Эконометрика

Лекции д.э.н., д.т.н., профессора
Семёнычева В.К.,
г. Самара

Эконометрика

Экономика — Метрика (измерение)

Макроэкономика
Микроэкономика - **основы образования экономиста**
Эконометрика

Эконометрика → Экономическая теория ↕ Математика → Математическая экономика; Статистика

Статистика: Математическая статистика; Экономическая статистика

В централизованной экономике, эконометрика не изучалась, в отличие, скажем, от балансовых или оптимизационных методов: межотраслевого баланса и линейного программирования. Причинно-следственными связями занимается экономическая теория, а связями без выявления их причин - эконометрика. **Набор статистических методов, используемых для наблюдения за ходом развития экономики, её анализа (моделирования) и её прогнозов называется эконометрикой.**

Иллюстрация задач эконометрики на примере

Предложена модель функции потребления: $\boxed{\ln C = \beta_0 + \beta_1 \ln Y + \beta_2 \ln P}$,

где C – потребление некоторого пищевого продукта на душу населения в некотором году;

Y – реальный доход на душу населения в некотором году;

P – индекс цен на этот продукт, скорректированный (дефлированный) на общий индекс стоимости жизни (относительный уровень цен);

β_i - параметры.

<u>Задача «параметризации» модели - определение</u> β_i **:** 1.измерение Y, P (насколько корректно измерены данные, представляют ли они то, что должны представлять по нашему мнению? 2. Погрешность измерения Y, P и C аддитивна или мультипликативна ? 3. Какой метод использовать для параметризации – МНК ?

<u>Задача «спецификации» модели:</u> 1. Нет ли переменных, которые следовало бы дополнительно включить в уравнение (например, цены на непродовольственные товары)?
2. Не следует ли исключить из уравнения некоторую переменную? 3. Верно ли то, что модель линейная (верны ли теоретические предпосылки модели)? 4. Является ли модель полной? Может быть необходимо учесть и уравнение предложения, кроме уравнения спроса? 5. Достаточно ли изучать макроэкономическое уравнение или необходимы такие индивидуальные (микроэкономические) данные для поставленной задачи? 7. Может быть нужно выделить факторы, которые зависят непосредственно от принятия управленческих решений данным обьектом хозяйствования (предприятием, регионом), и влияние факторов, которые от менеджмента на данном хозяйствующем обьекте не зависят? 8. Модель является статической. Возможно, более подходящей была бы динамическая модель. Например, можно предположить, что прошлогодний доход может влиять на текущий уровень потребления.

<u>Примеры</u>: «автомобиль- зеркало заднего вида», «поиски у фонаря»

Регрессии

Регрессии

Парные — Множественные

Линейные по параметрам
Линеаризируемые
Нелинейные (существенно или внутренне нелинейные)

Пространственные (все переменные являются параметрами)

Трендовые (переменой является время)

Пространственно-временные (введение в пространственную регрессию фактора времени)

Каноническая структура регрессий

$\boxed{Y = D + \xi}$ **- аддитивная**

$\boxed{Y = D \cdot \xi} \Rightarrow \boxed{Y = D \cdot (1 + \xi)}$ **- мультипликативная**

D - детерминированная компонента;
ξ - стохастическая компонента (условия Гаусса – Маркова, гетероскедастичность !).

Парные регрессии (общее количество около 100)

1.Моделирование неслучайной компоненты алгебраическими полиномами:

Моделирование линейной функцией неслучайной компоненты:

$$\boxed{D=A+Bx} \Rightarrow \begin{cases} Y=A+Bx+\xi \Rightarrow MHK \\ Y=(A+Bx)\cdot(1+\xi) \Rightarrow ? \end{cases}$$

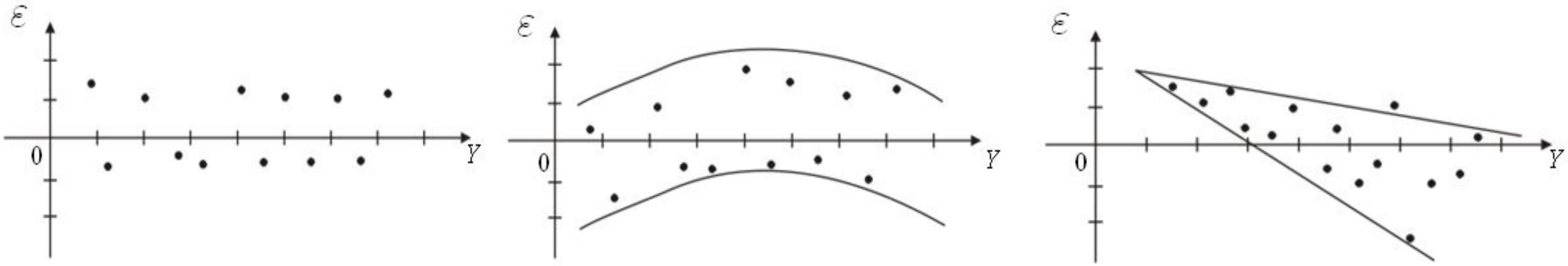
Модель линейна по параметрам и по переменным

$$Y=(A+Bx)\cdot(1+\xi)=A+Bx+\boxed{\xi(A+Bx)}$$

$\boxed{\varepsilon=\xi(A+Bx)}$ - гетероскедастическая стохастическая компонента (классический МНК применять нельзя).

Методы компенсации или коррекции: взвешенный МНК, постулирование закона изменения дисперсии ε и др.

Демонстрация и методы компенсации (или коррекции) гетероскедастичности



Взвешенный МНК (постулирование закона изменения дисперсии ε (но параметры A и B - неизвестны) и др.

Моделирование неслучайной компоненты параболой

$$D = A + Bx + Cx^2$$

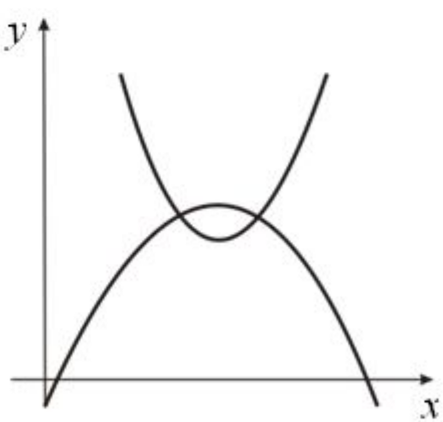
$$Y = \begin{cases} A + Bx + Cx^2 + \xi - \textit{аддитивная структура} \\ (A + Bx + Cx^2)\cdot(1+\xi) - \textit{мультипликативная структура} \end{cases}$$

Модель линейна по параметрам, нелинейна по переменным.

Для аддитивной структуры вхождения стохастической компоненты и при выпонении условий Гаусса-Маркова применим МНК:

$$\sum_i \xi_i^2 = \sum_i (Y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)^2 = Q(A,B,C);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial B} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial C} = 0 \end{cases} \Rightarrow A^*, B^*, C^*$$



Можно свести задачу к множественной линейной регрессии, если ввести обозначения: $\boxed{x^2 = z}$ (линеаризирующее преобразование), что дает

$$y = A + Bx + Cz + \xi$$

Для мультипликативной структуры будем иметь гетероскедастическую стохастическую компоненту:

$$\boxed{Y = (A + Bx + Cx^2)\cdot(1+\xi) = A + Bx + Cx^2 + \xi(A + Bx + Cx^2)}$$

2) Моделирование неслучайной компоненты обобщенной обратной функцией $\boxed{D = \dfrac{1}{A+Bx}}$

При аддитивной структуре стохастической компоненты будем иметь

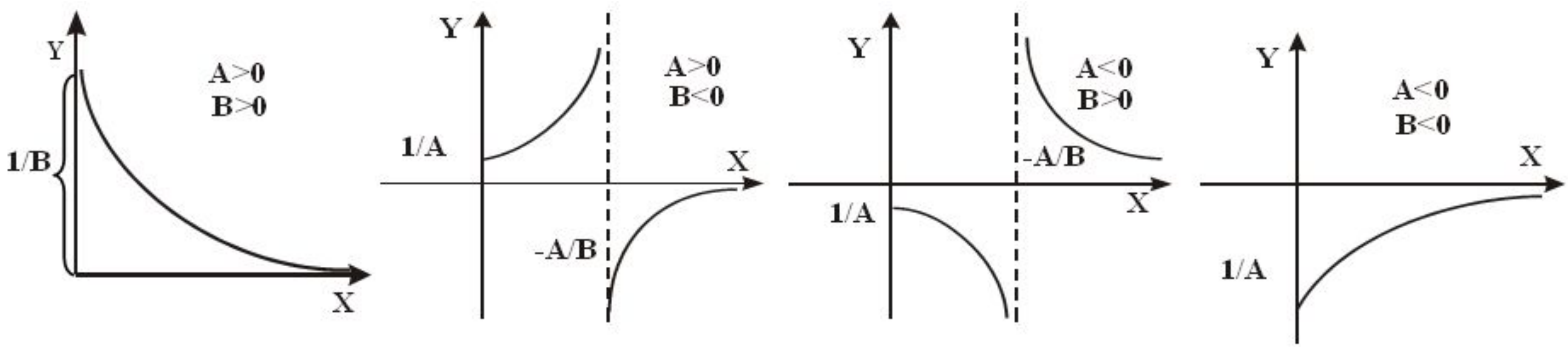
$$\boxed{Y = \frac{1}{A+Bx} + \xi} \Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{Y} = A + Bx + \boxed{(A+Bx)\xi}}$$

Обычно предлагают использовать линеаризирующее преобразование $z = 1/Y$ и применять МНК к выражению $\boxed{Z = A + Bx + \varepsilon}$, что неверно, т.к. означает по сути принятие неканонической (просто «удобной») структуры $\boxed{Y = \dfrac{1}{A+Bx+\varepsilon}}$

При мультипликативном вхождении стохастической компоненты

$$\boxed{Y = \frac{1}{A+Bx}(1+\xi)} = \frac{1}{A+Bx} + \boxed{\frac{\xi}{A+Bx}}$$

имеем гетероскедастическую стохастическую компоненту (взвешенный МНК).



3.Моделирование неслучайной компоненты обратной функцией

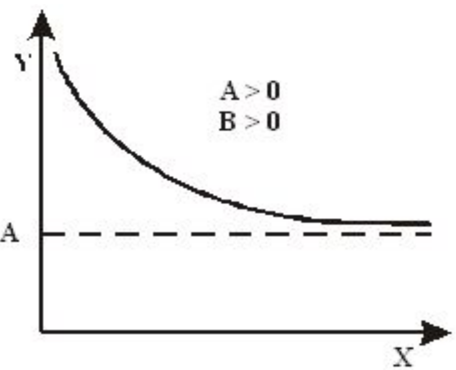
При аддитивной стохастической компоненте будем иметь $Y = A + \frac{B}{x} + \xi = \frac{Ax+B}{x} + \boxed{\xi x},$

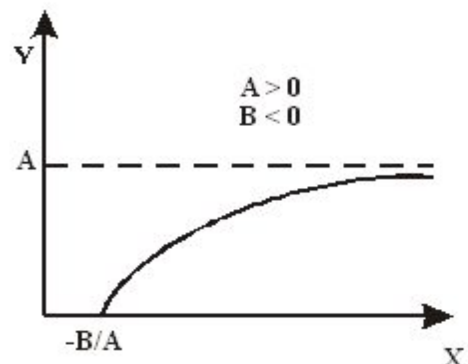
$\boxed{1/x = z} \Rightarrow \boxed{Y = A + Bz + \xi}$

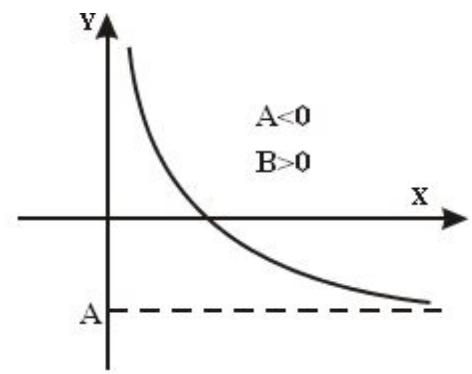
После данного линеаризирующего преобразования модель является линейной по параметрам. Стохастическая компонента – гомоскедастична, можно применять МНК.

При мультипликативной стохастической компоненте $Y = (A + \frac{B}{x})(1+\xi) = A + \frac{B}{x} + \boxed{A \cdot \xi + \frac{B}{x} \cdot \xi}$

Стохастическая компонента $\varepsilon = A \cdot \xi + \frac{B}{x} \cdot \xi$ является гетероскедастичной, нужно использовать специальные методы сглаживания.







Зависимость между объемом выпуска X и средними фиксированными издержками Y.

Зависимость между доходом X и спросом на блага Y (например, на товары первой необходимости либо товары относительной роскоши); это так называемые функции Торнквиста (в этом случае $x = -B/A$ - минимально необходимый уровень дохода)

Кривая Филлипса, определяющая зависимость между уровнем безработицы X и процентным изменением заработной платы Y. При этом точка пересечения прямой с осью OX - естественный уровень безработицы.

4.Моделирование неслучайной компоненты степенной функцией

$$Y = Ax^{\beta}$$

$$Y = Ax^{\beta} \cdot e^{\xi} \quad (1)$$

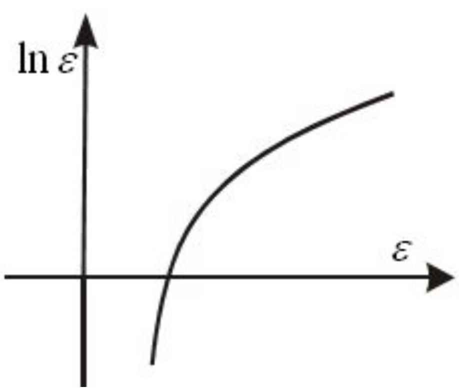
$$Y = Ax^{\beta} \cdot \xi \quad (2)$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}x^{\beta} + \xi \quad (3)$$

Для (1): $\boxed{l\,\mathrm{n}\,Y = l\,\mathrm{n}\,A + \beta l\,\mathrm{n}\,x + \xi}$ $\boxed{Y^{*} = A^{*} + \beta x^{*} + \xi}$; $\mathrm{Y}^{*} = l\,\mathrm{n}\,y,\ \ A^{*} = l\,\mathrm{n}\,A,\ x^{*} = l\,\mathrm{n}\,x$

Одно из условий (Гаусса-Маркова) для несмещенности, эффективности, состоятельности МНК оценок А* и β парной линейной регрессии является нормальный закон распределения стохастической компоненты, $\xi = \ln e^{\varepsilon}$, следовательно, e^{ε} - должна иметь логнормальное распределение. Данное условие является существенным ограничением для возможности применения операции логарифмирования.

Для (2): $\boxed{\ln Y = \ln A + \beta \ln x + \ln \varepsilon}$. При этом ε должно быть неотрицательным: также имеется ограничение для возможности применения операции логарифмирования.



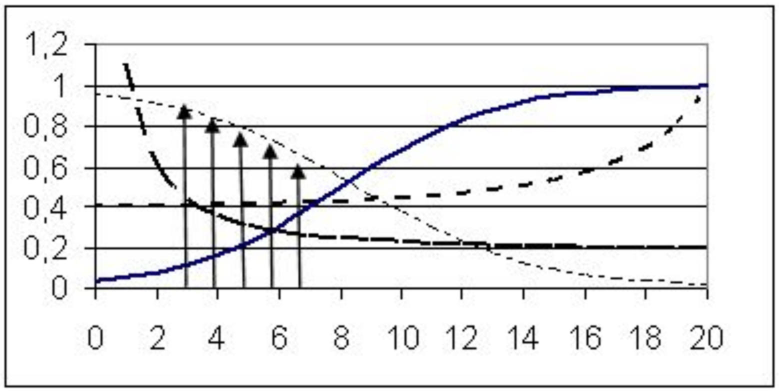
Для (3): $\boxed{\ln Y = \ln(Ax^{\beta} + \varepsilon)}$.

Данную модель зачастую считают естественной в экономической практике. Однако в этом случае прием логарифмирование для линеаризации и сведения задачи к парной линейной регрессии вообще не работоспособен, необходимо обращение к другим методам.

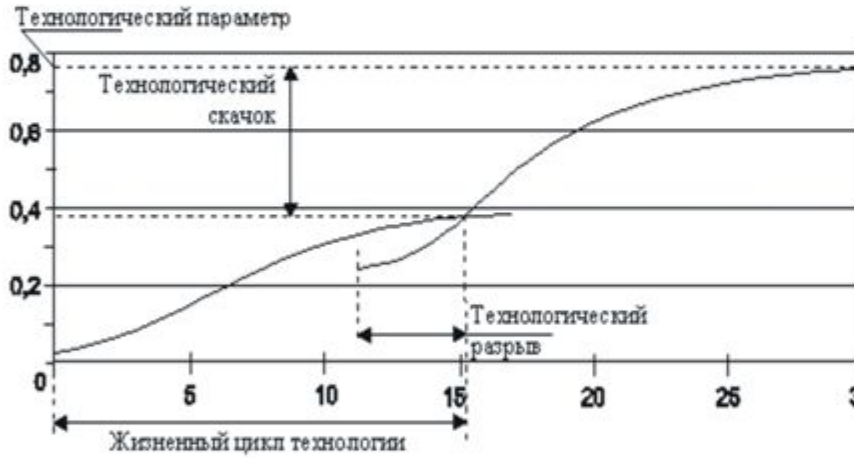
В качестве экономических моделей, особенно в инновационной экономике, широко употребляют **логистические модели (логисты, S-образные модели, модели роста, модели жизненного цикла)**.

<u>Некоторые примеры</u> логистических процессов:

- изменение спроса на товары, обладающие способностью достигать некоторого уровня насыщения; доля насыщения рынка новыми товарами и услугами, в том числе описание числа пользователей российского Интернета; рост населения страны в страховых исследованиях; развитие биологических популяций; развитие тех или иных показателей технологических нововведений; динамика антисоциального поведения (коллективного протеста, тактики террористов, распространения наркотиков) и др.



Возможные виды логист



Логистическая динамика замены технологий

<u>Наиболее популярные модели логист:</u>

1. $D = \dfrac{1}{A_0 + A_1 \exp(-\alpha_1 t)}$ - <u>модель Верхулста (Перла-Рида);</u>

2.<u>Обобщенная логистическая модель</u>

$D = \dfrac{1}{A_0 + \sum\limits_{I=1}^{m} A_i \exp(-\alpha_i t)}$, где обычно $m \le 3$;

3. $D = A \cdot B^{Ct}$ - <u>модель Гомперца</u>;

4. $D = C\left(1 - (1 + \alpha t) \cdot \exp(-\alpha t)\right)$ - <u>модель Рамсея</u>.

Пример: Модель Верхулста для детерминированной компоненты: $D = \dfrac{1}{A_0 + A_1 e^{-\alpha_1 t}}$

В известном методе параметризации считают стохастическую компоненту мультипликативной, но по отношению к одному из слагаемых знаменателя: $Y = \dfrac{1}{A_0 + A_1 e^{-\alpha_1 t} \cdot \boxed{e^{\varepsilon}}}$. Затем переходят к обратным значениям выборки определяемого параметра 1/D=z, получают обобщенную показательную функцию $\boxed{z = A_0 + A_1 e^{-\alpha_1 t} \cdot \boxed{e^{\varepsilon}}}$. Затем, считая A_0 известной, используют прием логарифмирования для $z - A_0 = A_1 e^{-\alpha_1 t}$, что дает парную линейную регрессию $\boxed{\ln T = \ln A - \alpha_1 t + \varepsilon}$ (где $T = \dfrac{1}{Y} - A_0$) и возможность получения МНК-оценок.

Недостатки:- нелинейное преобразование исходной выборки (как результат – низкая точность моделирования и, особенно, прогнозирования), необходимость априорного знания A_0 (часто это информативный параметр), необходимость условия мультипликативности стохастической компоненты и ее логнормального закона распределения.

Вместо канонических структур, принятых в эконометрике,

$Y = \dfrac{1}{A_0 + A_1 e^{-\alpha_1 t}} + \xi$ или $Y = \dfrac{1}{A_0 + A_1 e^{-\alpha_1 t}}(1+\xi)$

в данном случае используют искусственную структуру вхождения стохастической компоненты:

6. Моделирование неслучайной компоненты гиперболическими полиномами

$Y = \sum\limits_{i=0}^{m} \dfrac{1}{A_i t^i}, \Rightarrow T_{4k} = \dfrac{1}{A_0} + \dfrac{1}{A_1 (k\Delta)}$ - равносторонняя гипербола;

$T_{5k} = \dfrac{1}{A_0} + \dfrac{1}{A_1 (k\Delta)} + \dfrac{1}{A_2 (k\Delta)^2}$ - квадратичная гипербола.

7. Моделирование неслучайной компоненты дробно-рациональными функциями

$$D = A_1 t + A_0 + A_3 / t;$$

$$D = \frac{1}{A_2 t^2 + A_1 t + A_0};$$

$D = \frac{A_0}{A_1 + t} + A_2$ - в случае «пространственной» динамики моделирует спрос на определенный вид товаров или услуг от уровня доходов потребителей: **функция Торнквиста на товары относительной роскоши** (товары второй необходимости), например, дорогие продукты питания.

$D = \frac{A_2 t^2 + A_1 t}{t^2 + A_0}$ - **функция Торнквиста на малоценные товары**.

$D = \frac{A_0 t}{t + A_1}$ - **функцияТорнквиста на товары первой необходимости**

(например, на основные продукты питания).

$D = \frac{A_0 t^2 + A_1 t}{t + A_2}$ - **функция Торнквиста на предметы роскоши.**

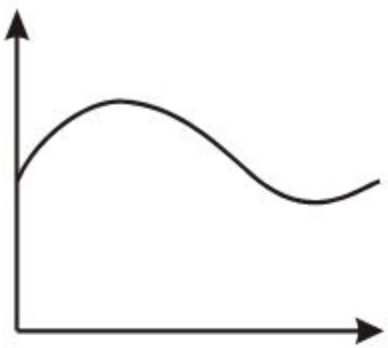
Функции Торнквиста являются упрощенными моделями спроса. Спрос Гиффена.

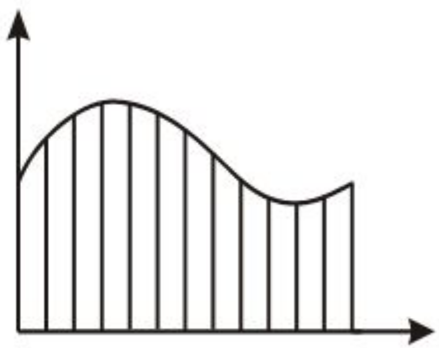
Модели экономической (пространственной и временной) динамики

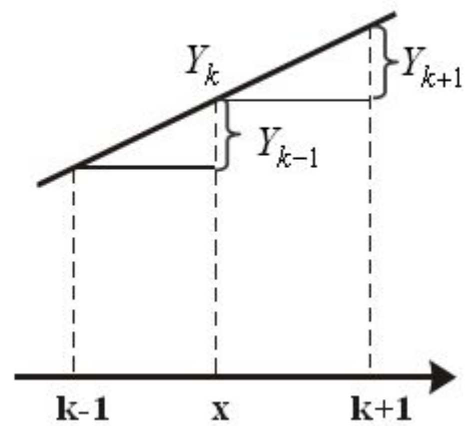
<u>Примеры пространственной динамики:</u> спрос в функции цены; обьемы продаж в функции рекламного бюджета, обьем привлекаемых банком средств в функции нормы затрат на привлекаемые средства и т.д.

<u>Примеры временной динамики:</u> ежегодные, ежеквартальные, ежемесячные или ежедневные данные по прибыли, остаткам на счетах банка, данные на кв. метр жилья, обьемы перевозок авиакомпании, показатели качества добываемой бокситовой руды, данные по ВНП, ВВП, обьему экспорта, инфляции и т.д.

<u>Равномерная дискретизация</u> $\Rightarrow$ <u>Решетчатые функции</u>







Левая первая разность

$$\boxed{\Delta Y_k = Y_k - Y_{k-1}}$$

Правая первая разность

$$\boxed{\Delta Y = Y_{k+1} - Y_k}$$

Симметричная первая разность

$$\boxed{\Delta Y_k = Y_{k+1} - Y_{k-1}}$$

$$Y_{t-1},\ Y_t,\ Y_{t+1},\ Y_{t+2}$$

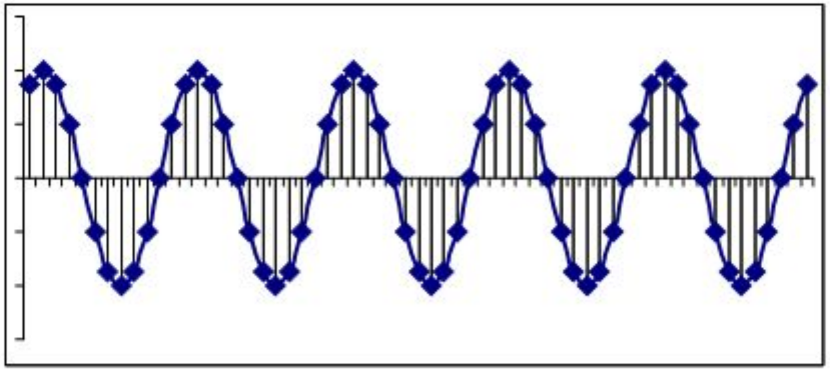
$$x_{t-1},\ x_t,\ x_{t+1},\ x_{t+2}$$

$$\boxed{Y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta t}} \quad \boxed{\Delta^2 Y_k = \Delta Y_k - \Delta Y_{k-1}} = Y_k - Y_{k-1} - Y_{k-1} + Y_{k-2} = \boxed{Y_k - 2Y_{k-1} + Y_{k-2}}$$

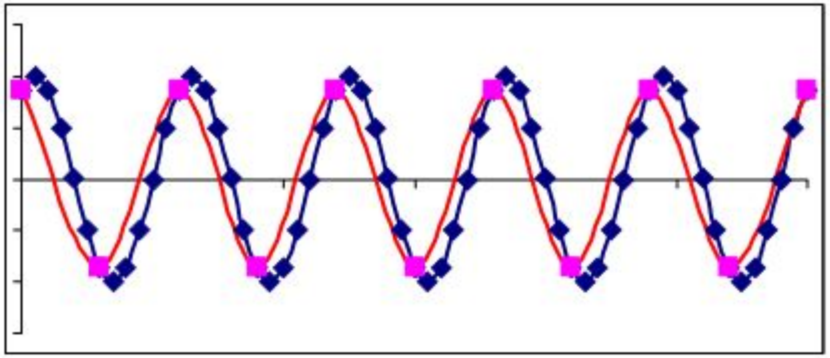
<u>Динамические модели -</u> используют не только текущие значения переменных, но и некоторые предыдущие по времени значения, а также само время.

$\boxed{t = k\Delta}$ - временные ряды или $\boxed{t = kh}$ - пространственные ряды динамики $\boxed{\Delta \le \frac{1}{2 f_{макс}}}$.

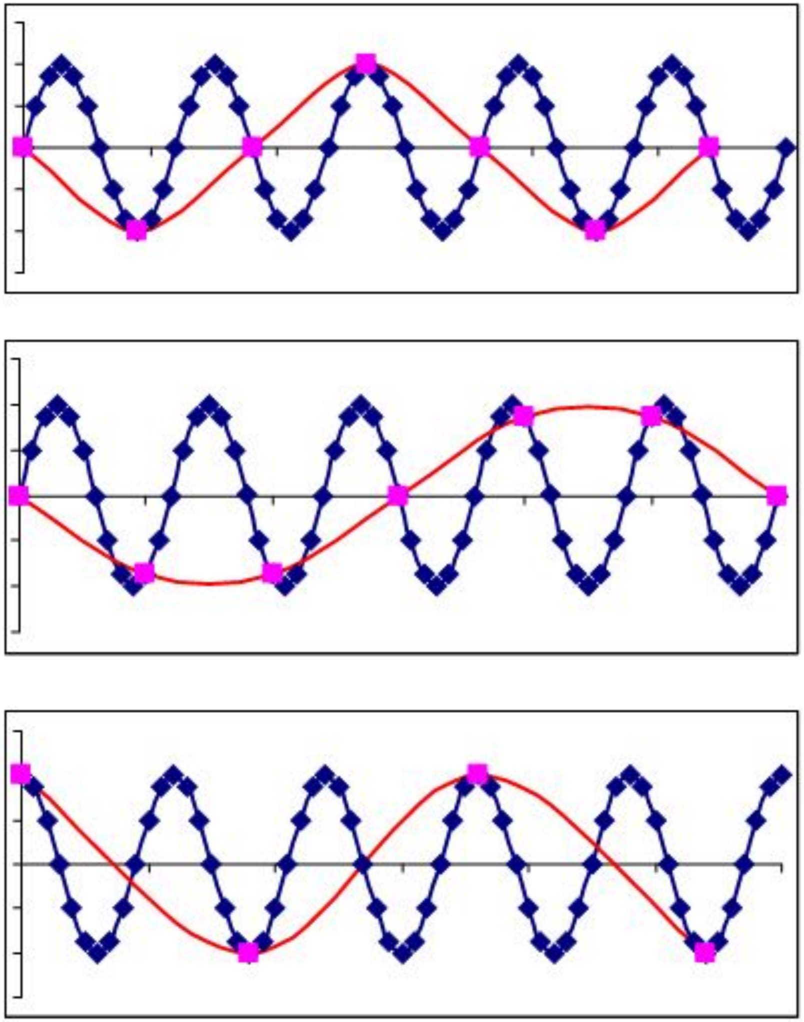
Модели экономической (пространственной и временной) динамики



Частота дискретизации гармонического сигнала меньше частоты Найквиста



Частота дискретизации гармонического сигнала равна частоте Найквиста



Частота дискретизации гармонического сигнала больше частоты Найквиста

Временные ряды. Лаги в экономических моделях

При анализе многих экономических показателей (особенно в макроэкономике) часто используются ежегодные, ежеквартальные, ежемесячные и ежедневные данные.

В этом случае следует упорядочить данные по времени их получения и построить так называемые временные ряды.

Динамические модели

Модели с распределенными лагами	**Авторегрессионные модели**
Лаговые переменные – переменные, влияние которых характеризуется определенным запаздыванием. Это модели, содержащие в качестве лаговых переменных лишь независимые переменные. $Y_k = \alpha + \beta_0 x_k + \beta_1 x_{k-1} + \ldots + \beta_k x_{k-l} + \varepsilon_k$	Это модели, уравнения которых в качестве лаговых объясняющих переменных включают значения зависимых переменных. $Y_k = \alpha + \beta x_k + \gamma y_{k-1} + \varepsilon_k$

Причин наличия лагов в экономике достаточно много, и среди них можно выделить следующие:

- Психологические причины – обычно выражаются через инерцию в поведении людей. Например, люди тратят свой доход постепенно, а не мгновенно. Привычка к определенному образу жизни приводит к тому, что люди приобретают те же блага в течение некоторого времени даже после падания реального дохода.
- Технологические причины – например, изобретение персональных компьютеров не привело к мгновенному вытеснению ими больших ЭВМ в силу необходимости замены соответствующего программного обеспечения, которое потребовало продолжительного времени.
- Институциональные причины – например, контракты между фирмами, трудовые договоры требуют определенного постоянства в течение времени контракта.
- Механизм формирования экономических показателей – например, инфляция во многом является инерционным процессом, денежный мультипликатор также проявляет себя на определенном временном интервале.

Оценка моделей с лагами в независимых переменных

$Y_k = \alpha + \beta_0 x_k + \beta_1 x_{k-1} + \ldots + \beta_e x_{k-e} + \xi_k$ - конечное число слагаемых;

$Y_k = \alpha + \beta_0 x_k + \beta_1 x_{k-1} + \ldots + \xi_k$ - бесконечное число слагаемых.

При конечном числе лагов – можно использовать замену переменных и МНК.

$x_0^* = x_k, \quad x_1^* = x_{k-1}, \ldots, \quad x_e^* = x_{k-e}$

$Y_k = \alpha + \beta_0 x_0^* + \beta_1 x_1^* + \ldots + \beta_e x_e^* + \xi_k$ - множественная линейная регрессия.

При бесконечном числе лагов необходимо последовательно увеличивать число слагаемых для того, чтобы остановиться на адекватном конечном числе и затем осуществить замену переменных и МНК.

Декомпозиция рядов динамики

Учет сезонной и циклической компонент в ряде временной динамики

Аддитивный ряд динамики $\boxed{Y_k = T_k + C_k + S_k + \varepsilon_k}$,

Мультипликативный ряд динамики $\boxed{Y_k = T_k \cdot C_k \cdot S_k \cdot \varepsilon_k}$,

Аддитивно-мультипликативный ряд динамики $\boxed{Y_k = \{T_k + C_k\} \cdot S_k + \varepsilon_k}$ или $\boxed{Y_k = T_k \cdot C_k + S_k + \varepsilon_k}$.

Критерием декомпозиции может быть и уровень компонент ряда:

$|\xi_k| << |T_k|, |S_k| < |T_k|, |\xi_k| < |S_k|, |\xi_k| < |C_k|$.

Учет календарной и инфляционной компонент

$$Y_k = T_k + C_k + S_k + K_k + I_k + \varepsilon_k \quad \text{или} \quad Y_k = T_k \cdot C_k \cdot S_k \cdot K_k \cdot I_k \cdot \varepsilon_k .$$

Параметрические модели сезонных (циклических) компонент

$$\boxed{S_K = A_3 \sin(\omega k\Delta + \Psi)}$$

где A_3 – амплитуда гармоники, $\omega = 2\pi / T$ – её частота, T- период, Ψ - начальная фаза.

$$\boxed{S_k = A_0 / 2 + \sum_{r=1}^{\infty} \left(A_r \cos r\omega k\Delta + B_r \sin r\omega k\Delta\right)},$$

где $A_0 = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{n}$, $A_r = \dfrac{2 \sum_{k=1}^{n} Y_k \cos k\Delta}{n}$, $B_r = \dfrac{2 \sum_{k=1}^{n} Y_k \sin k\Delta}{n}$, $n = T/\Delta$, $r = 1, 2, 3, \ldots$,

Модели эволюции амплитуд

$$\boxed{S_K = \mathrm{A}_3(\mathrm{k}\Delta)\sin(\omega k\Delta + \psi)}$$

$$\boxed{S_k = A_0 / 2 + \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \cos r\omega k\Delta + B_r \sin r\omega k\Delta)(k\Delta)^r}$$

$$\boxed{S_K = \mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{k}\Delta} \cdot \sin(\omega k\Delta + \psi)}$$

$$\boxed{Y_k = D_k(1 + D \cdot \sin(\omega k\Delta + \psi))}$$

Обобщенные параметрические модели авторегрессии-скользящего среднего (ARMA-модели) (более 120 моделей)

Известно несколько видов авторегрессионных моделей:

- **собственно модели** авторегрессии (AR - auto regressive);

- модели скользящего среднего (MA - moving average);

- авторегрессии - скользящего среднего (ARMA – autoregressive moving average);

- модели авторегрессии - проинтегрированного скользящего среднего (ARIMA - autoregressive integrated moving average);

- модели авторегрессии с условной гетероскедастичностью (ARCH - autoregressive conditional heteroscedasticity);

- **расширения указанных выше авторегрессионных моделей:** обобщенная авторегрессионная условно гетероскедастическая модель (GARCH – generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model), интегрированная обобщенная авторегрессионная условно гетероскедастическая модель (IGARCH - integrated generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model) и др.

$$\boxed{Y_k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Y_{k-i} + \sum_{i=1}^{g} \gamma_i \varepsilon_{k-i}}$$

Моделирование неслучайной компоненты суммой линейного тренда и гармоникой

$\boxed{Y_k = A_1 k\Delta + A_0 + A_3 \cos(\omega k\Delta + \psi) + \xi_k}$ - исходная модель

При $k \geq 4$ сконструируем обобщенную параметрическую модель авторегрессии –скользящего среднего четвертого порядка:

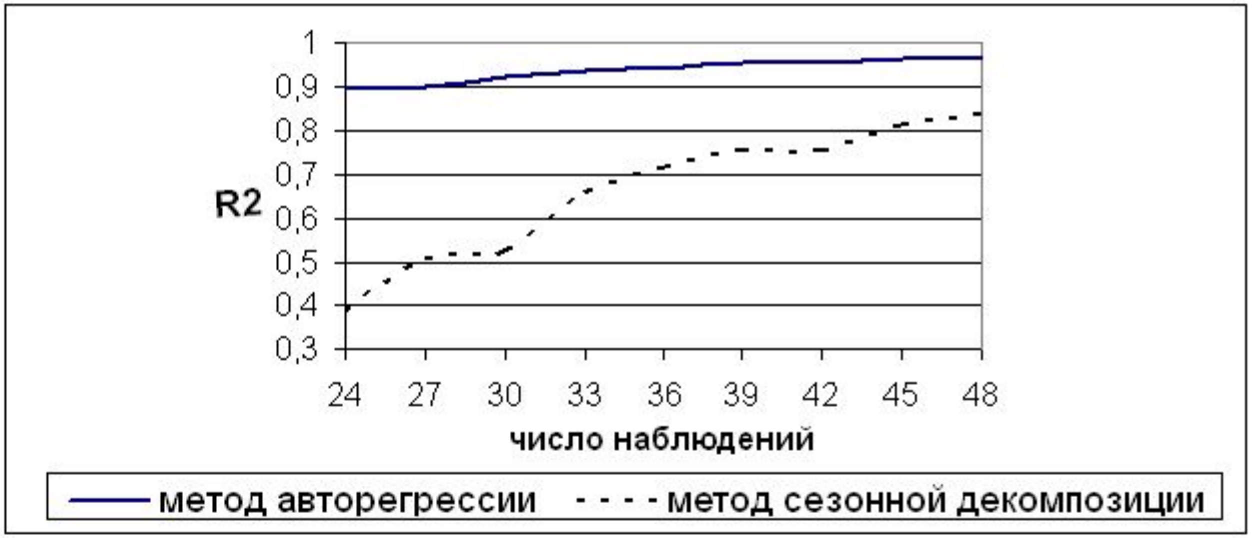
$$\boxed{Y_k = \lambda_1\left(Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + Y_{k-3}\right) + 2\left(Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-3}\right) - Y_{k-4} + \zeta_k,}$$

где $\zeta_k = \lambda_1\left(\xi_{k-1} - 2\xi_{k-2} + \xi_{k-3}\right) + 2\left(\xi_{k-1} - \xi_{k-2} + \xi_{k-3}\right) - \xi_{k-4},\ldots$ $\boxed{\lambda_1 = 2\cos\omega\Delta}.$

$$\lambda_1^O = \underset{\lambda_1}{\arg\min}\, M^O\{Y_k - \lambda_1\left(Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + Y_{k-3}\right) - 2\left(Y_{k-1} - Y_{k-2} + Y_{k-3}\right) + Y_{k-4}\}.$$

$$\boxed{\omega^O = (1/\Delta)\arccos\left(\lambda_1^O / 2\right) \pm 2\pi n,} \quad \text{где } n = 0,1,2,\ldots.$$

Сравнение значений R^2 от числа наблюдений для методов классической сезонной декомпозиции и авторегрессии



Моделирование неслучайной компоненты суммой линейного тренда и двух гармоник

$$\boxed{Y_k = A_1 k\Delta + A_0 + A_3 \sin(\omega_1 k\Delta + \psi_1) + A_6 \sin(\omega_2 k\Delta + \psi_2) + \xi_k}$$ - <u>исходная модель</u>

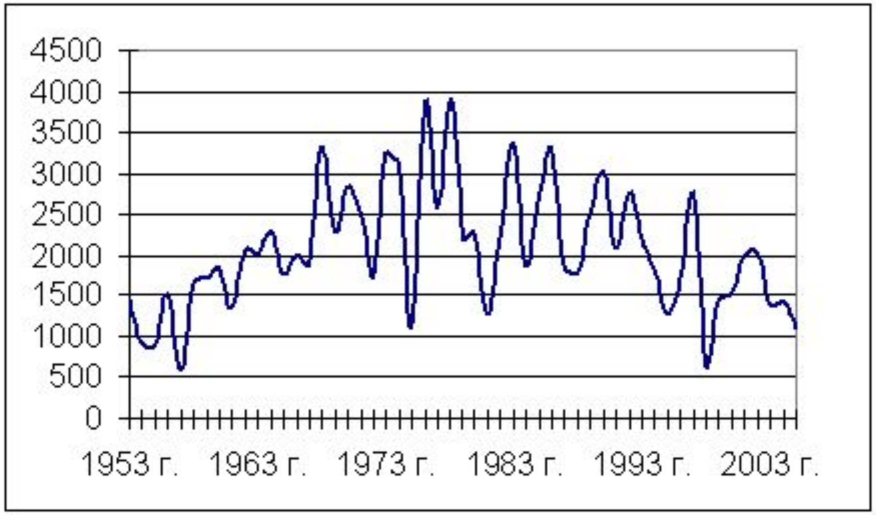
При $k \geq 6$ сконструируем обобщенную параметрическую ARIMA - модель

$$Y_k = 2Y_{k-1} - 3Y_{k-2} + 4Y_{k-3} - 3Y_{k-4} + 2Y_{k-5} - Y_{k-6} + (\lambda_1 + \lambda_2)(Y_{k-1} - 2Y_{k-2} + 2Y_{k-3} - 2Y_{k-4} + Y_{k-5}) -$$
$$-\lambda_1 \lambda_2 (Y_{k-2} - 2Y_{k-3} + Y_{k-4}) + \zeta_k,$$

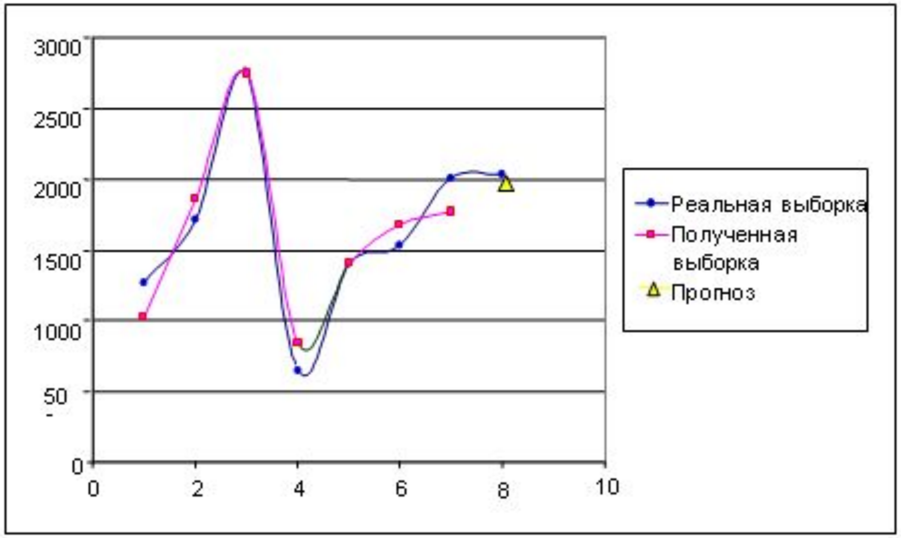
где $\lambda_1 = 2\cos\omega_1\Delta, \lambda_2 = 2\cos\omega_2\Delta$, ζ_k - новая стохастическая компонента.

Придем к нормальной СЛАУ второго порядка.

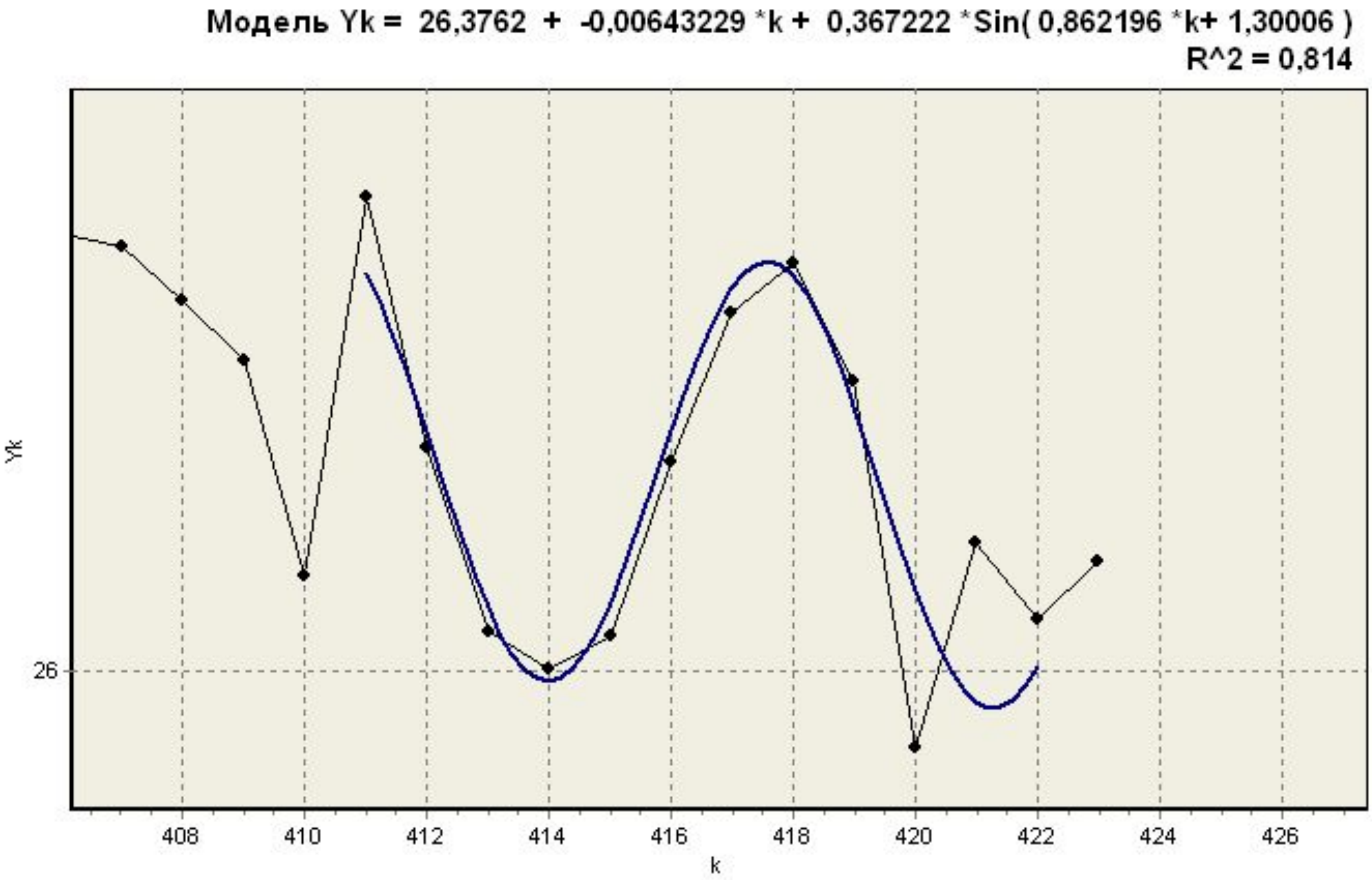
Валовой сбор зерна по Самарской области в 1953 - 2005 гг. (в хозяйствах всех категорий; в весе после доработки)



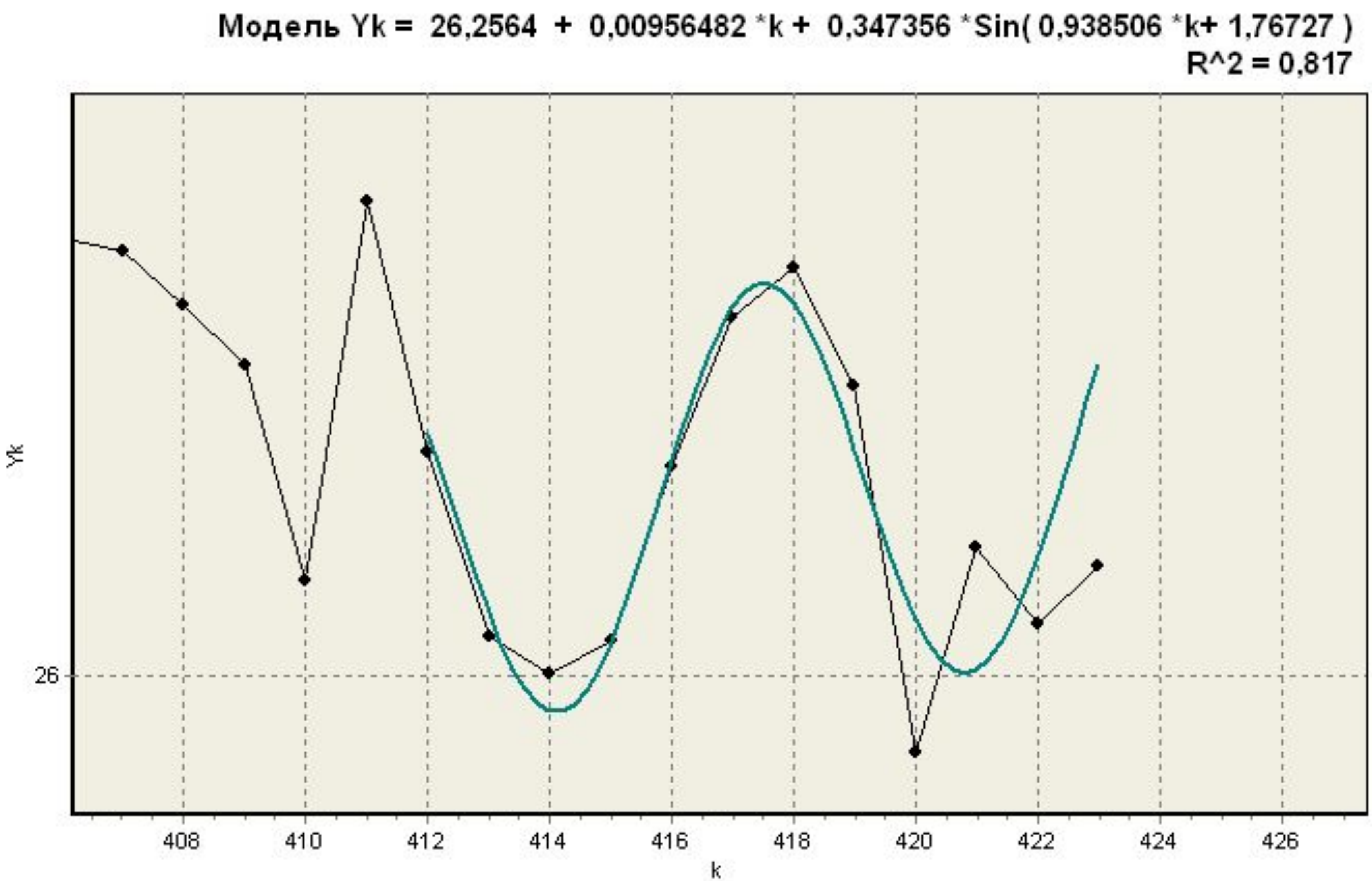
Реальная выборка валового сбора зерна объёмом $N = 8$, её моделирование и ошибка прогноза на один шаг



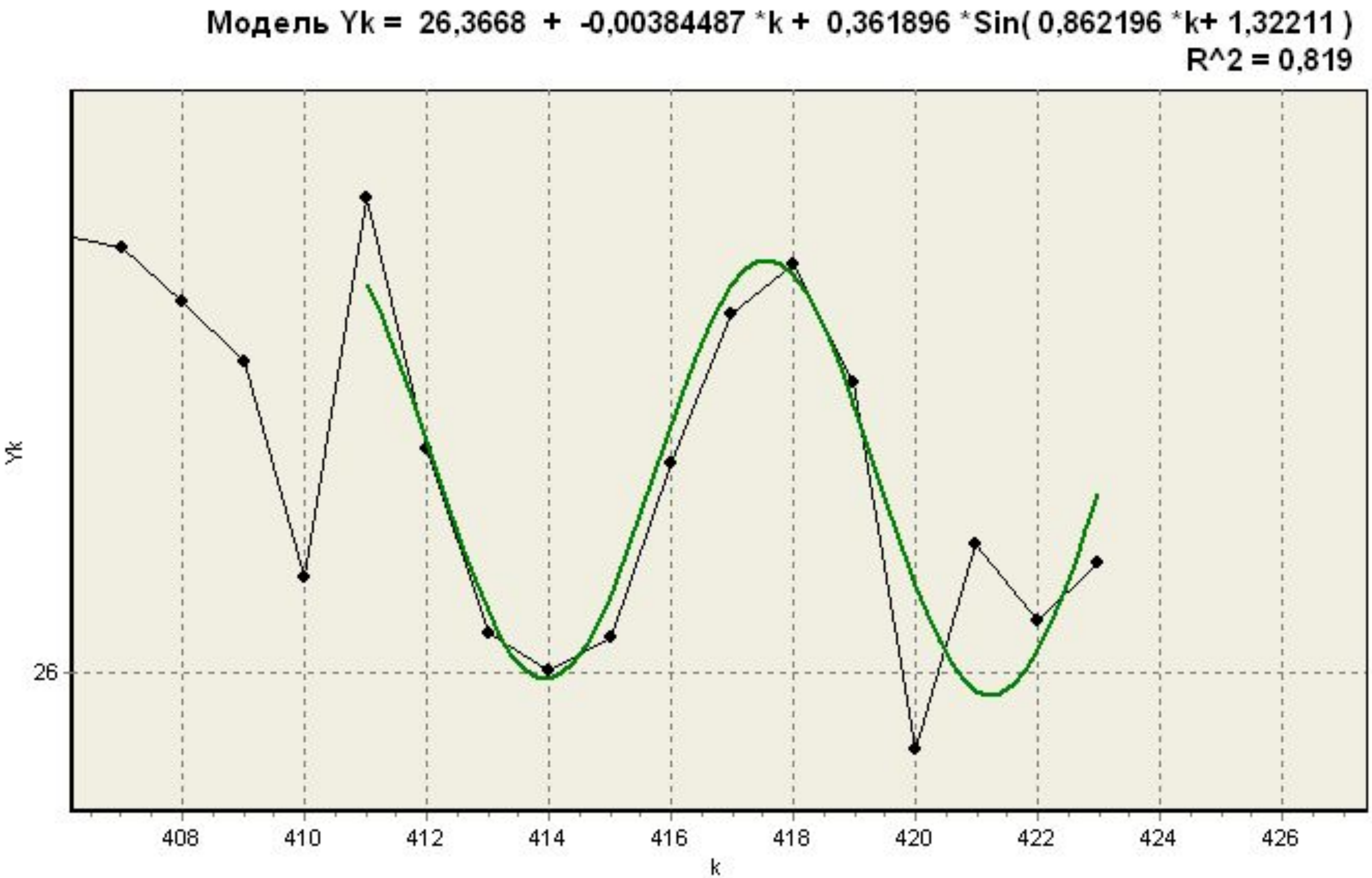
Моделирование содержания Al2O3 в нефелиновой среде суммой линейной функции и гармоники



Моделирование содержания Al2O3 в нефелиновой среде суммой линейной функции и гармоники

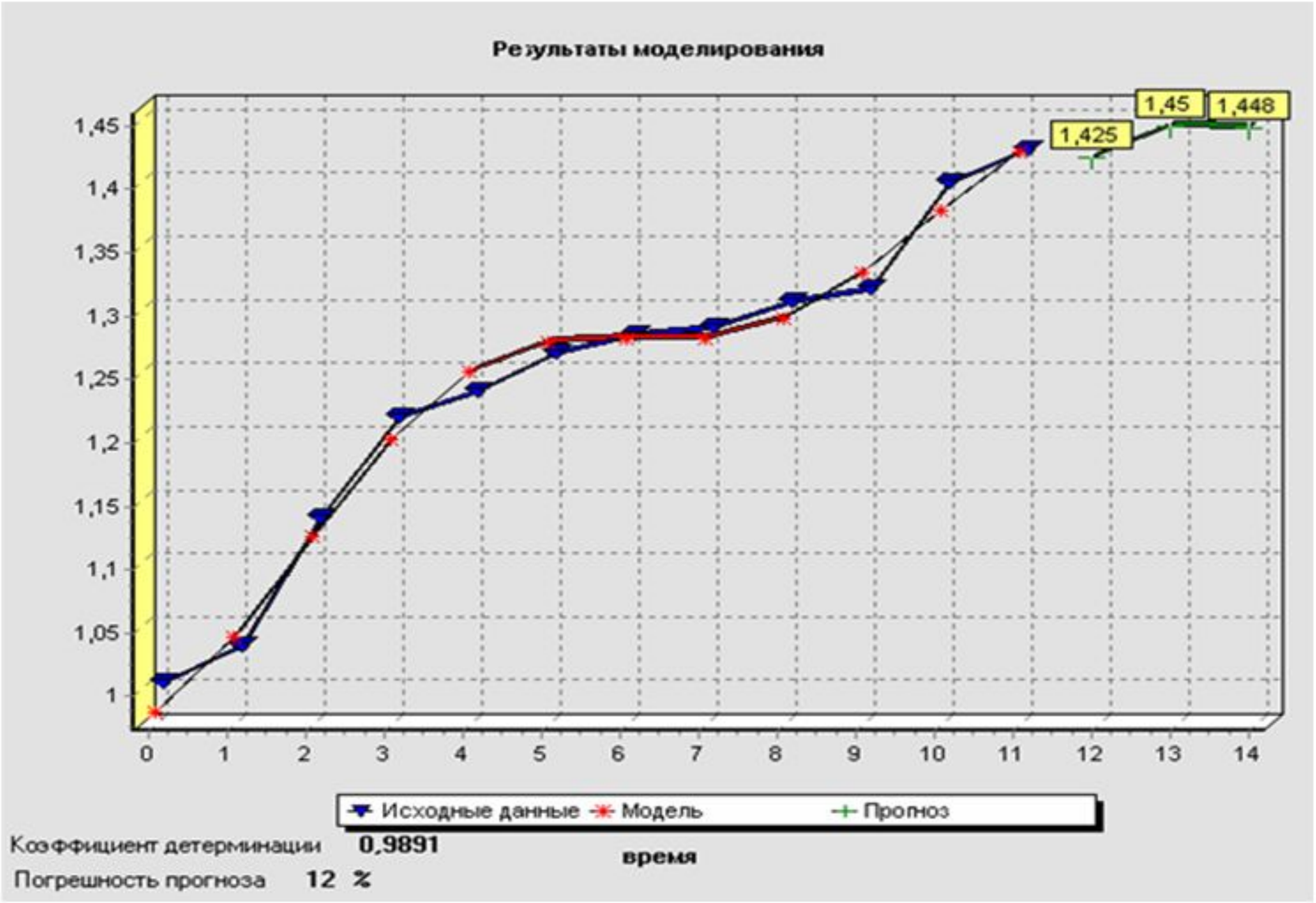


Моделирование содержания Al2O3
в нефелиновой среде суммой линейной функции и гармоники



Моделирование неслучайной компоненты ряда динамики суммой логисты Рамсея, двух гармоник и линейной функции

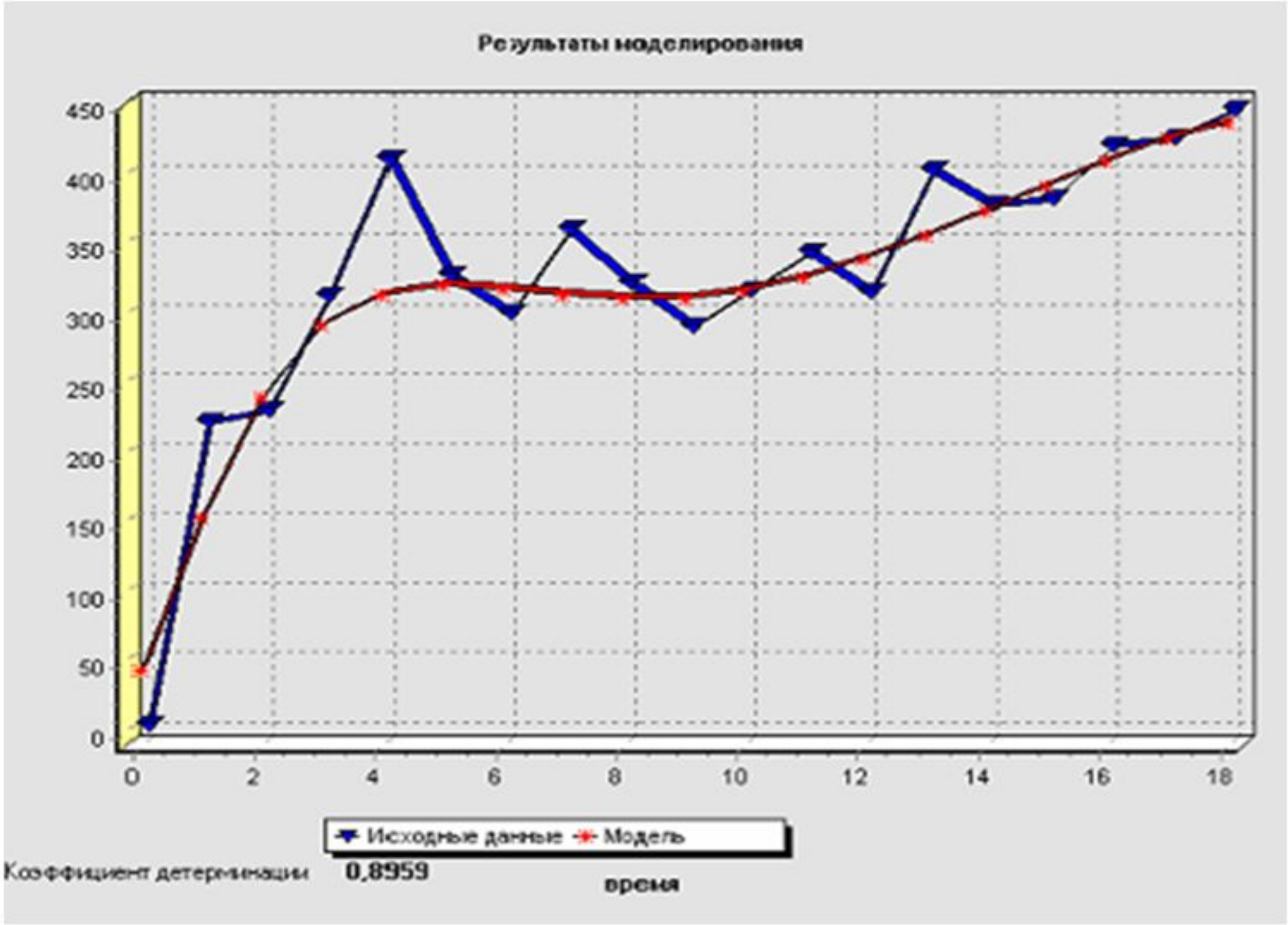
$$Y_k = C(1-(1+\alpha k\Delta)e^{-\alpha k\Delta}) + A_3 k\Delta + A_2 \cdot \sin(\omega_1 k\Delta + \varphi_1) + \xi_k$$



Результаты моделирования динамики изменения стоимости строительно-монтажных работ в Самарской области за 2004 - 2006 гг.

Моделирование неслучайной компоненты ряда динамики суммой логисты Рамсея, двух гармоник и линейной функции

$$Y_k = C(1-(1+\alpha k\Delta)e^{-\alpha k\Delta}) + A_3 k\Delta + A_2 \cdot \sin(\omega_1 k\Delta + \varphi_1) + \xi_k$$



Результаты моделирования динамики роста цен на бензин в 2004 – 2005 гг. **логистой с линейным и синусоидальным трендами**. Коэффициент детерминации $R^2 = 0.8959$

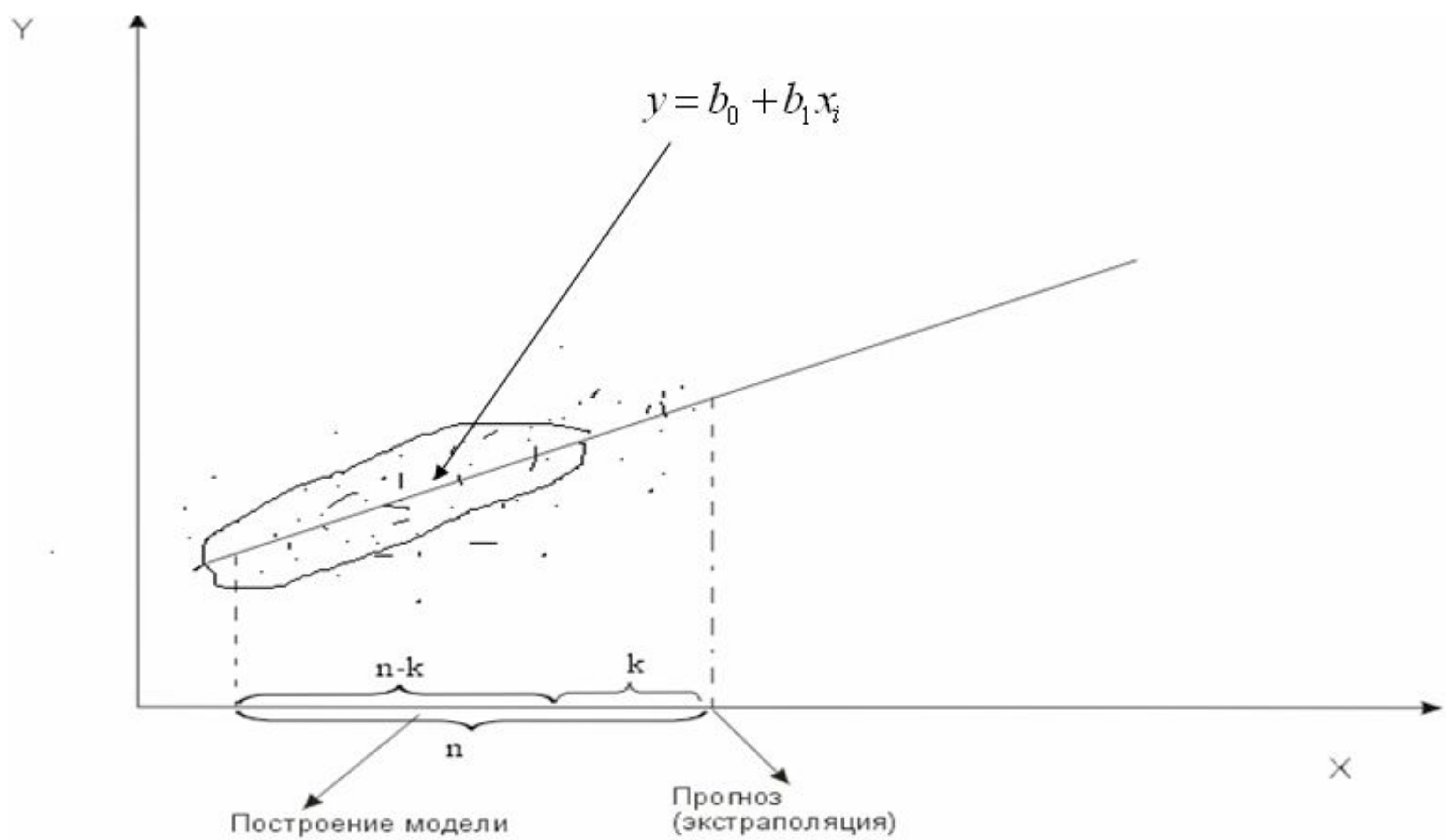
Адекватность и точность модели

Точность модели характеризует ее близость расчетных наблюдений (модельных) с фактическими на интервале наблюдений (аппроксимации).

Точность найденной регрессии может оцениваться:

D_{ξ} - размерная величина;

R^2 - нормированная величина (0-1).



Характеристики качества прогнозирования

1. Абсолютная ошибка прогноза:

$$\delta_k = \left| Y_k - Y_k^* \right|,$$

где Y_k - фактическое значение показателя на k-ое наблюдение; Y_k^* - прогнозное значение показателя на k-ое наблюдение;

2. Средняя абсолютная ошибка прогноза:

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{k=1}^{l} \left| Y_k - Y_k^* \right|}{l},$$

где l – период упреждения («горизонт» прогноза);

3. Среднеквадратическая ошибка прогноза:

$$\hat{\delta} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{l} (Y_k - Y_k^*)^2}{l}}.$$

Значения вышеперечисленных характеристик зависят от масштаба измерений, который может уменьшить объективность оценок.

Характеристики качества прогнозирования

Для того чтобы избежать этого,
<u>используют относительные характеристики ошибки прогноза:</u>

4. **Относительная ошибка прогноза**:

$$\gamma_k = \frac{\left|Y_k - Y_k^*\right|}{Y_k} 100\%;$$

5. **Среднюю относительную ошибку прогноза** (или среднеабсолютную процентную) **или MAPE – оценку**:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} \frac{\left|Y_k - Y_k^*\right|}{Y_k} 100\%;$$

6. **Коэффициенты несоответствия** (коэффициенты Тейла):

$$K_{T1} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{l} (Y_k - Y_k^*)^2}{\sum_{k=1}^{l} Y_k^2}}; \qquad K_{T2} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{l} (Y_k - Y_k^*)^2}{\sum_{k=1}^{l} Y_k^2 + \sum_{k=1}^{l} (Y_k^*)^2}}.$$

Рекомендуемая литература

1. Эконометрика/Под ред. И.И.Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2005. - 575 с.

2. Экономико-математические методы и прикладные модели/Под ред. В.В. Федосеева. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. - 304 с.

3. Янч Э. Прогнозирование научно-технического прогресса. - М.: Прогресс, 1974. – 380 с.

4. Твисс Б. Прогнозирование для технологов и инженеров. Практическое руководство для принятия лучших решений. - Н.Новгород: Парсек - НН, 2001. - 256 с.

5. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. - М.: Финансы и статистика, 2003. - 416 с.

6. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. - М.: Финансы и статистика, 1981. - 302 с.

7. Бородич С.А. Эконометрика. - Минск: Новое знание. 2001. - 408 с.