты всеми тремя коврами. Найдите площадь пола

- а) не покрытую коврами;
- б) покрытую лишь первым ковром.



4

Известно, что верны следующие утверждения:

- среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;
- люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?



5

В комнате несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один из трех языков. Шесть человек знают английский язык, шесть - немецкий, семь - французский. Четверо знают английский и немецкий, трое - немецкий и французский, двое - французский и английский. Один человек знает все три языка.



Сколько человек в комнате? Сколько из них знают только английский?



6

85% делегатов конференции знают английский язык, 75% испанский. Какая часть делегатов наверняка знает оба эти языка?



7

Два родных брата, Карп и Поликарп, получили в наследство 240 рублей. Карп и говорит Поликарпу: “Дай мне из своей доли 25 рублей и я стану вдвое богаче тебя.” “ Нашел простачка, ”- подумал Поликарп и не дал ему 25 рублей. Сколько денег досталось каждому из братьев?



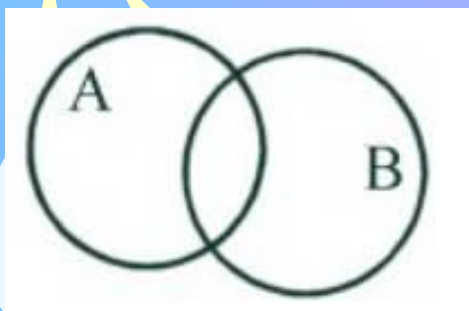
8

Один господин встретил во время прогулки знакомую семью, состоящую из деда, отца и сына. Он спросил их, сколько им лет. “Нам всем вместе 100 лет” - ответил дед. “Мне вместе с сыном 45 лет, ” -ответил отец, - “а сын на 25 лет моложе меня.” Так любопытному господину и не пришлось узнать, сколько лет каждому из них. Не сообразите ли вы?

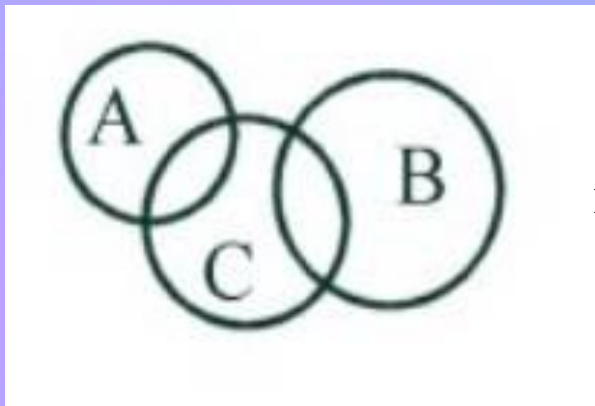


Задачи для самостоятельной работы

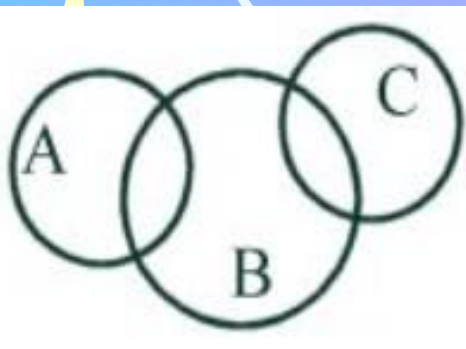
1. Заштрихуйте ту часть рисунка, которая соответствует множеству, полученному в результате действий над данными множествами (каждое из исходных множеств обозначено кругом):



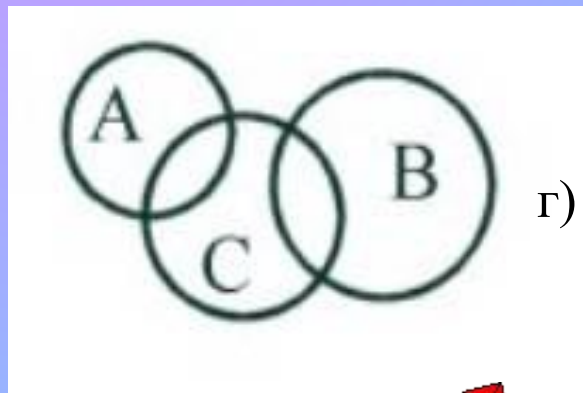
а) $A \cap B$



в) $(C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

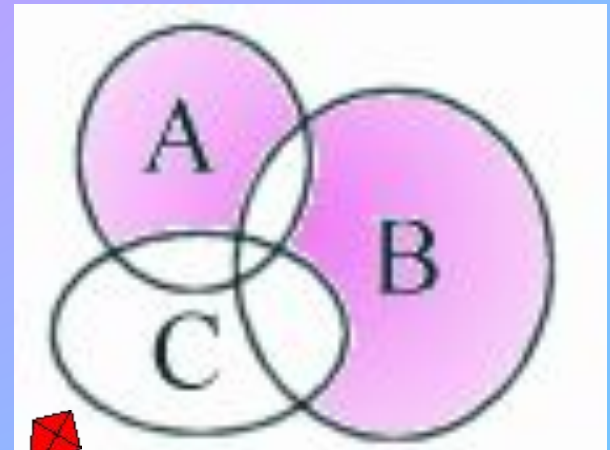
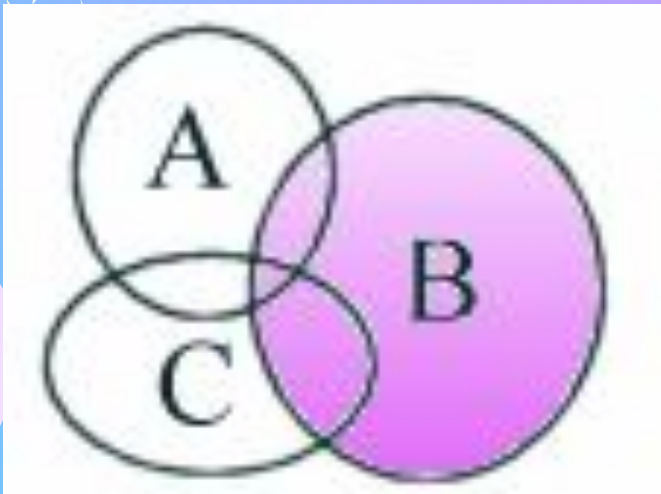
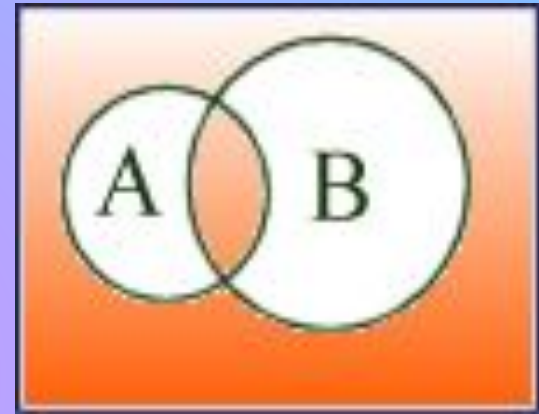
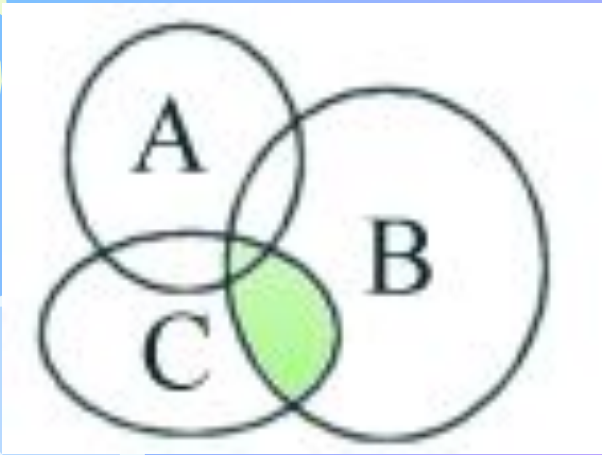


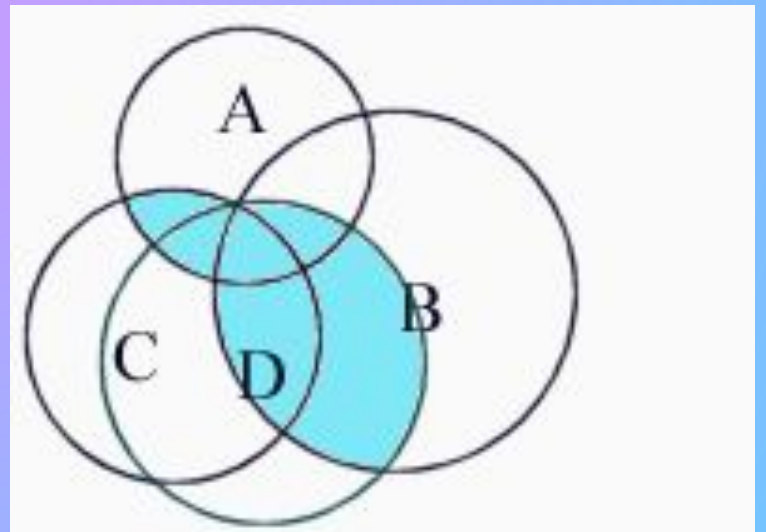
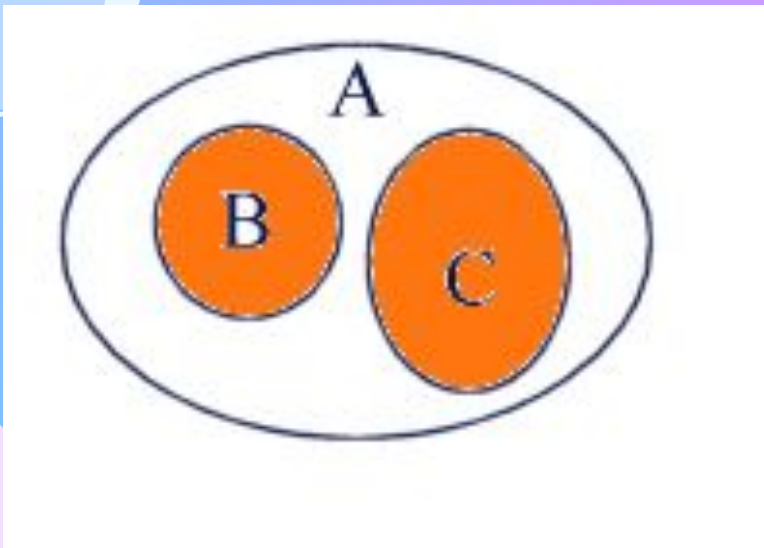
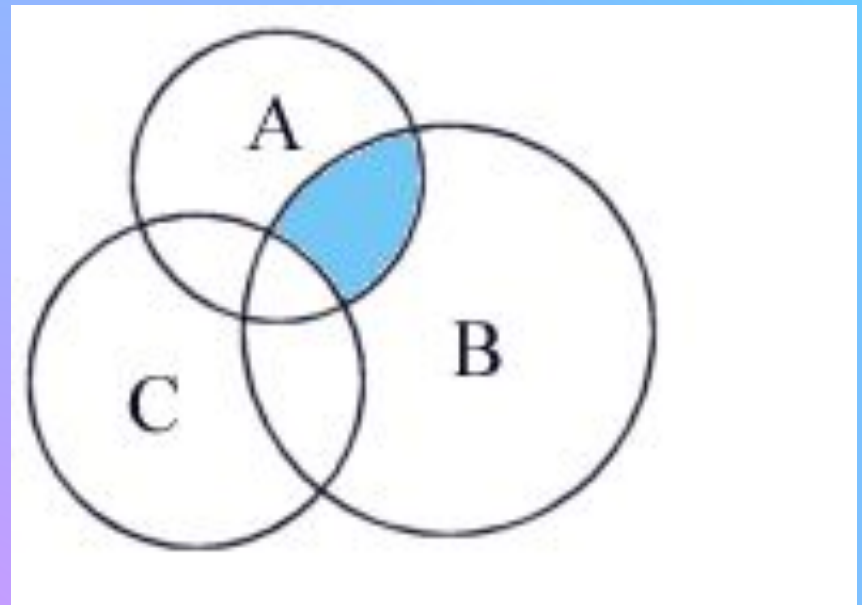
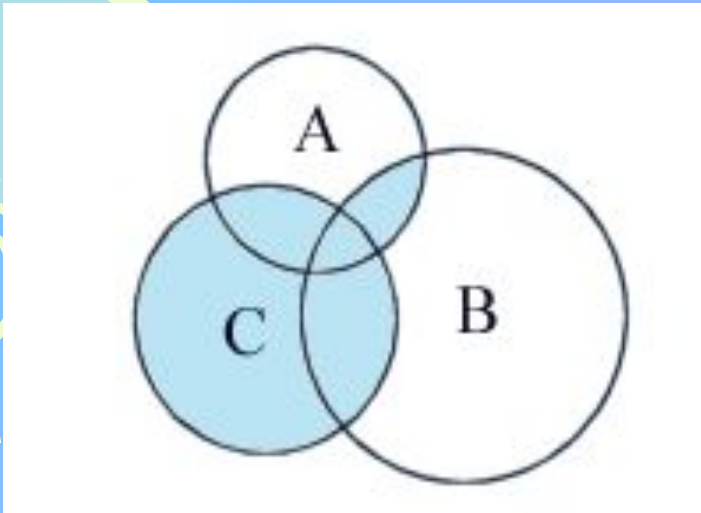
б) $(A \cup B) \setminus C$



г) $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

2. По следующим диаграммам попробуйте составить соответствующие им выражения:





Интересные множества

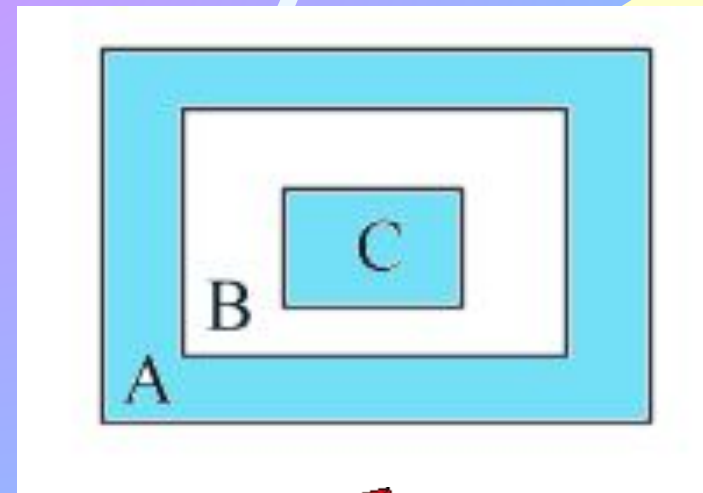
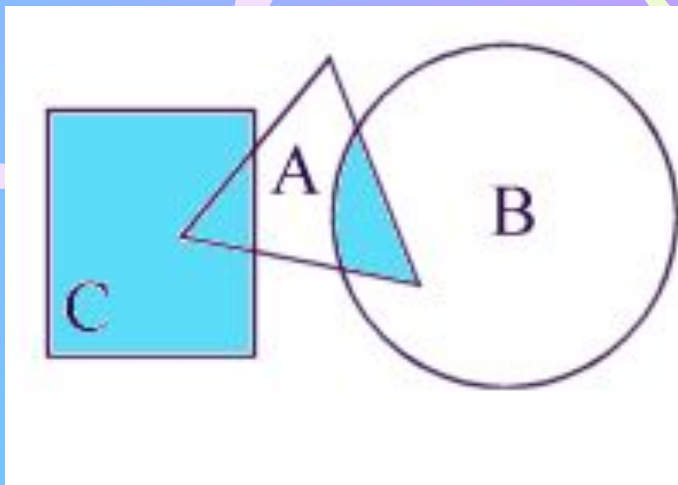
Задания

1. Заштрихуйте ту часть рисунка, которая соответствует множеству, полученному в результате действий над данными множествами.

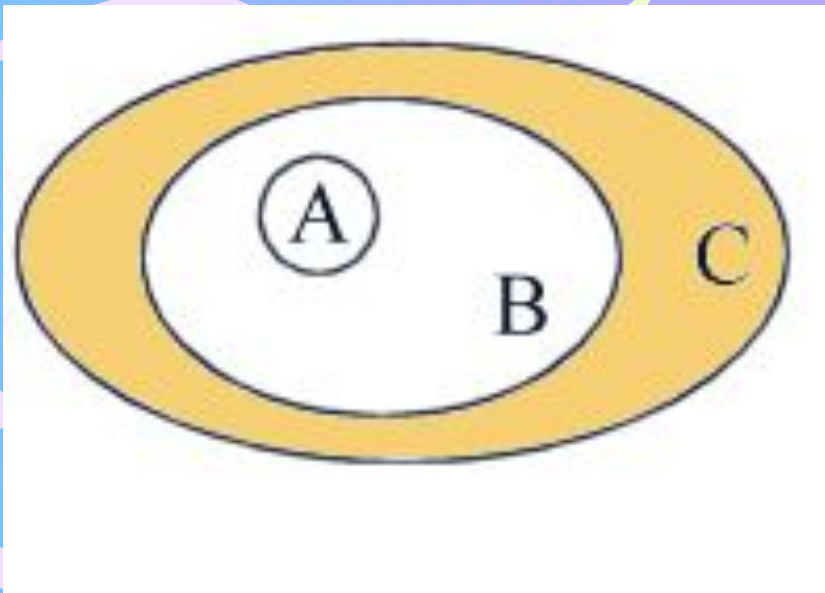
2. По следующим диаграммам попробуйте составить соответствующие им выражения:

1. $(A \cap B) \cup C$

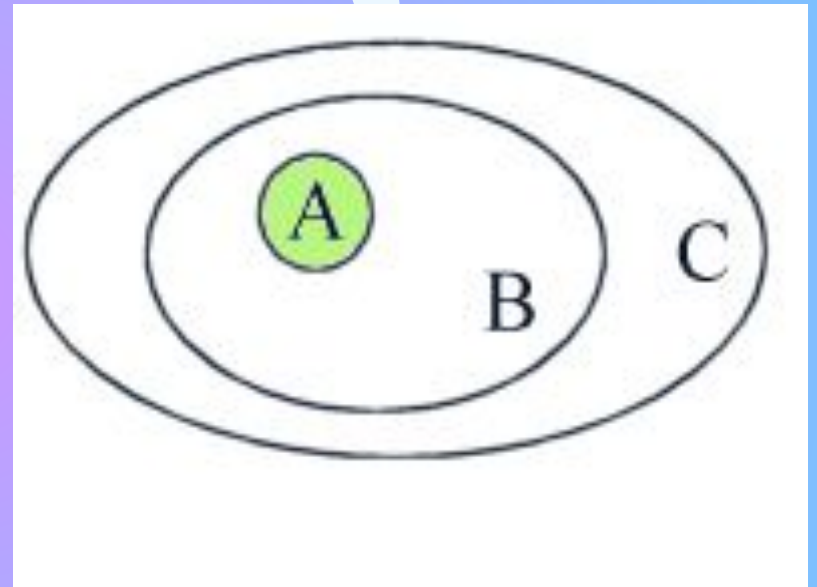
2. $(A \setminus B) \cup C$



$$3. (C \cap B) \cap A$$



$$4. C \setminus (B \cup A)$$



**«Изучение трудов
Эйлера
остается лучшей
школой
в различных
областях математики
и не может быть
заменено ничем другим»**

Карл Гаусс

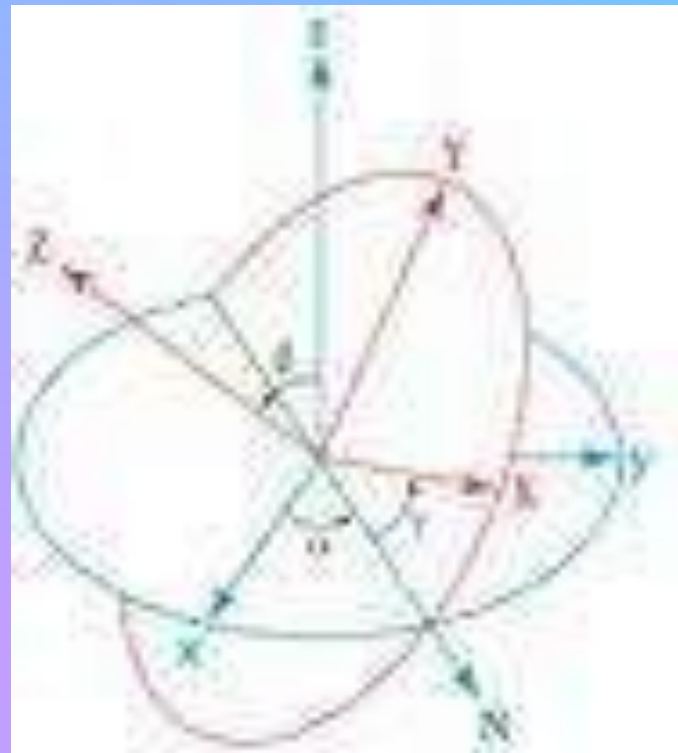


Эйлер своим вкладом в науку

заслужил признание

и современников

и потомков.



**И вправе называться
самым
продуктивным
математиком
XVIII века**



Чем быстрее меняю, тем быстрее развиваюсь!



Благодарим за внимание!

