# Квадратные уравнения

2010 г.

**«Уравнение - это золотой ключ, открывающий все математические сезамы».**

**С. Коваль.**

# Специальные методы:

1. Метод выделения квадратного двучлена.
2. Метод «переброски» старшего коэффициента.
3. На основании теорем.

# Общие методы:

**Разложение на множители;**

**Введение новой переменной;**

**Графический метод.**

**Впервые ввёл термин «квадратное уравнение» немецкий философ** **Кристиан Вольф.**


**Кристиан Вольф** - **знаменитый немецкий философ, родился в 1679 г. в Бреславле, в семье простого ремесленника, изучал в Йене сначала богословие, потом математику и философию.**

**Сильвестр Джеймс Джозеф** – английский математик, который ввёл термин «дискриминант».

В 13 – 16 веках даются отдельные методы решения различных видов квадратных уравнений. Слияние этих методов произвел в 1544 году немецкий математик – Михаэль Штифель. Это было настоящее событие в математике.

# Энциклопедия квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(a \neq 0)$$

**РЕШЕНИЕ**

**НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

| в=0 | с=0 | в,с=0 |
|---|---|---|
| $ax^2+c=0$ | $ax^2+вx=0$ | $ax^2=0$ |

# Алгоритм решения

в=0

$ax^2+c=0$

1.Переносим c в правую часть уравнения.

$$ax^2 = -c.$$

2.Делим обе части уравнения на $a \neq 0$.

$$x^2 = \frac{-c}{a} \; .$$

3.Если $\frac{-c}{a} > 0$ - два решения:

$x_1 = \sqrt{-c : a}$ и $x_2 = -\sqrt{-c : a}$

Если $\frac{-c}{a} < 0$ - нет решений.

# Алгоритм решения

$c=0$

$ax^2+вx=0$

1. **Выносим $x$ за скобки:**

   $x\,(ax + в) = 0.$

2. **«Разбиваем» уравнение на два:**

   $x = 0,\ \ ax + в = 0.$

3. **Два решения:**

   $x = 0$ и $x = \frac{-b}{a}$ $(a \neq 0).$

# Алгоритм решения

в,с=0

$ax^2=0$

1. Делим обе части уравнения на $a \neq 0$.

$$x^2 = 0$$

2. Одно решение: $x = 0$.

# Неполные квадратные уравнения:

| | |
|---|---|
| $ax^2 = 0$ | $x = 0$ |
| $ax^2 + bx = 0,$<br>$(b \neq 0)$ | $x = 0,$<br>$x = -\frac{b}{a}$ |
| $ax^2 + c = 0,$<br>$(c \neq 0)$ | Если $-\frac{c}{a} < 0$, то корней нет<br>Если $-\frac{c}{a} > 0$, то $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ |

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

**D < 0**

**Корней нет**

**D = 0**

$$x = -\frac{b}{2a}$$

**D > 0**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

b = 2k (чётное число)

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$(D_1 \geq 0)$$

# Теорема Виета

*если* $x_1$ и $x_2$ – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

*то* $x_1 + x_2 = -p$ $(D \geq 0)$

$x_1 \cdot x_2 = q$

*если* $x_1$ и $x_2$ – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

*то* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $(D \geq 0)$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

# Метод выделения квадрата двучлена.

**Суть метода:** привести квадратное уравнение общего вида к неполному квадратному уравнению.

**Пример:** $x^2 - 6x + 5 = 0.$

# Метод «переброски» старшего коэффициента.

Корни квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{и} \quad y^2 + by + ac = 0$$

связаны соотношениями

$$x_1 = \frac{y_1}{a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{y_2}{a}$$

**Пример:** $2x^2 - 9x - 5 = 0.$

# На основании теорем:

Если в квадратном уравнении $a+b+c=0$, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $\frac{c}{a}$

Если в квадратном уравнении $a+c=b$, то один из корней равен (-1), а второй по теореме Виета равен $\left(-\frac{c}{a}\right)$

**Примеры**: $200x^2 + 210x + 10 = 0.$

# Метод разложения на множители

**Цель:** привести квадратное уравнение общего вида к виду

$A(x) \cdot B(x) = 0$,

где A(x) и B(x) – многочлены относительно x.

**Способы:**

- Вынесение общего множителя за скобки;
- Использование формул сокращенного умножения;
- Способ группировки.

**Пример:** $4x^2 + 5x + 1 = 0.$

# Введение новой переменной.

**Умение удачно ввести новую переменную – важный элемент математической культуры. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной.**

**Пример:**

$$(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2.$$

# Графический метод

Для решения уравнения $f(x) = g(x)$ необходимо построить графики функций

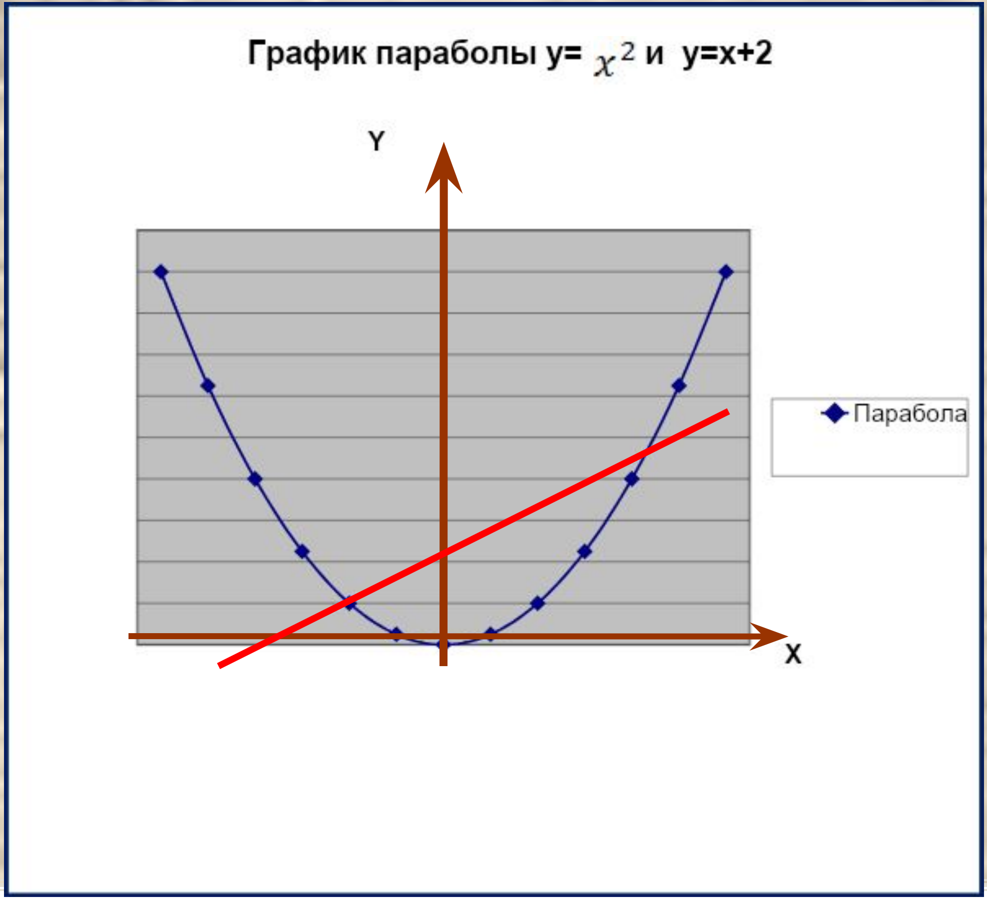
$y = f(x)$, $y = g(x)$

и найти точки их пересечения;

абсциссы точек пересечения и будут корнями уравнения.

**Пример:** $x^2 = x + 2.$

**Графический метод часто применяют не для нахождения корней уравнения, а для определения их количества.**



# Метод выделения квадрата двучлена.

**Решим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.**

$x^2 - 6x + 5 = 0.$
$(x - 3)^2 - 4 = 0.$
$(x - 3)^2 = 4.$
$x - 3 = 2; \; x - 3 = -2.$
$x = 5, x = 1.$

**Ответ:** 5; 1.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

# Метод “переброски” старшего коэффициента

**Решите уравнение $2x^2 - 9x - 5 = 0$.**

**$y^2 - 9y - 10 = 0$.**
D>0, по теореме, обратной теореме Виета, получаем корни: -1; 10,
далее возвращаемся к корням исходного уравнения: - 0,5; 5.

**Ответ**: 5; -0,5.

**$ax^2 + bx + c = 0$ и $y^2 + by + ac = 0$**

**связаны соотношениями:** $x_1 = \frac{y_1}{a}$ $\quad x_2 = \frac{y_2}{a}$

**Теорема 1.** Если в квадратном уравнении $a + b + c = 0$, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $\frac{c}{a}$

**Решите уравнение $137x^2 + 20x - 157 = 0$.**

$137x^2 + 20x - 157 = 0.$

$a = 137,\ b = 20,\ c = -157.$

$a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0.$

$x_1 = 1,\quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$

***Ответ*** $\frac{-157}{137}$ .

**Теорема 2.** Если в квадратном уравнении $a + c = b$, то один из корней равен (-1), а второй по теореме Виета равен $\left(-\frac{c}{a}\right)$

**Решите уравнение $200x^2 + 210x + 10 = 0$.**

$200x^2 + 210x + 10 = 0.$

$a = 200,\ b = 210,\ c = 10.$

$a + c = 200 + 10 = 210 = b.$

$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{10}{200}$

**Ответ:** -1; -0,05

# Метод разложения на множители.

**Решите уравнение $4x^2 + 5x + 1 = 0$.**

$4x^2 + 5x + 1 = 0.$

$4x^2 + 4x + x + 1 = 0.$

$4x(x+1) + (x+1) = 0.$

$4x(x + 1) = 0.$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а второй при этом не теряет смысла, или когда оба равны нулю.

$4x = 0, \quad x + 1 = 0.$

$x = 0, \quad x = -1.$

**Ответ:** 0; -1.

# Метод введения новой переменной.

**Решите уравнение** **$(2x+3)^2 = 3(2x+3) – 2$.**
$(2x+3)^2 = 3(2x+3) – 2$.
Пусть: $t = 2x + 3$.
Произведем замену переменной: $t^2 = 3t - 2$.
$t^2 -3t + 2 = 0$. $D > 0$.
По теореме, обратной теореме Виета: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.
Произведем обратную замену и вернемся к переменной x, получим следующие корни:
-1; -0,5.
**Ответ:** -1; -0,5.