

10784.36
5 × 9 ÷ 1
2.719372

10784.36
5 × 9 ÷ 1
2.719372

Квадратные уравнения



10784.36
5 × 9 ÷ 1
2.719372

**«Уравнение - это золотой ключ,
открывающий все
математические сезамы».**

С. Коваль.

Специальные методы:

- 1. Метод выделения квадратного двучлена.**
- 2. Метод «переброски» старшего коэффициента.**
- 3. На основании теорем.**

Общие методы:

Разложение на множители;

**Введение новой
переменной;**

Графический метод.

**Впервые ввёл термин «квадратное уравнение»
немецкий философ **Кристиан Вольф**.**



Кристиан Вольф -
знаменитый немецкий
философ, родился в 1679 г.
в Бреславле, в семье
простого ремесленника,
изучал в Йене сначала
богословие, потом
математику и философию.

Сильвестр Джеймс Джозеф – английский математик, который ввёл термин «дискриминант».



В 13 – 16 веках даются отдельные методы решения различных видов квадратных уравнений. Слияние этих методов произвел в 1544 году немецкий математик – **Михаэль Штифель**. Это было настоящее событие в математике.



Энциклопедия квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$(a \neq 0)$

РЕШЕНИЕ НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$b=0$$

$$ax^2+c=0$$

$$c=0$$

$$ax^2+bx=0$$

$$b, c=0$$

$$ax^2=0$$

Алгоритм решения

$$v=0$$
$$ax^2+c=0$$

1. Переносим c в правую часть уравнения.

$$ax^2 = -c.$$

2. Делим обе части уравнения на $a \neq 0$.

$$x^2 = \frac{-c}{a}.$$

3. Если $\frac{-c}{a} > 0$ - два решения:

$$x_1 = \sqrt{-c:a} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{-c:a}$$

Если $\frac{-c}{a} < 0$ - нет решений.

Алгоритм решения

$$c=0$$

$$ax^2+bx=0$$

1. Выносим x за скобки:

$$x(ax + b) = 0.$$

2. «Разбиваем» уравнение на два:

$$x = 0, \quad ax + b = 0.$$

3. Два решения:

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{-b}{a} \quad (a \neq 0).$$

Алгоритм решения

$$b, c = 0$$

$$ax^2 = 0$$

1. Делим обе части уравнения на $a \neq 0$.

$$x^2 = 0$$

2. Одно решение: $x = 0$.

Неполные квадратные уравнения:

$$ax^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$ax^2 + bx = 0, \\ (b \neq 0)$$

$$x = 0, \\ x = -\frac{b}{a}$$

$$ax^2 + c = 0, \\ (c \neq 0)$$

Если $-\frac{c}{a} < 0$, то корней нет
Если $-\frac{c}{a} > 0$, то $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$\underline{D < 0}$$

Корней нет

$$\underline{D = 0}$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$\underline{D > 0}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$b = 2k$ (чётное число)

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$(D_1 \geq 0)$$

Теорема Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

то $x_1 + x_2 = -p \quad (D \geq 0)$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

если x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (D \geq 0)$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Метод выделения квадрата двучлена.

Суть метода: привести квадратное уравнение общего вида к неполному квадратному уравнению.

Пример: $x^2 - 6x + 5 = 0.$

Метод «переброски» старшего коэффициента.

Корни квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{и} \quad y^2 + by + ac = 0$$

связаны соотношениями

$$x_1 = \frac{y_1}{a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{y_2}{a}$$

Пример: $2x^2 - 9x - 5 = 0.$

На основании теорем:

Если в квадратном уравнении $a+b+c=0$, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $\frac{c}{a}$

Если в квадратном уравнении $a+c=b$, то один из корней равен (-1), а второй по теореме Виета равен $\left(-\frac{c}{a}\right)$

Примеры: $200x^2 + 210x + 10 = 0.$

Метод разложения на множители

Цель: привести квадратное уравнение общего вида к виду

$$A(x) \cdot B(x) = 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены относительно x .

Способы:

- Вынесение общего множителя за скобки;
- Использование формул сокращенного умножения;
- Способ группировки.

Пример: $4x^2 + 5x + 1 = 0.$

Введение новой переменной.

Умение удачно ввести новую переменную – важный элемент математической культуры. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной.

Пример:

$$(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2.$$

Графический метод

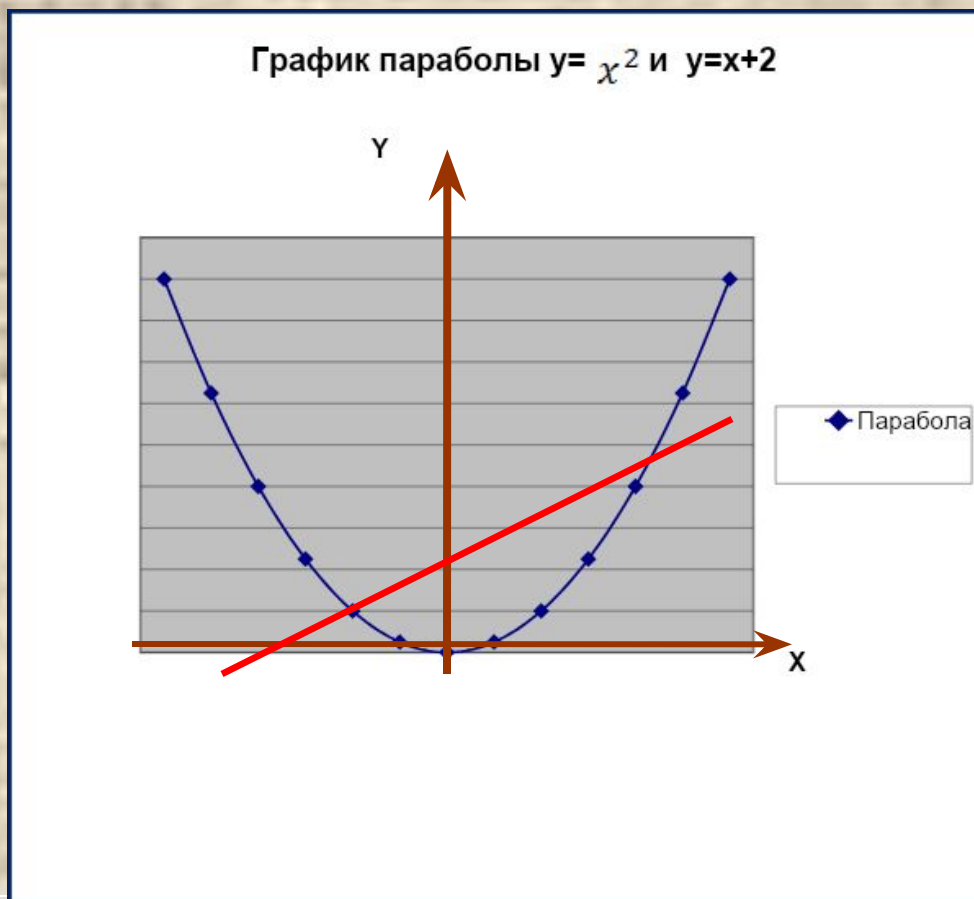
Для решения уравнения $f(x) = g(x)$ необходимо построить графики функций

$$y = f(x), \quad y = g(x)$$

и найти точки их пересечения; абсциссы точек пересечения и будут корнями уравнения.

Пример: $x^2 = x + 2.$

Графический метод часто применяют не для нахождения корней уравнения, а для определения их количества.



Метод выделения квадрата двучлена.

Решим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

$$(x - 3)^2 - 4 = 0.$$

$$(x - 3)^2 = 4.$$

$$x - 3 = 2; \quad x - 3 = -2.$$

$$x = 5, \quad x = 1.$$

Ответ: 5; 1.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Метод “переброски” старшего коэффициента

Решите уравнение $2x^2 - 9x - 5 = 0$.

$$y^2 - 9y - 10 = 0.$$

$D > 0$, по теореме, обратной теореме Виета, получаем корни: -1; 10, далее возвращаемся к корням исходного уравнения: -0,5; 5.

Ответ: 5; -0,5.

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ и } y^2 + by + ac = 0$$

связаны соотношениями:

$$x_1 = \frac{y_1}{a} \quad x_2 = \frac{y_2}{a}$$

Теорема 1. Если в квадратном уравнении $a + b + c = 0$, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $\frac{c}{a}$

Решите уравнение $137x^2 + 20x - 157 = 0$.

$$137x^2 + 20x - 157 = 0.$$

$$a = 137, b = 20, c = -157.$$

$$a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0.$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$$

Ответ $\frac{-157}{137}$.

Теорема 2. Если в квадратном уравнении $a + c = b$, то один из корней равен (-1) , а

второй по теореме Виета равен $\left(-\frac{c}{a}\right)$

Решите уравнение $200x^2 + 210x + 10 = 0$.

$$200x^2 + 210x + 10 = 0.$$

$$a = 200, b = 210, c = 10.$$

$$a + c = 200 + 10 = 210 = b.$$

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{10}{200}$$

Ответ: -1; -0,05

Метод разложения на множители.

Решите уравнение $4x^2 + 5x + 1 = 0$.

$$4x^2 + 5x + 1 = 0.$$

$$4x^2 + 4x + x + 1 = 0.$$

$$4x(x+1) + (x+1) = 0.$$

$$4x(x + 1) = 0.$$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а второй при этом не теряет смысла, или когда оба равны нулю.

$$4x = 0, \quad x + 1 = 0.$$

$$x = 0, \quad x = -1.$$

Ответ: 0; -1.

Метод введения новой переменной.

Решите уравнение $(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$.

$$(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2.$$

Пусть: $t = 2x + 3$.

Произведем замену переменной: $t^2 = 3t - 2$.

$$t^2 - 3t + 2 = 0. D > 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета: $t_1 = 1, t_2 = 2$.

Произведем обратную замену и вернемся к переменной x , получим следующие корни:

-1; -0,5.

Ответ: -1; -0,5.