Квадратные уравнения

2010 г.

«Уравнение - это золотой ключ, открывающий все математические сезамы».

С. Коваль.

Специальные методы:

1. Метод выделения квадратного двучлена.
2. Метод «переброски» старшего коэффициента.
3. На основании теорем.

Общие методы:

Разложение на множители;

Введение новой переменной;

Графический метод.

Впервые ввёл термин «квадратное уравнение» немецкий философ Кристиан Вольф.

Кристиан Вольф - знаменитый немецкий философ, родился в 1679 г. в Бреславле, в семье простого ремесленника, изучал в Йене сначала богословие, потом математику и философию.

Сильвестр Джеймс Джозеф – английский математик, который ввёл термин «дискриминант».

В 13 – 16 веках даются отдельные методы решения различных видов квадратных уравнений. Слияние этих методов произвел в 1544 году немецкий математик – Михаэль Штифель. Это было настоящее событие в математике.

Энциклопедия квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(a \neq 0)$$

РЕШЕНИЕ
НЕПОЛНЫХ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

в=0

$ax^2+c=0$

с=0

$ax^2+вx=0$

в,с=0

$ax^2=0$

Алгоритм решения

в=0

$ax^2+c=0$

1.Переносим с в правую часть уравнения.

$ax^2 = -c.$

2.Делим обе части уравнения на $a \neq 0$.

$x^2 = \frac{-c}{a}$.

3.Если $\frac{-c}{a} > 0$ - два решения:

$x_1 = \sqrt{-c : a}$ и $x_2 = -\sqrt{-c : a}$

Если $\frac{-c}{a} < 0$ - нет решений.

Алгоритм решения

$c=0$

$ax^2+вx=0$

1. Выносим x за скобки:

$x\ (ax + в) = 0.$

2. «Разбиваем» уравнение на два:

$x = 0,\ \ ax + в = 0.$

3. Два решения:

$x = 0$ и $x = \frac{-b}{a}$ $(a \neq 0)$.

Алгоритм решения

в,с=0

$ax^2=0$

1. Делим обе части уравнения на $a\neq 0$.

$$x^2 = 0$$

2. Одно решение: $x = 0$.

Неполные квадратные уравнения:

$ax^2 = 0$	$x = 0$
$ax^2 + bx = 0,$ $(b \neq 0)$	$x = 0,$ $x = -\frac{b}{a}$
$ax^2 + c = 0,$ $(c \neq 0)$	Если $-\frac{c}{a} < 0$, то **корней нет** Если $-\frac{c}{a} > 0$, то $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

D < 0

Корней нет

D = 0

$$x = -\frac{b}{2a}$$

D > 0

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

b = 2k (чётное число)

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$(D_1 \geq 0)$$

Теорема Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

то $x_1 + x_2 = -p$ $(D \geq 0)$

$x_1 \cdot x_2 = q$

если x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $(D \geq 0)$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Метод выделения квадрата двучлена.

Суть метода: привести квадратное уравнение общего вида к неполному квадратному уравнению.

Пример: $x^2 - 6x + 5 = 0.$

Метод «переброски» старшего коэффициента.

Корни квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{и} \quad y^2 + by + ac = 0$$

связаны соотношениями

$$x_1 = \frac{y_1}{a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{y_2}{a}$$

Пример: **$2x^2 - 9x – 5 = 0$.**

На основании теорем:

Если в квадратном уравнении $a+b+c=0$, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $\frac{c}{a}$

Если в квадратном уравнении $a+c=b$, то один из корней равен (-1), а второй по теореме Виета равен $\left(-\frac{c}{a}\right)$

Примеры: $200x^2 + 210x + 10 = 0.$

Метод разложения на множители

Цель: привести квадратное уравнение общего вида к виду

$A(x) \cdot B(x) = 0$,

где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены относительно x.

Способы:

- Вынесение общего множителя за скобки;
- Использование формул сокращенного умножения;
- Способ группировки.

Пример: $4x^2 + 5x + 1 = 0.$

Введение новой переменной.

Умение удачно ввести новую переменную – важный элемент математической культуры. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной.

Пример: $(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2.$

Графический метод

Для решения уравнения $f(x) = g(x)$ необходимо построить графики функций

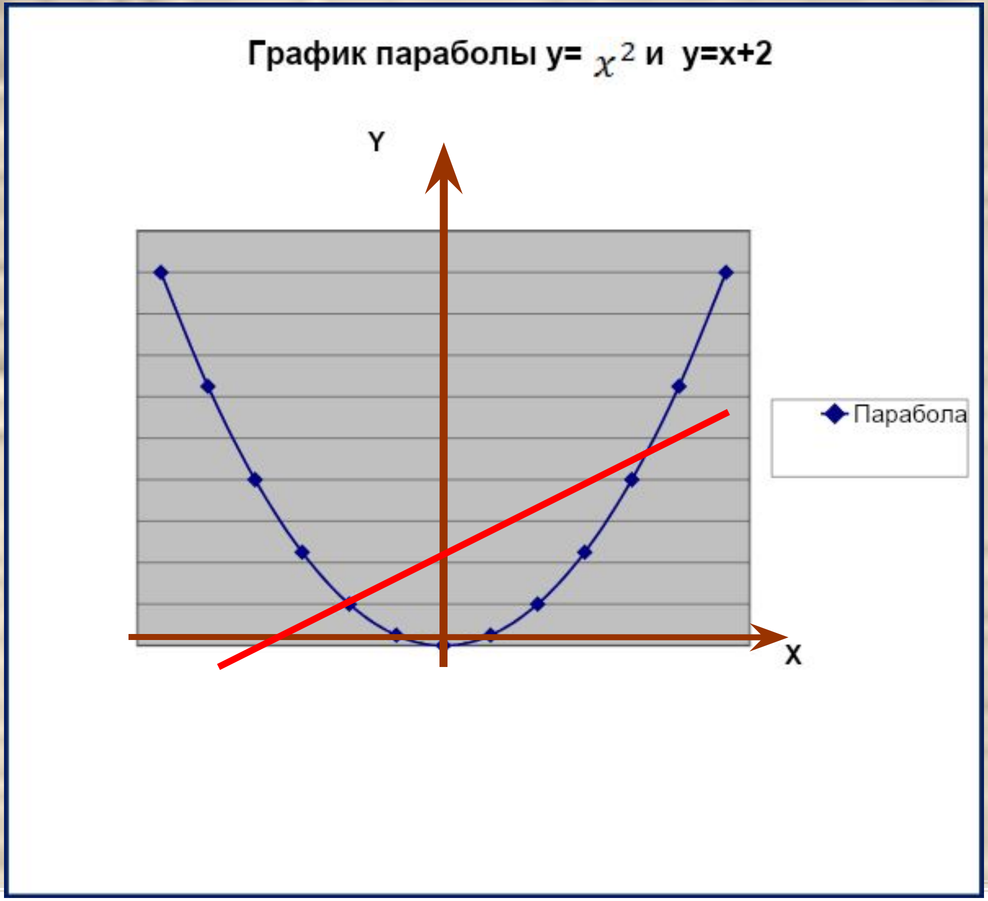
$y = f(x)$, $y = g(x)$

и найти точки их пересечения;

абсциссы точек пересечения и будут корнями уравнения.

Пример: $x^2 = x + 2$.

Графический метод часто применяют не для нахождения корней уравнения, а для определения их количества.



Метод выделения квадрата двучлена.

Решим уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$x^2 - 6x + 5 = 0.$
$(x - 3)^2 – 4 = 0.$
$(x - 3)^2 = 4.$
$x – 3 = 2; \; x – 3 = -2.$
$x = 5, x = 1.$

Ответ: 5; 1.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Метод "переброски" старшего коэффициента

Решите уравнение $2x^2 - 9x - 5 = 0$.

$y^2 - 9y - 10 = 0$.

D>0, по теореме, обратной теореме Виета, получаем корни: -1; 10, далее возвращаемся к корням исходного уравнения: - 0,5; 5.

Ответ: 5; -0,5.

$ax^2 + bx + c = 0$ **и** $y^2 + by + ac = 0$

связаны соотношениями: $x_1 = \dfrac{y_1}{a}$ $\quad x_2 = \dfrac{y_2}{a}$

Теорема 1. Если в квадратном уравнении $a + b + c = 0$, то один из корней равен 1, а второй по теореме Виета равен $\frac{c}{a}$

Решите уравнение $137x^2 + 20x – 157 = 0$.

$137x^2 + 20x – 157 = 0.$

$a = 137,\ b = 20,\ c = -157.$

$a + b + c = 137 + 20 – 157 = 0.$

$x_1 = 1,\quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$

Ответ $\frac{-157}{137}$.

Теорема 2. Если в квадратном уравнении $a + c = b$, то один из корней равен (-1), а второй по теореме Виета равен $\left(-\frac{c}{a}\right)$

Решите уравнение $200x^2 + 210x + 10 = 0$.

$200x^2 + 210x + 10 = 0.$

$a = 200,\ b = 210,\ c = 10.$

$a + c = 200 + 10 = 210 = b.$

$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{10}{200}$

Ответ: -1; -0,05

Метод разложения на множители.

Решите уравнение $4x^2 + 5x + 1 = 0$.

$4x^2 + 5x + 1 = 0.$

$4x^2 + 4x + x + 1 = 0.$

$4x(x+1) + (x+1) = 0.$

$4x(x + 1) = 0.$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а второй при этом не теряет смысла, или когда оба равны нулю.

$4x = 0, \quad x + 1 = 0.$

$x = 0, \quad x = -1.$

Ответ: 0; -1.

Метод введения новой переменной.

Решите уравнение **$(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$.**

$(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$.

Пусть: $t = 2x + 3$.

Произведем замену переменной: $t^2 = 3t - 2$.

$t^2 - 3t + 2 = 0$. $D > 0$.

По теореме, обратной теореме Виета: $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Произведем обратную замену и вернемся к переменной x, получим следующие корни:

-1; -0,5.

Ответ: -1; -0,5.